

Σήματα και Συστήματα

Ασκήσεις Laplace

Πρόβλημα 1 (βιβλίο σελίδα 146)

Να υπολογιστεί ο ML της ακόλουθης συνάρτησης

$$x(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 2 \\ 6, & t > 2 \end{cases}$$

Λύση:

Εκφράζουμε την $x(t)$ ως συνδυασμό γνωστών συναρτήσεων των οποίων ο ML μπορεί να βρεθεί εύκολα.

$$\begin{aligned} x(t) &= [t^2 u(t) - t^2 u(t-2)] + 6u(t-2) \\ &= t^2 u(t) - (t^2 - 6)u(t-2) \\ &= t^2 u(t) - [(t^2 - 4t + 4) + 4t - 10]u(t-2) \\ &= t^2 u(t) - [(t-2)^2 + 4(t-2) - 2]u(t-2) \\ &= t^2 u(t) - (t-2)^2 u(t-2) - 4(t-2)u(t-2) + 2u(t-2) \end{aligned}$$

Πρόβλημα 1 (βιβλίο σελίδα 146)

Παίρνοντας το ML των δύο πλευρών έχουμε τελικά:

$$X(s) = \frac{2}{s^3} - e^{-2s} \frac{2}{s^3} - 4e^{-2s} \frac{1}{s^2} + 2e^{-2s} \frac{1}{s}$$

με $\operatorname{Re}(s) > 0$

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 146)

Να υπολογιστεί ο ML της συνάρτησης

$$x(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$$

Λύση:

Το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor γύρω από το 0 της e^{-t} είναι

$$e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!}$$

Επομένως η $x(t)$ μπορεί να γραφτεί ως

$$x(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{n!}$$

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 146)

Επειδή:

$$\begin{aligned}\frac{1 - e^{-t}}{t} &= \frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!}}{t} = t^{-1} - t^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} \\ &= -t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} - 1 \right) = -t^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{n!}\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 146)

Ορίζοντας τη μεταβλητή $k = n - 1$, η παραπάνω έκφραση γίνεται

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{(k+1)!}$$

Παίρνοντας το ML των δύο πλευρών έχουμε τελικά εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα της γραμμικότητας ότι

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{(k+1)!}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \mathcal{L}\{t^k\}$$

Σύμφωνα με τον πίνακα 3.1 (σελ. 113) του βιβλίου έχουμε

$$\mathcal{L}\{t^k\} = \frac{k!}{s^{k+1}}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 146)

Συνεπώς

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \frac{k!}{s^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \frac{1}{s^{k+1}}$$

Το τελευταίο, όμως, άθροισμα είναι το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor γύρω από το μηδέν της συνάρτησης $\ln(1 + \omega)$ με $\omega = 1/s$. Αυτό ορίζεται για $|\omega| < \infty$, δηλαδή $s \neq 0$. Τελικά:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \ln\left(1 + \frac{1}{s}\right), \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

Υπολογισμός Αντίστροφου Μετασχηματισμού Laplace

Ανάπτυξη ρητής συνάρτησης σε απλά κλάσματα

$$X(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$: οι ρίζες του $a(s)$

1) Απλές και πραγματικές ρίζες

$$a(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i)$$

$$X(s) = \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \dots + \frac{c_n}{s - \lambda_n} \quad \text{όπου} \quad c_i = (s - \lambda_i) X(s) \Big|_{s=\lambda_i}$$

Οπότε
$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = (c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}) u(t)$$

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{Re}(s) > -1$$

Εκφράζουμε σε απλά κλάσματα

$$X(s) = \frac{c_1}{(s+1)} + \frac{c_2}{(s+2)}$$

$$\text{όπου } c_1 = (s+1)X(s)\big|_{s=-1} = 1$$

$$c_2 = (s+2)X(s)\big|_{s=-2} = 1$$

Άρα,

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \quad \text{και} \quad x(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

Υπολογισμός Αντίστροφου Μετασχηματισμού Laplace

2) Πολλαπλές και πραγματικές ρίζες

Έστω ότι μόνο η πρώτη ρίζα έχει πολλαπλότητα r και οι άλλες είναι απλές.
(Εύκολα η γενίκευση)

$$a(s) = (s - \lambda_1)^r \prod_{i=r+1}^n (s - \lambda_i)$$

$$X(s) = \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_2}{(s - \lambda_1)^2} + \dots + \frac{c_r}{(s - \lambda_1)^r} + \frac{c_{r+1}}{s - \lambda_{r+1}} + \dots + \frac{c_n}{s - \lambda_n}$$

όπου

$$c_i = \frac{1}{(r-i)!} \frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}} [(s - \lambda_1)^r X(s)] \Big|_{s=\lambda_1}, i = 1, \dots, r$$

$$c_i = (s - \lambda_i) X(s) \Big|_{s=\lambda_i}, i = r, \dots, n$$

Οπότε $x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = (c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} + \dots + c_r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{\lambda_1 t} + c_{r+1} e^{\lambda_{r+1} t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}) u(t)$

Πρόβλημα 3 (βιβλίο σελίδα 147)

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ML της συνάρτησης

$$X(s) = \frac{5s^2 - 15s + 7}{(s+1)(s-2)^3} \quad \text{Re}(s) > 2$$

Λύση:

Υπολογίζουμε το ανάπτυγμα της $X(s)$ σε μερικά κλάσματα

$$X(s) = \frac{5s^2 - 15s + 7}{(s+1)(s-2)^3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{(s-2)^3}$$

Πρόβλημα 3 (βιβλίο σελίδα 147)

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις σταθερές A, B, C και D .

$$A = \lim_{s \rightarrow -1} (s + 1)X(s) = -3$$

$$B = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{(3 - 1)!} \frac{d^2}{ds^2} [(s - 2)^3 X(s)] = 1$$

$$C = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{(3 - 2)!} \frac{d}{ds} [(s - 2)^3 X(s)] = 2$$

$$D = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{(3 - 3)!} [(s - 2)^3 X(s)] = -1$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{5s^2 - 15s + 7}{s + 1} \right) = \frac{5s^2 + 10s - 22}{(s + 1)^2}$$

Άρα

$$X(s) = -\frac{3}{s + 1} + \frac{1}{s - 2} + \frac{2}{(s - 2)^2} - \frac{1}{(s - 2)^3}$$

οπότε

$$x(t) = \left(-3e^{-t} + e^{2t} + 2te^{2t} - \frac{t^2}{2}e^{2t} \right) u(t)$$

Παράδειγμα(2)

- Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

$$X(s) = \frac{s}{(s+1)^3(s+2)}$$

Εκφράζουμε σε απλά κλάσματα

$$X(s) = \frac{c_1}{(s+1)} + \frac{c_2}{(s+1)^2} + \frac{c_3}{(s+1)^3} + \frac{c_4}{(s+2)}$$

όπου

$$c_1 = \frac{1}{(3-1)!} \frac{d^2}{ds^2} [(s+1)^3 X(s)] \Big|_{s=-1} = \frac{1}{2} \frac{-4}{(s+2)^3} \Big|_{s=-1} = -2$$

$$c_2 = \frac{1}{(3-2)!} \frac{d}{ds} [(s+1)^3 X(s)] \Big|_{s=-1} = 2$$

Άρα,

$$c_3 = (s+1)^3 X(s) \Big|_{s=-1} = -1$$

$$c_4 = (s+2)X(s) \Big|_{s=-2} = 2$$

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+2)}$$

Παράδειγμα(2)

Εκφράζουμε σε απλά κλάσματα

$$X(s) = \frac{-2}{(x+1)} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{2}{(x+2)}$$

Άρα,

$$x(t) = (-2e^{-t} + 2te^{-t} - \frac{t^2}{2}e^{-t} + 2e^{-2t})u(t)$$

Υπολογισμός Αντίστροφου Μετασχηματισμού Laplace

3) Μιγαδικές και πραγματικές ρίζες

Έστω ότι η πρώτη και δεύτερη ρίζα αποτελούν ζεύγωνα συζυγών μιγαδικών ριζών. (Επειδή οι συντελεστές του $a(s)$ είναι πραγματικοί οι μιγαδικές ρίζες πάντα σε συζυγη ζεύγη!!!)

$$a(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i)$$

$$\lambda_1 = \sigma + j\Omega, \lambda_2 = \sigma - j\Omega = \lambda_1^*$$

$$X(s) = \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \dots + \frac{c_n}{s - \lambda_n} \quad \text{όπου} \quad c_i = (s - \lambda_i)X(s)\big|_{s=\lambda_i}$$

$$\underline{\text{Οπότε}} \quad x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = (c_1 e^{\lambda_1 t} + c_1^* e^{\lambda_1^* t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t})u(t)$$

Πρόβλημα 4 (βιβλίο σελίδα 148)

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ML της συνάρτησης

$$X(s) = \frac{2s^2 + 6s + 6}{(s + 2)(s^2 + 2s + 2)} \quad \text{Re}(s) > -2$$

Λύση:

Υπάρχουν 2 τρόποι με τους οποίους μπορούμε να λύσουμε την άσκηση. Ο 1ος τρόπος είναι να υπολογίσουμε ότι ο δευτεροβάθμιος παράγοντας του παρονομαστή παραγοντοποιείται ως

$$s^2 + 2s + 2 = (s + 1 + j)(s + 1 - j)$$

Έτσι, η συνάρτηση $X(s)$ αναλύεται ως εξής:

$$X(s) = \frac{A}{s + 2} + \frac{B}{s + 1 + j} + \frac{C}{s + 1 - j}$$

Πρόβλημα 4 (βιβλίο σελίδα 148)

όπου οι σταθερές A, B, C υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$A = \lim_{s \rightarrow -2} [(s + 2)X(s)] = 1$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -1-j} [(s + 1 + j)X(s)] = \frac{j}{j + 1}$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -1+j} [(s + 1 - j)X(s)] = \frac{j}{j - 1}$$

Το ανάπτυγμα της $X(s)$ γίνεται έτσι:

$$X(s) = \frac{1}{s + 2} + \frac{j}{j + 1} \frac{1}{s + 1 + j} + \frac{j}{j - 1} \frac{1}{s + 1 - j}$$

Ο αντίστροφος ML της συνάρτησης είναι

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$$

Πρόβλημα 4 (βιβλίο σελίδα 148)

$$X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{j}{j+1} \frac{1}{s+1+j} + \frac{j}{j-1} \frac{1}{s+1-j}$$

$$x(t) = \left[e^{-2t} + \frac{j}{j+1} e^{-(1+j)t} + \frac{j}{j-1} e^{-(1-j)t} \right] u(t)$$

$$= \left[e^{-2t} + e^{-t} \left(\frac{j}{j+1} e^{-jt} + \frac{j}{j-1} e^{jt} \right) \right] u(t)$$

$$= \left[e^{-2t} + e^{-t} 2\operatorname{Re} \left(\frac{j}{j+1} e^{-jt} \right) \right] u(t)$$

$$= [e^{-2t} + e^{-t}(\cos t + \sin t)] u(t)$$

Πρόβλημα 4 (βιβλίο σελίδα 148)

Ο εναλλακτικός τρόπος λύσης είναι να κρατηθούν οι συζυγείς μιγαδικοί παράγοντες και να γίνει η εξής ανάλυση:

$$X(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$$

Το A βρίσκεται εύκολα όπως και πριν

$$A = \lim_{s \rightarrow -2} [(s+2)X(s)] = 1$$

Τα B και C μπορούν με τη σειρά τους να υπολογιστούν με δύο τρόπους

Πρόβλημα 4 (βιβλίο σελίδα 148)

- Εξίσωση ομοβάθμιων όρων

$$\begin{aligned}\frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 2} &= \frac{2s^2 + 6s + 6}{(s + 2)(s^2 + 2s + 2)} - \frac{1}{s + 2} \\ &= \frac{2s^2 + 6s + 6 - s^2 - 2s - 2}{(s + 2)(s^2 + 2s + 2)} \\ &= \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 2}\end{aligned}$$

και συνεπώς $B = 1$ και $C = 2$.

Πρόβλημα 4 (βιβλίο σελίδα 148)

- Αντικατάσταση τιμών στο ανάπτυγμα

Θέτουμε $s = 0$

$$X(0) = \frac{A}{2} + \frac{C}{2}$$

άρα

$$C = 2X(0) - A = 2\frac{6}{4} - 1 = 2$$

Όμοια, για $s=1$, έχουμε $X(1)=14/15$ και άρα $B=1$.

Πρόβλημα 4 (βιβλίο σελίδα 148)

Με βάση τις τιμές για τα A, B, C , μπορούμε να γράψουμε το ανάπτυγμα της $X(s)$

$$X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{s+2}{s^2+2s+2} = \frac{1}{s+2} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

Από την οποία έχουμε

$$x(t) = [e^{-2t} + e^{-t}(\cos t + \sin t)]u(t)$$

Επίλυση Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = g(t)$$

Αρχικές συνθήκες

$$y(0) = b_0, y^{(1)}(0) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = b_{n-1}$$

Βήματα Επίλυσης

1. Μετασχηματισμός Laplace
2. Λύνω ως προς $Y(s)$
3. Αντίστροφος Laplace της $Y(s)$

Παράδειγμα

$$\frac{d^3 y}{dt^3} - \frac{dy}{dt} = \sin t$$

Αρχικές συνθήκες

$$y(0^-) = 2, y^{(1)}(0^-) = 0, y^{(2)}(0^-) = 1$$

Βήματα Επίλυσης

1. Μετασχηματισμός Laplace

$$s^3 Y(s) - s^2 y(0^-) - s y^{(1)}(0^-) - y^{(2)}(0^-) - s Y(s) + y(0^-) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

2. Λύνω ως προς $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{2s^3 + s}{(s^2 + 1)(s^2 - 1)}$$

3. Αντίστροφος Laplace της $Y(s)$

Παράδειγμα

$$\frac{d^3 y}{dt^3} - \frac{dy}{dt} = \sin t$$

Αρχικές συνθήκες

$$y(0) = 2, y^{(1)}(0) = 0, y^{(2)}(0) = 1$$

Βήματα Επίλυσης

3. Αντίστροφος Laplace της $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{3}{4} \frac{1}{s-1} + \frac{3}{4} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+1}$$

Άρα:

$$y(t) = \left[\frac{3}{4} (e^t + e^{-t}) + \frac{1}{2} \cos t \right] u(t)$$

Μελέτη ΓΧΑ με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

Αρχικές συνθήκες: μηδενικές

Συντελεστές: πραγματικές σταθερές

Συνάρτηση Μεταφοράς (transfer function)

$$H(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της κρουστικής απόκρισης!!!!

Πρόβλημα 7 (βιβλίο σελίδα 151)

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y^{(2)}(t) + 2y^{(1)}(t) + 5y(t) = x(t)$$

σε κατάσταση ηρεμίας και με είσοδο

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi, t < 0 \end{cases}$$

$$y^{(2)}(t) + 2y^{(1)}(t) + 5y(t) = u(t) - u(t - \pi)$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0) + 2sY(s) - 2y(0) + 5Y(s) = \frac{1}{s} - e^{-\pi s} \frac{1}{s}$$

Πρόβλημα 7 (βιβλίο σελίδα 151)

$$s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0) + 2sY(s) - 2y(0) + 5Y(s) = \frac{1}{s} - e^{-\pi s} \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-\pi s}}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} + \frac{-e^{-\pi s}}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

Άρα,

$$y(t) = g(t)u(t) - g(t - \pi)u(t - \pi)$$

Όπου
$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} \right\} = g(t)u(t)$$

Πρόβλημα 7 (βιβλίο σελίδα 151)

Οι ρίζες του παρονομαστή:

$$\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

είναι $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1-2j$, $\lambda_3 = -1+2j$

Αρα,

$$\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{1}{5s} - \frac{1}{5} \frac{s}{(s+1)^2 + 2^2} = \frac{1}{5s} - \frac{1}{5} \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{1}{10} \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

Όποτε

$$y(t) = \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{5} e^{-t} \cos(2t) - \frac{1}{10} e^{-t} \sin(2t) \right] u(t) \\ - \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{5} e^{-t+\pi} \cos(2t) - \frac{1}{10} e^{-t+\pi} \sin(2t) \right] u(t - \pi)$$

Πρόβλημα 7 (βιβλίο σελίδα 151)

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: $Y(s) = H(s)X(s)$

Από την εξίσωση

$$y^{(2)}(t) + 2y^{(1)}(t) + 5y(t) = x(t)$$

Θα μπορούσαμε να βρούμε άμεσα την συνάρτηση μεταφοράς συστήματος ως

$$H(s) = \frac{b_ms^m + \dots + b_0}{a_ns^n + \dots + a_0} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Αρα

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$$

Πρόβλημα 7 (βιβλίο σελίδα 151)

Οπότε η έξοδος υπολογίζεται εύκολα από τη σχέση

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

Στην περίπτωση μας

$$X(s) = \frac{1}{s} - e^{-\pi s} \frac{1}{s}$$

Και με τον αντίστροφο Laplace βρίσκουμε το $y(t)$