

Σήματα και Συστήματα

Σήματα και Συστήματα Διακριτού Χρόνου
Μετασχηματισμός Z

Σήματα διακριτού χρόνου

Πεδίο ορισμού: διακριτό σύνολο

Ακολουθίες $\{x(n)\}$ αντί για συναρτήσεις

Τα σήματα διακριτού χρόνου προκύπτουν:

- από πηγές διακριτής πληροφορίας (π.χ. μετρήσεις σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές)
- από αναλογικά σήματα μέσω δειγματοληψίας

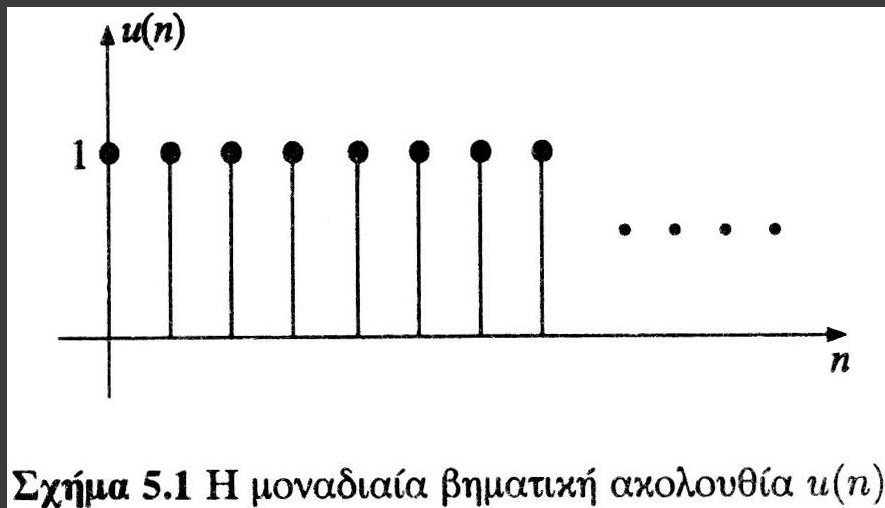
Δειγματοληπτούμε την τιμή που έχει το αναλογικό σήμα (με τη βοήθεια ενός μετατροπέα A/D) κάθε π.χ. T δευτερόλεπτα.

$x(t)$: το αναλογικό σήμα

$x(n) = x(nT)$: η ακολουθία που αντιστοιχεί στο σήμα διακριτού χρόνου

Ειδικές περιπτώσεις σημάτων διακριτού χρόνου

Μοναδιαία βηματική ακολουθία

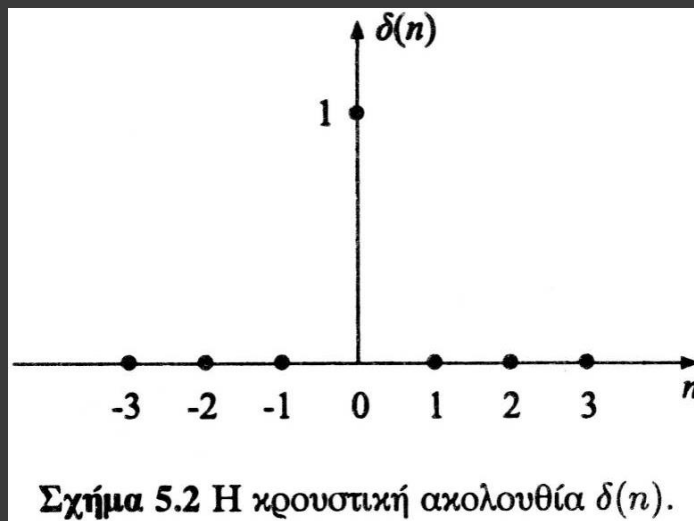


$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Στο σχήμα θα έπρεπε να υπάρχουν μόνο τα σημεία. Η σύνδεση με τον οριζόντιο άξονα γίνεται για να φαίνεται καλύτερα η αντιστοίχιση με τις τιμές του n .

Ειδικές περιπτώσεις σημάτων διακριτού χρόνου

Κρουστική ακολουθία



$$\delta(n - k) = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$$

$\delta(n)$: καλώς ορισμένη ακολουθία

Αποδεικνύεται ότι:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k)x(n - k) = x(n) * \delta(n)$$

Ειδικές περιπτώσεις σημάτων διακριτού χρόνου

Περιοδικές ακολουθίες

Σήμα διακριτού χρόνου $\rightarrow$ περιοδικό αν υπάρχει ακέραιος N :

$$x(n) = x(n+N), \text{ για κάθε } n \in \mathbb{Z} \text{ (σύνολο ακεραίων)}$$

Περίοδος του σήματος: ο μικρότερος θετικός ακέραιος για τον οποίο ισχύει η παραπάνω ιδιότητα

Αν N η περίοδος:

$$x(n) = x(n+kN), \text{ για κάθε } k \in \mathbb{Z}$$

Ειδικές περιπτώσεις σημάτων διακριτού χρόνου

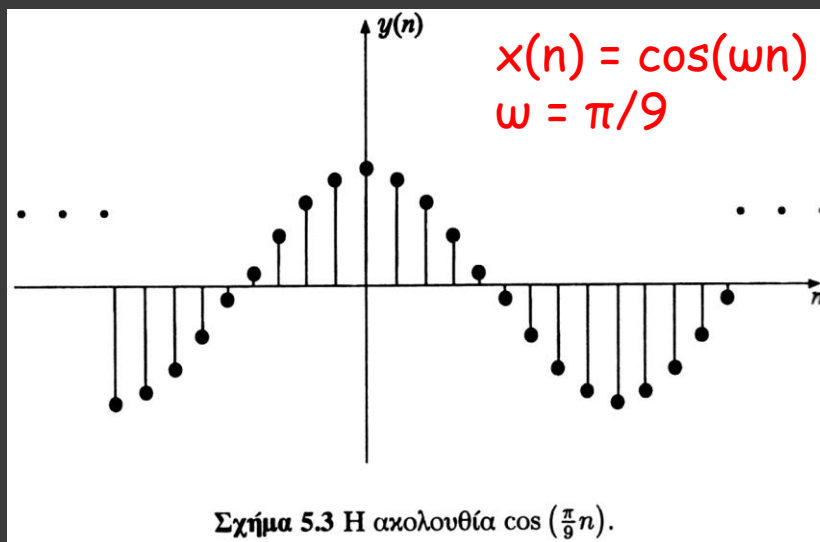
Μιγαδική εκθετική ακολουθία

$$x(n) = e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j\sin(\omega n)$$

$\cos(\omega n)$, $\sin(\omega n)$: διακριτό συνημίτονο και ημίτονο

Αν $\omega = 2k\pi/N$ ($k \in \mathbb{Z}$), τότε η $x(n)$ είναι περιοδική με περίοδο N . Δηλαδή $x(n) = x(n+N)$

Τότε το ω ονομάζεται κυκλική συχνότητα.



Συστήματα διακριτού χρόνου

Γραμμικά συστήματα

Έξοδος συστήματος στη γενική της μορφή:

$$y(n) = T[x(n)]$$

όπου $x(n)$ σήμα εισόδου διακριτού χρόνου, T ένας μετασχηματισμός και $y(n)$ σήμα εξόδου διακριτού χρόνου.

Ένα σύστημα σε κατάσταση ηρεμίας είναι γραμμικό, αν ισχύει η ιδιότητα της υπέρθεσης:

$$T[ax(n) + by(n)] = aT[x(n)] + bT[y(n)]$$

για οποιεσδήποτε σταθερές a, b .

Συστήματα διακριτού χρόνου

Χρονικά Αμετάβλητα συστήματα

Αν και μόνο αν χρονικές ολισθήσεις του σήματος εισόδου μεταφράζονται σε αντίστοιχες χρονικές ολισθήσεις στην έξοδο

$$y(n) = T[x(n)] \Leftrightarrow y(n-n_0) = T[x(n-n_0)], \text{ για κάθε } n_0 \in \mathbb{Z}$$

Αιτιατό σύστημα

Αν η έξοδός του δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου του.

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα ΓΧΑ σύστημα αιτιατό:

πρέπει η κρουστική του απόκριση $h(t)$ να είναι αιτιατή ακολουθία

$$h(n) = 0, \text{ για } n < 0$$

Απόκριση ΓΧΑ συστημάτων - Συνέλιξη

Αν $T(\cdot)$ ο μετασχηματισμός που περιγράφει τη σχέση εισόδου-εξόδου σε ένα σύστημα, τότε

$$y(n) = T[x(n)]$$

Από τον ορισμό της κρουστικής ακολουθίας έχουμε:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Άρα:

$$y(n) = T \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \right]$$

Λόγω γραμμικότητας και υποθέτοντας ότι η απεικόνιση $T(\cdot)$ είναι αρκούντως ομαλή:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)] \quad \text{ή} \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_n(k)$$

Απόκριση ΓΧΑ συστημάτων - Συνέλιξη

$h_n(k)$: η κρουστική απόκριση του συστήματος τη στιγμή k , όταν η κρουστική ακολουθία εφαρμόζεται στην είσοδο τη χρονική στιγμή n

Έστω σύστημα χρονικά αμετάβλητο.

Αν $h(k)$ η απόκριση του συστήματος, όταν η κρουστική ακολουθία εφαρμόζεται τη στιγμή 0 (δηλαδή είσοδος είναι η $\delta(k)$), τότε:

$h(n-k)$: η απόκριση του συστήματος, αν εφαρμόσουμε την κρουστική ακολουθία τη χρονική στιγμή n (είσοδος $\delta(n-k)$)

και

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

ΣΥΝΕΛΙΞΗ

Επίσης:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

Απόκριση ΓΧΑ συστημάτων - Συνέλιξη

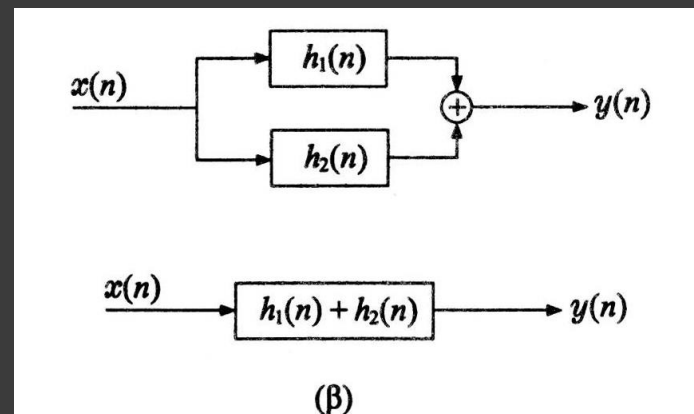
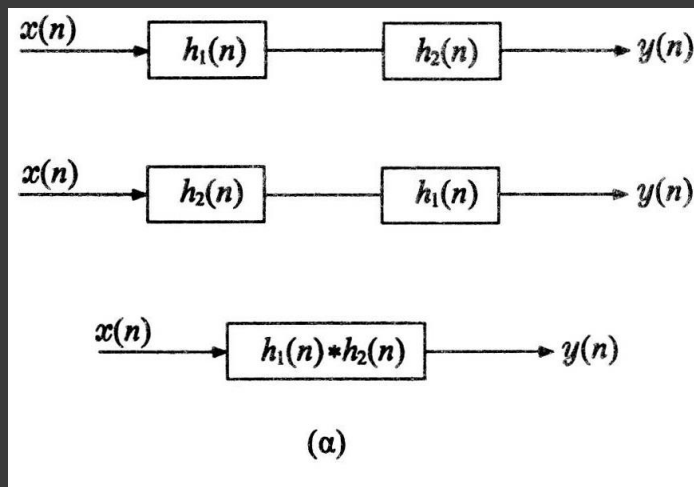
Ιδιότητες συνέλιξης στο διακριτό χρόνο (ίδιες με αυτές στο συνεχή χρόνο)

a) $h_1(n) * h_2(n) = h_2(n) * h_1(n)$

b) $h_1(n) * [h_2(n) * h_3(n)] = [h_1(n) * h_2(n)] * h_3(n)$

c) $h_1(n) * [h_2(n) + h_3(n)] = h_1(n) * h_2(n) + h_1(n) * h_3(n)$

d) $h(n) * \delta(n) = h(n)$



Σχήμα 5.4 Ερμηνεία των ιδιοτήτων της συνέλιξης. 13

Απόκριση ΓΧΑ συστημάτων - Συνέλιξη

Σχέση εισόδου-εξόδου (συνέλιξη): απόρροια της μνήμης του συστήματος, η οποία εκφράζεται μέσω της κρουστικής απόκρισης

Έστω σύστημα με $h(k) = 0, k < 0$, που ξεκινάει από ηρεμία.

Για $n = 0$, έξοδος $h(0)x(0)$

Για $n = 1$, έξοδος $h(0)x(1) + h(1)x(0) \dots$

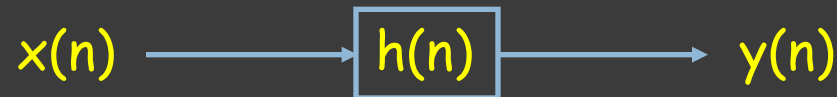
Δηλαδή, το σύστημα στην έξοδο δίνει:

- «βαρύτητα» $h(0)$ στην τιμή της εισόδου την παρούσα χρονική στιγμή n
- βαρύτητα $h(1)$ στην τιμή που είχε η είσοδος την προηγούμενη χρονική στιγμή $n-1$ (μνήμη) ...

Τιμές ακολουθίας κρουστικής απόκρισης: εκφράζουν ποσοτικά τη μνήμη του συστήματος

Απόκριση ΓΧΑ συστημάτων - Συνέλιξη

Υπολογισμός συνέλιξης



1. Υπολογίζουμε την κατοπτρική ως προς το 0 της μίας εκ των δύο συναρτήσεων, π.χ. $h(-k)$.
2. Ολισθαίνουμε την κατοπτρική συνάρτηση κατά n , δημιουργώντας την $h(n-k)$.
3. Πολλαπλασιάζουμε τη $x(k)$ με την $h(n-k)$ και αθροίζουμε πάνω σε όλα τα k .

Ευστάθεια ΦΕΦΕ

Αποδεικνύεται ότι ένα ΓΧΑ σύστημα είναι ευσταθές κατά ΦΕΦΕ, αν και μόνο αν η ακολουθία της κρουστικής απόκρισης είναι απόλυτα αθροίσιμη:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Για να ισχύει το παραπάνω πρέπει

$$|h(n)| \rightarrow 0 \text{ για } n \rightarrow \infty$$

Πρέπει δηλαδή η μνήμη του συστήματος να τείνει στο μηδέν για το μακρινό παρελθόν.

Μετασχηματισμός Z

Μετασχηματισμός Z για σήματα διακριτού χρόνου: ό,τι ο μετασχηματισμός Laplace για σήματα συνεχούς χρόνου

Μετασχηματισμός Fourier σημάτων διακριτού χρόνου: ειδική περίπτωση του MZ

Ο αμφίπλευρος MZ ενός σήματος διακριτού χρόνου $x(n)$, ορίζεται ως η δυναμοσειρά:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

όπου z μια μιγαδική μεταβλητή ($z = re^{j\theta}$).

Αρνητικός χρόνος: έχει νόημα σε συστήματα επεξεργασίας μη πραγματικού χρόνου (off-line), όπου η επεξεργασία γίνεται σε αποθηκευμένα δεδομένα

Μετασχηματισμός Z

Σύγκλιση δυναμοσειράς $\rightarrow$ Ύπαρξη μετασχηματισμού Z

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|r^{-n}$$

όπου r το μέτρο του z ($z = re^{j\theta}$)

1η περίπτωση: $x(n) = 0$, για $n < 0$, (σήμα αιτιατό)

$$|X(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|r^{-n}$$

Σύγκλιση μετασχηματισμού Z:

αν η ακολουθία
 $|x(n)|r^{-n}$ είναι
αθροίσιμη κατά
απόλυτη τιμή

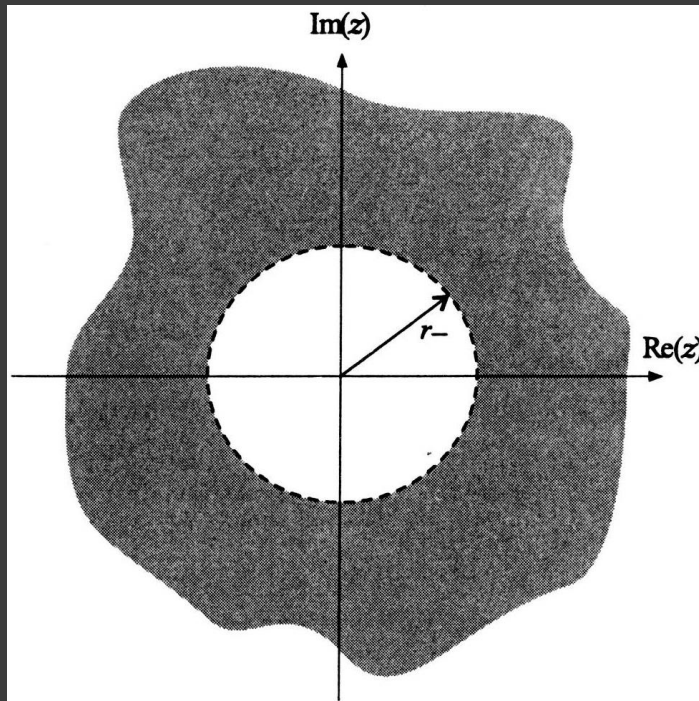


αν το $x(n)$ δεν
αυξάνεται ταχύτερα
από την εκθετική
ακολουθία

Μετασχηματισμός Z

Αν υπάρχουν θετικοί αριθμοί M και r_- : $|x(n)| < Mr_-^n$

τότε η $X(z)$ φράσσεται από δεξιά με πεπερασμένο φράγμα και άρα ο μετασχηματισμός υπάρχει για όλα τα z με $|z| = r > r_-$.



Σχήμα 5.6 Περιοχή σύγκλισης MZ αιτιατού σήματος.

$$|X(z)| < \sum_{n=0}^{\infty} Mr_-^n r^{-n} = M \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_-}{r} \right)^n$$

Η ΠΣ του MZ για αιτιατό σήμα εκτείνεται έξω από έναν κύκλο ακτίνας r_- .

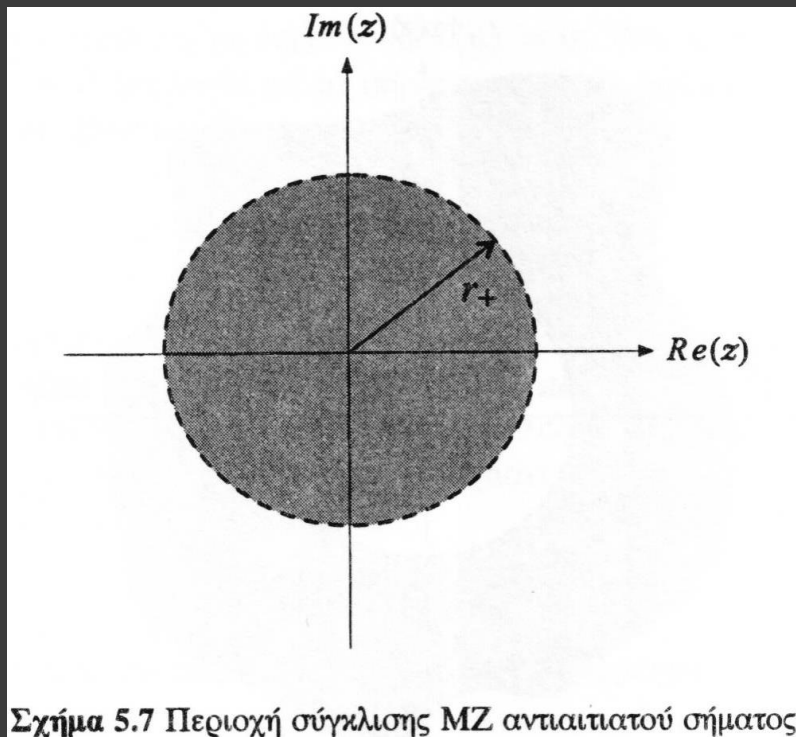
Μετασχηματισμός Z

2η περίπτωση: $x(n) = 0$, για $n \geq 0$, (σήμα αντιαιτιατό)

$$|X(z)| = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n}$$

Η συνθήκη της απόλυτης αθροισιμότητας εξασφαλίζεται αν

$$|x(-n)| < Mr_+^{-n}$$



Σχήμα 5.7 Περιοχή σύγκλισης MZ αντιαιτιατού σήματος.

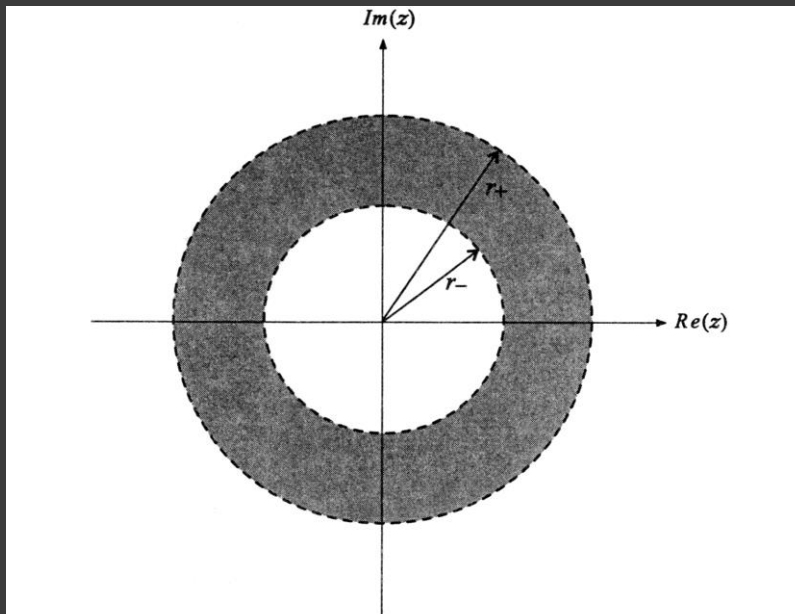
Η ΠΣ είναι το εσωτερικό ενός κύκλου ακτίνας r_+ , δηλαδή $|z| < r_+$.

Μετασχηματισμός Z

3η περίπτωση: $x(n) \neq 0$ για θετικές και αρνητικές τιμές του n

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} x(-n)z^n + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Η συνολική απόλυτη αθροισσιμότητα ισοδυναμεί με την αθροισσιμότητα των επιμέρους όρων.



Σχήμα 5.8 Περιοχή σύγκλισης MZ σήματος $x(n)$ που είναι μη μηδενικό για θετικές και αρνητικές τιμές του n .

Η ΠΣ είναι η τομή των δύο περιοχών του επιπέδου z , για τις οποίες $|z| > r_-$ και $|z| < r_+$, με την προϋπόθεση ότι $r_- < r_+$.

Ιδιότητες μετασχηματισμού Z

1. Γραμμικότητα

Αν a και b σταθερές και είναι

$$X(z) = Z \{x(n)\}, \quad r_{x-} < |z| < r_{x+}$$

$$Y(z) = Z \{y(n)\}, \quad r_{y-} < |z| < r_{y+}$$

τότε ισχύει

$$Z \{ax(n) + by(n)\} = aZ \{x(n)\} + bZ \{y(n)\}, \quad r_- < |z| < r_+$$

όπου

$$r_- \leq \max(r_{x-}, r_{y-}) \quad r_+ \geq \min(r_{x+}, r_{y+})$$

Άρα, η ΠΣ είναι τουλάχιστον η κοινή ΠΣ των $X(z)$ και $Y(z)$.

Ιδιότητες μετασχηματισμού Z

2. Χρονική ολίσθηση

Αν
$$X(z) = Z \{x(n)\}, \quad r_{x-} < |z| < r_{x+}$$

τότε
$$Z \{x(n-m)\} = z^{-m} X(z), \quad r_{x-} < |z| < r_{x+}$$

Η ΠΣ παραμένει η ίδια με πιθανή εξαίρεση τα σημεία 0 και ∞ , λόγω του παράγοντα z^{-m} .

Το z^{-1} καλείται μονάδα καθυστέρησης και υλοποιείται στην πράξη με έναν καθυστερητή (π.χ. flip-flop, latch).

Ιδιότητες μετασχηματισμού Z

3. Κλιμάκωση στο επίπεδο του z

Αν $X(z) = Z \{x(n)\}, \quad r_{x_-} < |z| < r_{x_+}$

τότε $X(wz) = Z \{w^{-n}x(n)\}, \quad \frac{1}{|w|}r_{x_-} < |z| < \frac{1}{|w|}r_{x_+}$

όπου το w είναι μη-μηδενικός μιγαδικός αριθμός.

4. Παραγωγή

Αν $X(z) = Z \{x(n)\}, \quad r_{x_-} < |z| < r_{x_+}$

τότε $Z \{nx(n)\} = -z \frac{dX(z)}{dz}, \quad r_{x_-} < |z| < r_{x_+}$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Z

5. Συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου

Έστω

$$\begin{aligned}w(n) &= x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)x(n-k)\end{aligned}$$

Αν οι μετασχηματισμοί Z των δύο αρχικών ακολουθιών είναι $Z\{x(n)\} = X(z)$ και $Z\{y(n)\} = Y(z)$, τότε ισχύει ότι:

$$Z\{w(n)\} = X(z)Y(z)$$

Η ΠΣ του $W(z)$ είναι τουλάχιστον η ΠΣ των $X(z)$ και $Y(z)$.

Ιδιότητες μετασχηματισμού Z

6. Συζυγής ακολουθία

Αν $X(z) = Z \{x(n)\}, \quad r_{x_-} < |z| < r_{x_+}$

τότε $Z \{x^*(n)\} = X^*(z^*), \quad r_{x_-} < |z| < r_{x_+}$

7. Κατοπτρισμός στον άξονα του χρόνου

Αν $X(z) = Z \{x(n)\}, \quad r_{x_-} < |z| < r_{x_+}$

τότε $Z \{x(-n)\} = X(z^{-1}), \quad \frac{1}{r_{x_+}} < |z| < \frac{1}{r_{x_-}}$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Z

8. Συσχέτιση

Η ακολουθία συσχέτισης δύο σημάτων $x(n)$ και $y(n)$ ορίζεται ως:

$$r_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(k-n)$$

Αν οι μετασχηματισμοί Z των δύο αρχικών ακολουθιών είναι $Z\{x(n)\} = X(z)$ και $Z\{y(n)\} = Y(z)$, τότε ισχύει ότι:

$$Z\{r_{xy}(n)\} = X(z)Y(z^{-1})$$

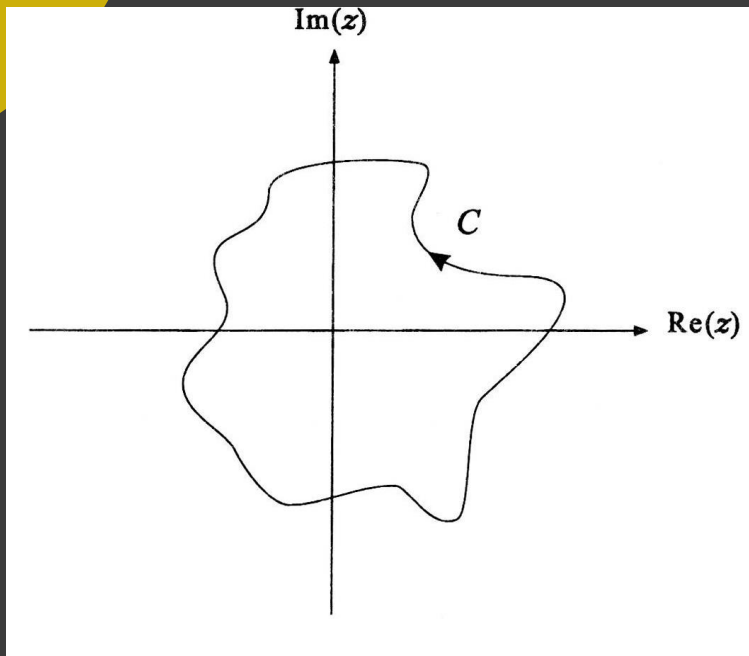
Ζεύγη μετασχηματισμού Z

Πίνακας 5.1 Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμών Z

Σήμα $x(n)$	MZ $X(z)$	ΠΣ
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$nu(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{z}{z-a}$	$ z > a $
$na^n u(n)$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$ z > a $
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{z}{z-a}$	$ z < a $
$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$ z < a $
$(\cos \omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^2 - z \cos \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$
$(\sin \omega_0 n)u(n)$	$\frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$
$(a^n \cos \omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^2 - az \cos \omega_0}{z^2 - 2az \cos \omega_0 + a^2}$	$ z > a $
$(a^n \sin \omega_0 n)u(n)$	$\frac{az \sin \omega_0}{z^2 - 2az \cos \omega_0 + a^2}$	$ z > a $

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$



Σχήμα 5.12 Καμπύλη ολοκλήρωσης για τον αντίστροφο ΜΖ.

όπου C μια κλειστή διαδρομή στο επίπεδο z , που περικλείει την αρχή των αξόνων.

Η ολοκλήρωση γίνεται αντίστροφα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Για να έχει νόημα ο αντίστροφος ΜΖ, πρέπει η καμπύλη ολοκλήρωσης C να βρίσκεται εντός της ΠΣ της $X(z)$.

Υπολογισμός αντίστροφου ΜΖ

Υπολογισμός με ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Έστω $X(z)z^{n-1}$ ρητή συνάρτηση του z με έναν πόλο πολλαπλότητας r , στο σημείο z_0 . Τότε

$$X(z)z^{n-1} = \frac{F(z)}{(z - z_0)^r}$$

Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $X(z)z^{n-1}$ στο z_0 ορίζεται ως:

$$\text{Res} \left[X(z)z^{n-1} \text{ στο } z = z_0 \right] = \frac{1}{(r-1)!} \left[\frac{d^{r-1} F(z)}{dz^{r-1}} \right]_{z=z_0}$$

Αν ο πόλος είναι απλός, η παραπάνω σχέση απλοποιείται στην:

$$\text{Res} \left[X(z)z^{n-1} \text{ στο } z = z_0 \right] = F(z_0)$$

Υπολογισμός αντίστροφου ΜΖ

Αν η $X(z)z^{n-1}$ έχει N πόλους z_i , $i = 1, 2, \dots, N$, εντός της γραμμής ολοκλήρωσης, τότε:

$$x(n) = \sum_{i=1}^N \text{Res} \left[X(z)z^{n-1} \text{ στο } z = z_i \right]$$

Η ΠΣ δεν περιλαμβάνει πόλους και ορίζεται από περιοχές μεταξύ διαδοχικών πόλων.

Η ΠΣ πρέπει να είναι συνεκτική περιοχή, δεν πρέπει δηλαδή να αποτελείται από την ένωση δύο ή περισσότερων περιοχών.

-> διαφορετικά, στον ίδιο ΜΖ θα αντιστοιχούσαν περισσότερες από μία ακολουθίες.

Άρα, η συνεκτικότητα της ΠΣ εξασφαλίζει τη μοναδικότητα του αντίστροφου ΜΖ.

Υπολογισμός αντίστροφου ΜΖ

Υπολογισμός με ανάπτυξη σε δυναμοσειρά

- Ανάπτυξη του $X(z)$ σε δυναμοσειρά
- Υπολογισμός $x(n)$ με αντιστοίχιση στους συντελεστές της δυναμοσειράς

Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά:

- με γνωστές μαθηματικές σχέσεις (αν εφαρμόζονται)
- με συνεχή διαίρεση

Η μεθοδολογία της διαίρεσης δεν είναι υπολογιστικά αποδοτική και χρησιμοποιείται κυρίως για τον υπολογισμό των πρώτων όρων του αναπτύγματος .

Υπολογισμός αντίστροφου ΜΖ

Υπολογισμός με ανάπτυξη σε απλά κλάσματα

α) Βαθμός αριθμητή < βαθμό παρονομαστή

$$\begin{aligned} X(z) = & \frac{K_{11}}{z - z_1} + \dots + \frac{K_{1n_1}}{(z - z_1)^{n_1}} \\ & + \frac{K_{21}}{z - z_2} + \dots + \frac{K_{2n_2}}{(z - z_2)^{n_2}} \\ & + \dots + \\ & + \frac{K_{l1}}{z - z_l} + \dots + \frac{K_{ln_l}}{(z - z_l)^{n_l}} \end{aligned}$$

όπου $z_1, z_2, \dots, z_l$ οι l πόλοι του $X(z)$ με πολλαπλότητες $n_1, n_2, \dots, n_l$, αντίστοιχα

$n = n_1 + n_2 + \dots + n_l$ ο βαθμός του πολυωνύμου του παρονομαστή

Υπολογισμός αντίστροφου ΜΖ

Οι συντελεστές K_{ij} δίνονται από τη σχέση:

$$K_{ij} = \frac{1}{(n_i - j)!} \frac{d^{n_i - j}}{dz^{n_i - j}} (z - z_i)^{n_i} X(z) \Big|_{z=z_i}$$

για $i = 1, 2, \dots, l$ και $j = 1, 2, \dots, n_i$

Στην περίπτωση απλού πόλου, π.χ. $n_i = 1$, έχουμε

$$K_{i1} = (z - z_i) X(z) \Big|_{z=z_i}$$

Έχοντας αναλύσει τη $X(z)$ σε απλά κλάσματα:

- υπολογίζουμε τους επιμέρους αντίστροφους ΜΖ των απλών κλασμάτων (χρήση πίνακα ζευγών)
- αθροίζουμε τις προκύπτουσες εκφράσεις

Υπολογισμός αντίστροφου ΜΖ

β) Βαθμός αριθμητή (m) >= βαθμό παρονομαστή (n)

Διαιρούμε τα πολυώνυμα και καταλήγουμε σε έκφραση της μορφής:

$$X(z) = B_{m-n}z^{m-n} + \dots + B_0z^0 + X_1(z)$$

Η $X_1(z)$ είναι ρητή συνάρτηση με βαθμό αριθμητή < βαθμό παρονομαστή.

Αναπτύσσουμε σε απλά κλάσματα και λύνουμε όπως προηγουμένως.

Συνάρτηση μεταφοράς ενός ΓΧΑΣ

Έστω ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(n)$. Οι ακολουθίες εισόδου-εξόδου σχετίζονται μέσω της συνέλιξης:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

Παίρνοντας ΜΖ στην παραπάνω σχέση έχουμε:

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad \text{ή} \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$H(z)$: συνάρτηση μεταφοράς του ΓΧΑ συστήματος

Σχέση εισόδου-εξόδου: μπορεί να περιγραφεί από εξίσωση διαφορών (όπως στα αναλογικά συστήματα περιγράφεται από διαφορική εξίσωση)

Τα συστήματα αυτά υλοποιούνται στην πράξη με χρήση πολλαπλασιαστών, αθροιστών, καθυστερητών.

Συνάρτηση μεταφοράς ενός ΓΧΑΣ

Γενική μορφή περιγραφής της σχέσης εισόδου-εξόδου:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

ή

$$\begin{aligned} a_0 y(n) = & -a_1 y(n-1) - \dots - a_N y(n-N) \\ & + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M) \end{aligned}$$

Έξοδος τη χρονική στιγμή n : γραμμικός συνδυασμός τιμών της εισόδου την ίδια χρονική στιγμή και σε προηγούμενες χρονικές στιγμές και τιμών της εξόδου σε προηγούμενες χρονικές στιγμές

Συνάρτηση μεταφοράς ενός ΓΧΑΣ

Εφαρμόζοντας ΜΖ στην εξίσωση διαφορών, και λαμβάνοντας υπόψη την ιδιότητα της χρονικής ολίσθησης, έχουμε:

$$\sum_{k=0}^N a_k Z[y(n-k)] = \sum_{r=0}^M b_r Z[x(n-r)]$$

ή

$$Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{r=0}^M b_r z^{-r}$$

ή

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \equiv H(z)$$

Αντίστροφος ΜΖ της $H(z)$ $\rightarrow$ κρουστική απόκριση του συστήματος

Συνάρτηση μεταφοράς ενός ΓΧΑΣ

Επιλογή ΠΣ: εξαρτάται από τους περιορισμούς που επιβάλλουμε στο σύστημα

Έστω ότι η $H(z)$ έχει τρεις πόλους ($N=3$).

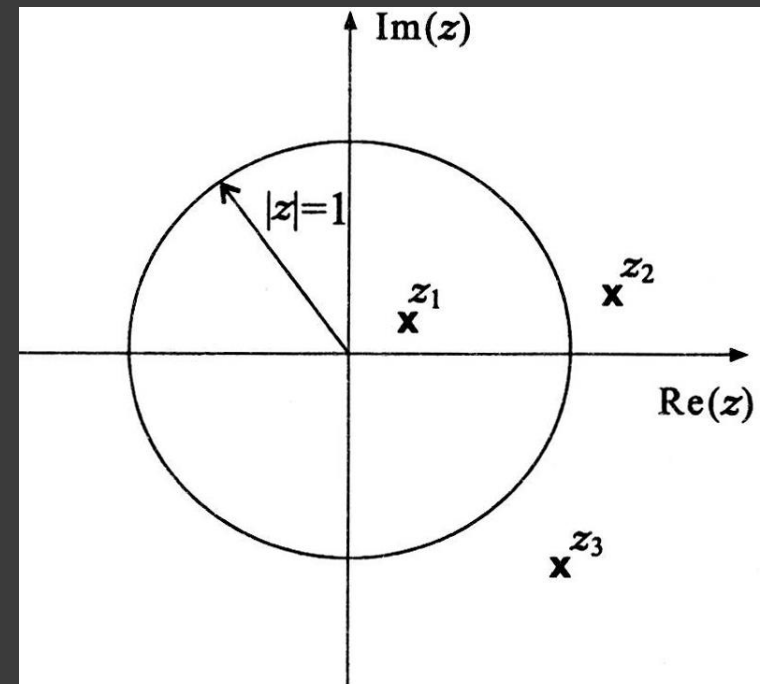
Δυνατές ΠΣ (συνεκτικές)

$$|z| < |z_1|$$

$$|z_1| < |z| < |z_2|$$

$$|z_2| < |z| < |z_3|$$

$$|z_3| < |z|$$



Σχήμα 5.15 Πόλοι συνάρτησης μεταφοράς.

Συνάρτηση μεταφοράς ενός ΓΧΑΣ

Επιλογή ΤΣ: εξαρτάται από τους περιορισμούς που επιβάλλουμε στο σύστημα

Έστω ότι η $H(z)$ έχει τρεις πόλους ($N=3$).

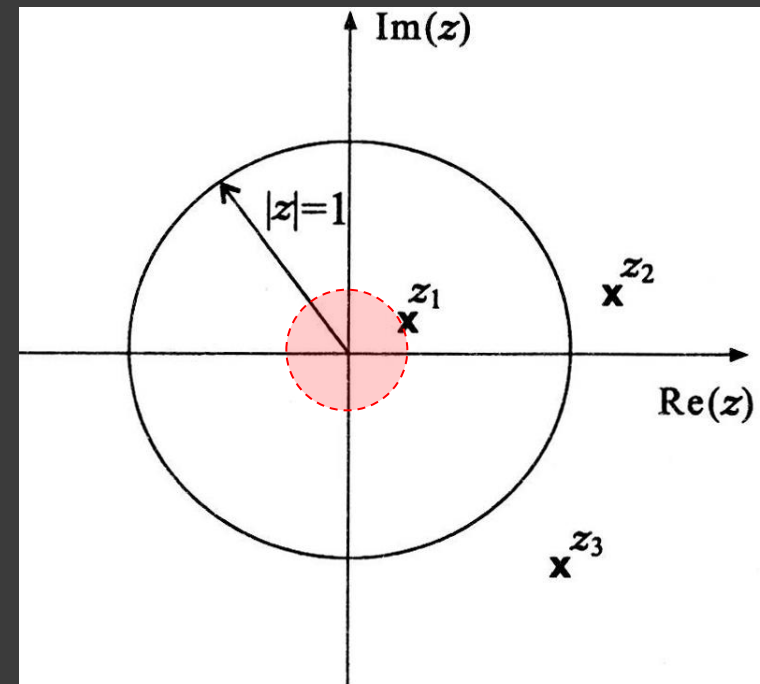
Δυνατές ΤΣ (συνεκτικές)

$$|z| < |z_1|$$

$$|z_1| < |z| < |z_2|$$

$$|z_2| < |z| < |z_3|$$

$$|z_3| < |z|$$



Σχήμα 5.15 Πόλοι συνάρτησης μεταφοράς.

Συνάρτηση μεταφοράς ενός ΓΧΑΣ

Επιλογή ΠΣ: εξαρτάται από τους περιορισμούς που επιβάλλουμε στο σύστημα

Έστω ότι η $H(z)$ έχει τρεις πόλους ($N=3$).

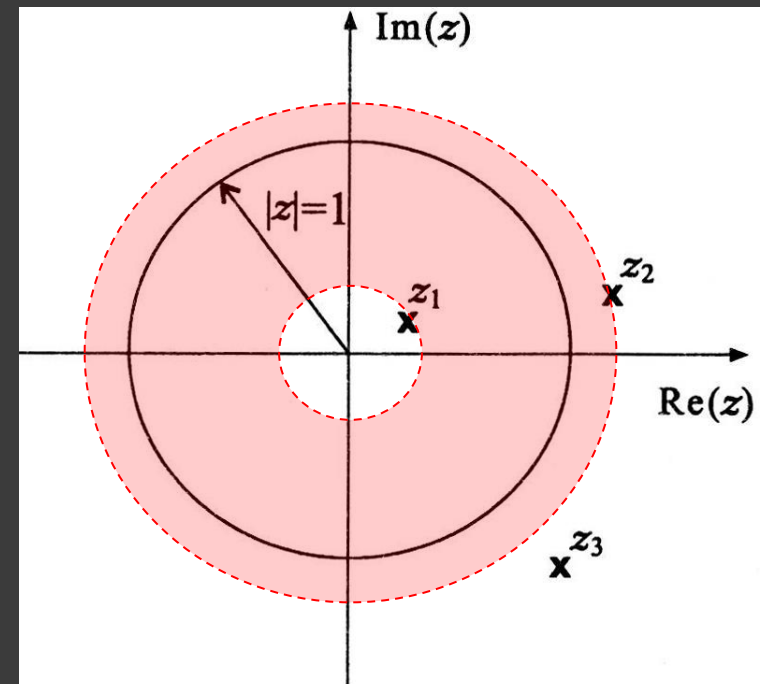
Δυνατές ΠΣ (συνεκτικές)

$$|z| < |z_1|$$

$$|z_1| < |z| < |z_2|$$

$$|z_2| < |z| < |z_3|$$

$$|z_3| < |z|$$



Σχήμα 5.15 Πόλοι συνάρτησης μεταφοράς.

Συνάρτηση μεταφοράς ενός ΓΧΑΣ

Επιλογή ΠΣ: εξαρτάται από τους περιορισμούς που επιβάλλουμε στο σύστημα

Έστω ότι η $H(z)$ έχει τρεις πόλους ($N=3$).

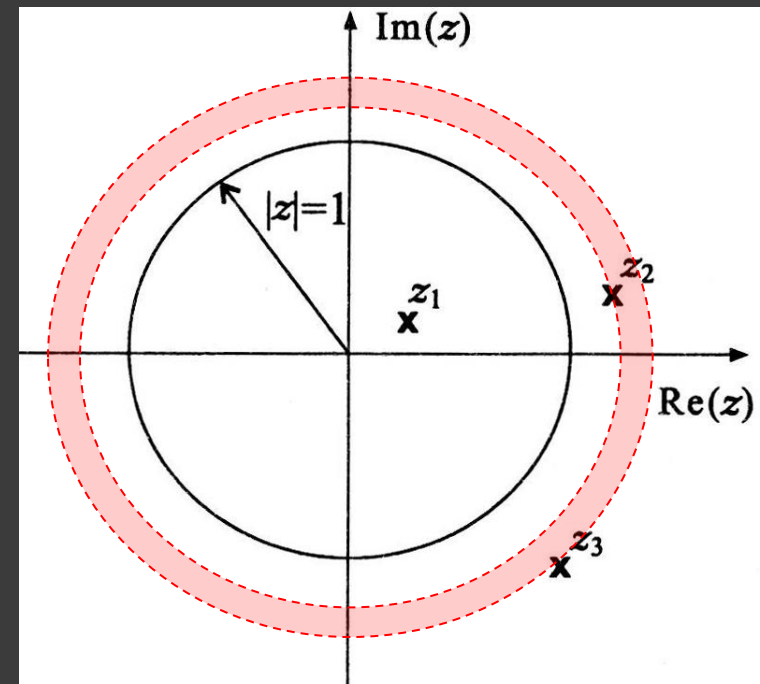
Δυνατές ΠΣ (συνεκτικές)

$$|z| < |z_1|$$

$$|z_1| < |z| < |z_2|$$

$$|z_2| < |z| < |z_3|$$

$$|z_3| < |z|$$



Σχήμα 5.15 Πόλοι συνάρτησης μεταφοράς.

Συνάρτηση μεταφοράς ενός ΓΧΑΣ

Επιλογή ΠΣ: εξαρτάται από τους περιορισμούς που επιβάλλουμε στο σύστημα

Έστω ότι η $H(z)$ έχει τρεις πόλους ($N=3$).

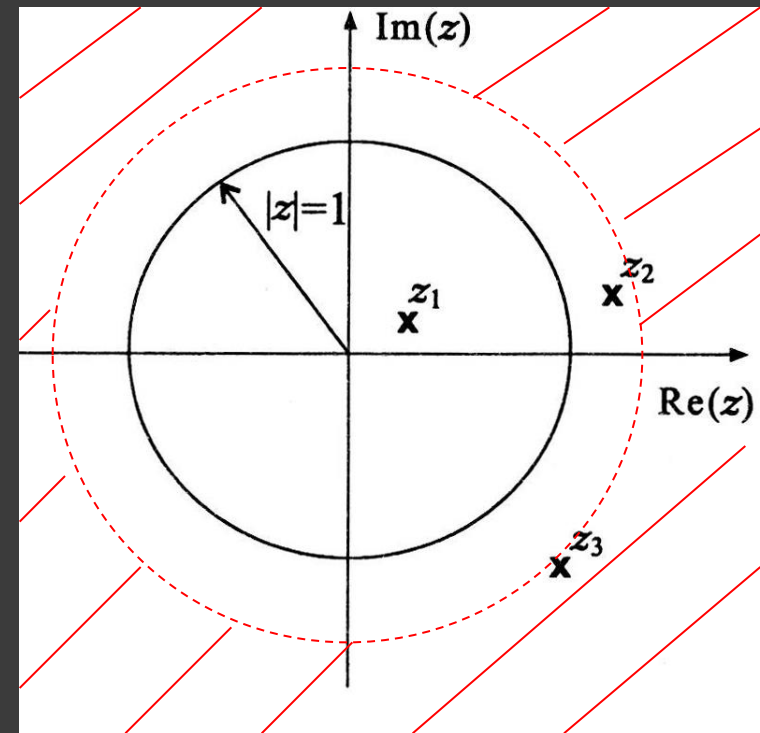
Δυνατές ΠΣ (συνεκτικές)

$$|z| < |z_1|$$

$$|z_1| < |z| < |z_2|$$

$$|z_2| < |z| < |z_3|$$

$$|z_3| < |z|$$



Σχήμα 5.15 Πόλοι συνάρτησης μεταφοράς.

Συνάρτηση μεταφοράς ενός ΓΧΑΣ

Σύστημα αιτιατό: $|z_3| < |z|$

Για αιτιατές ακολουθίες η ΤΣ εκτείνεται μέχρι το ∞ .

Σύστημα ευσταθές

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για $\Phi E \Phi E$ ευστάθεια:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Η συνθήκη αυτή συνεπάγεται και την ύπαρξη του μετασχηματισμού Fourier $\rightarrow$ η ΤΣ είναι αυτή στην οποία βρίσκεται ο μοναδιαίος κύκλος

$$|z_1| < |z| < |z_2|$$

Σύστημα ευσταθές και αιτιατό ταυτόχρονα: πρέπει όλοι οι πόλοι του να βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου

Μονόπλευρος μετασχηματισμός Z

Υπολογισμός $H(z)$: μέσω της εξίσωσης διαφορών που αντιστοιχεί στο σύστημα

Υπολογισμός εξόδου συστήματος: μέσω της $Y(z) = H(z)X(z)$ και με χρήση του αντίστροφου MZ

Μειονέκτημα: τα παραπάνω ισχύουν για συστήματα που βρίσκονται σε αρχική ηρεμία

-> δεν παρέχεται δυνατότητα ενσωμάτωσης πληροφορίας σχετικά με διεγέρσεις που μπορεί να έχει υποστεί το σύστημα πριν την εφαρμογή του γνωστού σήματος εισόδου, $x(n)$

Λύση: μονόπλευρος MZ

Μονόπλευρος μετασχηματισμός Z

Μονόπλευρος ΜΖ σήματος $x(n)$, η μιγαδική συνάρτηση:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Αθροίζουμε από 0, ανεξάρτητα με το αν η ακολουθία είναι αιτιατή ή όχι.

Για αιτιατά σήματα, ο μονόπλευρος ΜΖ ταυτίζεται με τον αμφίπλευρο ΜΖ.

Μονόπλευρος ΜΖ:

- Δεν περιέχει πληροφορία για το σήμα στις αρνητικές χρονικές στιγμές.
- Είναι μοναδικός μόνο για αιτιατά σήματα.

Μονόπλευρος μετασχηματισμός Z

- Ταυτίζεται με τον αμφίπλευρο ΜΖ του σήματος $x(n)u(n)$.

Αφού $x(n)u(n)$: αιτιατό $\rightarrow$ η ΠΣ του μονόπλευρου ΜΖ είναι πάντα το εξωτερικό ενός κύκλου.

Άρα δεν είναι αναγκαίο να ορίσουμε ΠΣ για το μονόπλευρο ΜΖ.

Η ΠΣ είναι η εξωτερική περιοχή του κύκλου που περιλαμβάνει τον πόλο με το μεγαλύτερο μέτρο.

- Σχεδόν όλες οι ιδιότητες του αμφίπλευρου ΜΖ ισχύουν και για το μονόπλευρο.

Εξαίρεση: ιδιότητα ολίσθησης

Μονόπλευρος μετασχηματισμός Z

Ιδιότητα χρονικής ολίσθησης

α) Δεξιά ολίσθηση - Καθυστέρηση

Αν $X(z) = Z[x(n)]$

τότε $Z[x(n-k)] = z^{-k} \left[X(z) + \sum_{n=1}^k x(-n)z^n \right], \quad k > 0$

Η ιδιότητα αυτή παρέχει τη δυνατότητα ενσωμάτωσης αρχικών συνθηκών.

β) Αριστερή ολίσθηση - Προήγηση

Αν $X(z) = Z[x(n)]$

τότε $Z[x(n+k)] = z^k \left[X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n)z^{-n} \right], \quad k > 0$

Μονόπλευρος μετασχηματισμός Z

Η ιδιότητα χρονικής ολίσθησης επιβεβαιώνει ότι αθροίζοντας από 0 έως ∞ :

- a) κατά τη δεξιά ολίσθηση νέα δείγματα εισέρχονται στο διάστημα $[0, \infty]$, τα $x(-1), x(-2), \dots, x(-k)$
- b) κατά την αριστερή ολίσθηση, το διάστημα $[0, \infty]$ δεν περιλαμβάνει πλέον τα δείγματα $x(0), x(1), \dots, x(k-1)$

Θεώρημα αρχικής τιμής

Αν $X(z)$ είναι ο μονόπλευρος ΜΖ του $x(n)$, τότε:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

Μονόπλευρος μετασχηματισμός Z

Θεώρημα τελικής τιμής

Αν $X(z)$ είναι ο μονόπλευρος ΜΖ του $x(n)$, τότε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την ασυμπτωτική τιμή του $x(n)$, χωρίς να είναι ανάγκη να υπολογίσουμε το ίδιο το $x(n)$, από τον αντίστροφο ΜΖ του $X(z)$.

Προϋπόθεση: η ΤΣ του $(z-1)X(z)$ να περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο (στην πράξη αυτό ισχύει πάντα, αφού ένα σύστημα είναι υλοποιήσιμο μόνο όταν είναι ευσταθές)

Απόκριση ΓΧΑΣ με αρχικές συνθήκες

Έστω ΓΧΑ σύστημα, αιτιατό και ευσταθές, το οποίο περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση διαφορών:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

Έστω ότι το σήμα $x(n)$ εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή $n = 0$.

Το σύστημα δεν βρίσκεται σε ηρεμία, αλλά γνωρίζουμε τις αρχικές τιμές της εξόδου που οφείλονται σε προηγούμενες διεγέρσεις, $y(-N)$, $y(-N+1)$, ..., $y(-1)$.

Θεωρούμε $a_0 = 1$. (Μπορούμε πάντα να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με αυτό το συντελεστή και να προκύψει μονάδα.)

Απόκριση ΓΧΑΣ με αρχικές συνθήκες

Παίρνοντας μονόπλευρο ΜΖ και στα δύο μέλη και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ολίσθησης έχουμε:

$$Y(z) + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \left[Y(z) + \sum_{m=1}^k y(-m) z^m \right] = \sum_{r=0}^M b_r z^{-r} X(z)$$

ή

$$Y(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} X(z) - \frac{\sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \sum_{m=1}^k y(-m) z^m}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$
$$\equiv H(z)X(z) + \frac{N(z)}{A(z)}$$

$H(z)$: συνάρτηση μεταφοράς συστήματος (κατάσταση ηρεμίας)

$N(z)/A(z)$: συνεισφορά αρχικών συνθηκών στη δημιουργία του σήματος εξόδου