

Σήματα και Συστήματα

Ασκήσεις Μετασχηματισμού Z

Πρόβλημα 1 (βιβλίο σελίδα 289)

Δίνεται το σήμα διακριτού χρόνου

$$x(n) = 2 \cos(0.1\pi n) + \cos(0.2\pi n)$$

Να υπολογιστεί η περίοδος του σήματος

Λύση:

Αν N η περίοδος, τότε θα πρέπει:

$$x(n) = x(n + N) = 2 \cos(0.1\pi n + 0.1\pi N) + \cos(0.2\pi n + 0.1\pi N)$$

Από την οποία προκύπτει ότι

$$0.1\pi N = 2\pi r, \quad r \in \mathbb{Z}$$

$$0.2\pi N = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Άρα η περίοδος είναι το $N = 20$.

Εναλλακτικά

- Η περίοδος του $2\cos(0.1\pi n)$ είναι $N1 = 20$
- Η περίοδος του $\cos(0.2\pi n)$ είναι $N2 = 10$

Η περίοδος του αθροίσματος περιοδικών σημάτων είναι το $\text{lcm}(N1, N2) = 20$.

Ισχύει για αθροίσματα περισσότερων των 2 σημάτων, $N = \text{lcm}(N1, N2, N3, \dots)$

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 290, 1/8)

Για το σύστημα που περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση εισόδου-εξόδου

$$y(n) = nx(n)$$

να εξεταστούν οι ιδιότητες (α) γραμμικότητας, (β) χρονικής μεταβλητότητας, (γ) ΦΕΦΕ ευστάθειας και (δ) αιτιότητας

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 290, 2/8)

Λύση:

(α) Είναι γραμμικό γιατί για $\forall a_1, a_2$ ισχύει

$$n[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n) = a_1y_1(n) + a_2y_2(n)$$

(β) Είναι χ.μ. γιατί

$$y'(n) \equiv nx(n - n_0) \neq (n - n_0)x(n - n_0) = y(n - n_0)$$

(γ) Δεν είναι ευσταθές γιατί για φραγμένη είσοδο η έξοδος τείνει στο άπειρο καθώς το $n \rightarrow \infty$.

(δ) Είναι αιτιατό, γιατί η έξοδος δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου.

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 290, 3/8)

Για το σύστημα που περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση εισόδου-εξόδου

$$y(n) = x^2(n)$$

να εξεταστούν οι ιδιότητες (α) γραμμικότητας, (β) χρονικής μεταβλητότητας, (γ) ΦΕΦΕ ευστάθειας και (δ) αιτιότητας

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 290, 4/8)

Λύση:

(α) Δεν είναι γραμμικό λόγω της τετραγωνικής εξάρτησης της εξόδου από την είσοδο.

(β) Είναι χ.α. γιατί

$$y'(n) \equiv x^2(n - n_0) = y(n - n_0)$$

(γ) Είναι ευσταθές, διότι για κάθε φραγμένη είσοδο η έξοδος παραμένει φραγμένη.

(δ) Είναι αιτιατό.

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 290, 5/8)

Για το σύστημα που περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση εισόδου-εξόδου

$$y(n) = \beta + \sum_{l=0}^5 x(n-l)$$

να εξεταστούν οι ιδιότητες (α) γραμμικότητας, (β) χρονικής μεταβλητότητας, (γ) ΦΕΦΕ ευστάθειας και (δ) αιτιότητας

Λύση:

(α) Δεν είναι γραμμικό διότι

$$\begin{aligned} y'(n) &\equiv \beta + \sum_{l=0}^5 [a_1 x_1(n-l) + a_2 x_2(n-l)] \\ &\neq a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 290, 6/8)

$$a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) \equiv (a_1 + a_2)\beta + \sum_{l=0}^5 [a_1 x_1(n-l) + a_2 x_2(n-l)]$$

Η αιτία της μη γραμμικότητας είναι η ύπαρξη του σταθερού όρου.

(β) Είναι χ.α. γιατί

$$y'(n) \equiv \beta + \sum_{l=0}^5 x(n - n_0 - l) = y(n - n_0)$$

(γ) Είναι ΦΕΦΕ ευσταθές διότι η έξοδος προκύπτει ως άθροισμα πεπερασμένου πλήθους όρων της εισόδου.

(δ) Είναι αιτιατό διότι η έξοδος εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα και τις προηγούμενες τιμές της εισόδου.

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 290, 7/8)

Για το σύστημα που περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση εισόδου-εξόδου

$$y(n) = \beta + \sum_{l=-5}^5 x(n-l)$$

να εξεταστούν οι ιδιότητες (α) γραμμικότητας, (β) χρονικής μεταβλητότητας, (γ) ΦΕΦΕ ευστάθειας και (δ) αιτιότητας

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 290, 8/8)

Λύση:

(α) Δεν είναι γραμμικό όπως είδαμε προηγουμένως.

(β) Είναι χ.α.

(γ) Είναι ΦΕΦΕ ευσταθές.

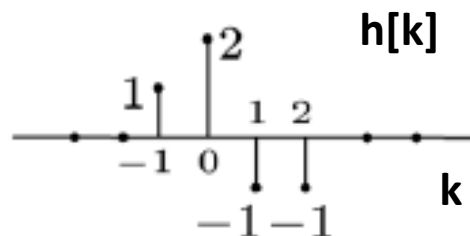
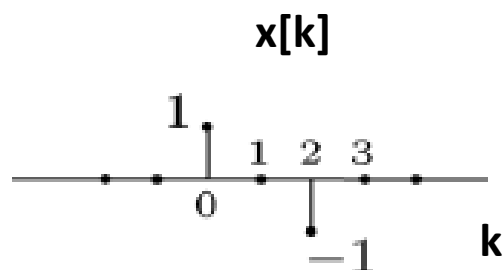
(δ) Δεν είναι αιτιατό διότι η έξοδος εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου.

Συστήματα Διακριτού Χρόνου

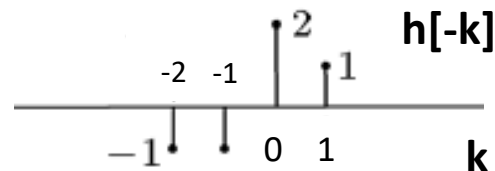
- Η συνέλιξη ορίζεται ως

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Παράδειγμα Συνέλιξης



$$\begin{aligned}
 y[n] &= 0 \quad \text{for } n < -1 \\
 y[-1] &= 1 \times 1 = 1 \\
 y[0] &= 0 \times 1 + 1 \times 2 = 2 \\
 y[1] &= (-1) \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times (-1) = -2 \\
 y[2] &= (-1) \times 2 + 0 \times (-1) + 1 \times (-1) = -3 \\
 y[3] &= (-1) \times (-1) + 0 \times (-1) = 1 \\
 y[4] &= (-1) \times (-1) = 1 \\
 y[n] &= 0 \quad \text{for } n > 4
 \end{aligned}$$



Πρόβλημα 4 (βιβλίο σελίδα 293)

Να αποδειχθεί ότι

όταν συνελίσσονται δύο ακολουθίες $x(n)$, $y(n)$ μήκους N και M , αντίστοιχα, το μήκος της προκύπτουσας ακολουθίας είναι $N + M - 1$.

Λύση:

Έστω

$$z(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} x(k)y(n-k)$$

Θα ερευνήσουμε το μήκος του διαστήματος (πόσα δηλαδή n) εκτός του οποίου το παραπάνω άθροισμα είναι μηδέν, ανεξάρτητα από τις τιμές των $x(n)$, $y(n)$.

Πρόβλημα 4 (βιβλίο σελίδα 293)

Αν προσπαθήσουμε να δούμε την συνέλιξη έχουμε:

$$\begin{array}{ccccccc} x(N-1) & x(N-2) & \cdots & x(1) & x(0) & & \\ & & & & & y(0) & y(1) \cdots y(M-2) & y(M-1) \\ x(N-1) & x(N-2) & \cdots & x(1) & x(0) & & \\ & & & & & y(0) & y(1) \cdots y(M-2) & y(M-1) \end{array}$$

Το διάστημα αυτό καθορίζεται από τα n εκείνα για τα οποία

$$0 \leq n - k \leq N - 1$$

Πρόβλημα 4 (βιβλίο σελίδα 293)

Η μικρότερη τιμή του n είναι το μηδέν και για αυτή την περίπτωση στο παραπάνω άθροισμα συνεισφέρει μόνο ο όρος $x(0)y(0)$, ενώ όλοι οι άλλοι είναι μηδέν.

Όταν $n = 1$, συνεισφέρουν δύο όροι κ.ο.κ..

Η μεγαλύτερη τιμή του n , για την οποία υπάρχουν μη μηδενικοί όροι (στη γενική περίπτωση) στο συνελικτικό άθροισμα, ισούται με $n = N + M - 2$.

Για την περίπτωση αυτή υπάρχει ένας όρος που συνεισφέρει και είναι ο $x(M - 1)y(n - 1)$.

Για μεγαλύτερα n τα γινόμενα στη συνέλιξη δεν θα έχουν κοινούς μη μηδενικούς όρους.

Άρα το μήκος της συνέλιξης είναι $N + M - 1$.

Πρόβλημα 4 (βιβλίο σελίδα 293)

Ένας άλλος τρόπος να δούμε το ίδιο πράγμα είναι να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι οι όροι μιας ακολουθίας $x(n)$ πεπερασμένου μήκους N είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου βαθμού $N - 1$ που δίνεται από το MZ της, $X(z)$.

Από την ιδιότητα της συνέλιξης στο χρόνο, γνωρίζουμε ότι $Z(z) = X(z)Y(z)$.

Το $Z(z)$ είναι το γινόμενο ενός πολυωνύμου βαθμού $N - 1$ με ένα πολυώνυμο βαθμού $M - 1$, άρα έχει βαθμό $N + M - 2$, δηλαδή $N + M - 1$ όρους.

Πρόβλημα 5 (βιβλίο σελίδα 294)

Να υπολογιστεί ο ΜΖ της ακολουθίας

$x(n) = a^{|n|}$, $a > 0$. Να εξεταστούν οι περιπτώσεις $a < 1$ και $a > 1$.

Λύση:

Η ακολουθία $x(n)$ γράφεται

$$x(n) = a^n u(n) + a^{-n} u(-n - 1)$$

Με τη βοήθεια του Πίνακα 5.1 έχουμε ότι

$$a^n u(n) \longleftrightarrow \frac{z}{z - a} \quad |z| > a$$

$$a^{-n} u(-n - 1) \longleftrightarrow -\frac{z}{z - \frac{1}{a}} \quad |z| < \frac{1}{a}$$

Πρόβλημα 5 (βιβλίο σελίδα 294)

Εάν $a < 1$, τότε υπάρχει επικάλυψη μεταξύ των επιμέρους ΠΣ και ο ΜΖ είναι

$$X(z) = \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-\frac{1}{a}} = \frac{a^2-1}{a} \frac{z}{(z-a)(z-\frac{1}{a})}, \quad a < |z| < \frac{1}{a}$$

Εάν $a > 1$, τότε οι επιμέρους ΠΣ δεν έχουν κοινή περιοχή και συνεπώς η $x(n)$ δεν έχει ΜΖ.

Υπολογισμός Αντίστροφου Μετασχηματισμός Z για ρητές $X(z)$

1. Υπολογισμός με ολοκληρωτικά υπόλοιπα
2. Υπολογισμός με ανάπτυξη σε Δυναμοσειρά
3. Υπολογισμός με ανάπτυξη σε απλά κλάσματα

Υπολογισμός με ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}, |z| > 1$$

Λύση:

$$X(z)z^{n-1} = \frac{z^{2+n-1}}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}, |z| > 1$$

$$1) n \geq 0, x[n] = \frac{z^{2+n-1}}{(z-\frac{1}{2})} \Big|_{z=1} + \frac{z^{2+n-1}}{(z-1)} \Big|_{z=1/2} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Υπολογισμός με ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}, |z| > 1$$

Λύση:

$$X(z)z^{n-1} = \frac{z^{2+n-1}}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}, |z| > 1$$

$$2) n < 0, x[n] = 0$$

Άρα

$$x[n] = \left(2 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) u(n)$$

Πρόβλημα 6 (βιβλίο σελίδα 294)

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ΜΖ της

$$X(z) = \ln \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right), \quad |z| > |a|$$

Λύση: Η ανάπτυξη σε δυναμοσειρά της συνάρτησης $\ln(1 - x)$ είναι

$$\ln(1 - x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \quad |x| < 1$$

Άρα

$$X(z) = \ln \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right) = - \ln(1 - az^{-1}), \quad |z| > |a|$$

Εφόσον $|z| > |a|$, θα ισχύει ότι $|az^{-1}| < 1$

Πρόβλημα 6 (βιβλίο σελίδα 294)

Συνεπώς η $X(z)$ γράφεται ως

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (az^{-1})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a^n z^{-n}$$

από όπου φαίνεται ότι

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{n} a^n, & n \geq 1 \\ 0, & n \leq 0 \end{cases}$$

ή ισοδύναμα

$$x(n) = \frac{1}{n} a^n u(n-1)$$

Πρόβλημα 7 (βιβλίο σελίδα 295)

Να βρεθεί ο αντίστροφος ΜΖ της συνάρτησης

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}, \quad |z| > 2$$

Λύση:

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της ανάπτυξης σε απλά κλάσματα.

Είναι

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{B_1}{z-2} + \frac{B_2}{(z-2)^2}$$

όπου

$$A_1 = (z-1) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=1} = 1$$

$$B_2 = (z-2)^2 \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=2} = 1$$

Πρόβλημα 7 (βιβλίο σελίδα 295)

Άρα

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)^2} = \frac{1}{z-1} + \frac{B_1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2}$$

Με εξίσωση των ομοβάθμιων όρων των αριθμητών βρίσκουμε ότι $B_1 = -1$. Τελικά:

$$X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-2} + \frac{z}{(z-2)^2}, \quad |z| > 2$$

Εφόσον η ΠΣ είναι $|z| > 2$, η ακολουθία $x(n)$ είναι αιτιατή κι εύκολα βρίσκουμε ότι ισούται με

$$x(n) = (1 - 2^n + n2^{n-1})u(n)$$

Πρόβλημα 8 (βιβλίο σελίδα 296)

Εάν η είσοδος $x(n)$ και η κρουστική απόκριση $h(n)$ ενός ΓΧΑ συστήματος είναι

$x(n) = u(n)$ και $h(n) = a^n u(n)$, αντίστοιχα, με $0 < a < 1$, να υπολογιστεί η έξοδος $y(n)$ του συστήματος.

Λύση:

Έχουμε ότι

$$X(z) = \frac{z}{z-1} \quad |z| > 1$$

$$H(z) = \frac{z}{z-a} \quad |z| > a$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης για το ΜΖ έχουμε ότι

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-a)} \quad |z| > 1$$

Πρόβλημα 8 (βιβλίο σελίδα 296)

Με ανάλυση σε απλά κλάσματα παίρνουμε

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-a)} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-a}$$

όπου

$$A_1 = (z-1) \frac{Y(z)}{z} \Big|_{z=1} = \frac{1}{1-a}$$

$$A_2 = (z-a) \frac{Y(z)}{z} \Big|_{z=a} = -\frac{a}{1-a}$$

Άρα

$$Y(z) = \frac{1}{1-a} \frac{z}{z-1} - \frac{a}{1-a} \frac{z}{z-a} \quad |z| > 1$$

και

$$y(n) = \frac{1}{1-a} u(n) - \frac{a}{1-a} a^n u(n) = \left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a} \right) u(n)$$

Πρόβλημα 9 (βιβλίο σελίδα 296)

Η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος

με είσοδο τη $x(n) = u(n)$ είναι $y(n) = 2(\frac{1}{3})^n u(n)$. Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.

Λύση:

Οι ΜΖ των ακολουθιών εισόδου και εξόδου είναι

$$X(z) = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

$$Y(z) = \frac{2z}{z - \frac{1}{3}}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

Συνεπώς η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2(z-1)}{z - \frac{1}{3}}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

Πρόβλημα 9 (βιβλίο σελίδα 296)

Με ανάλυση σε απλά κλάσματα έχουμε

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{2(z-1)}{z(z-\frac{1}{3})} = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z-\frac{1}{3}}$$

όπου με το γνωστό τρόπο βρίσκουμε ότι $A_1 = 6$ και $A_2 = -4$. Άρα

$$H(z) = 6 - 4 \frac{z}{z - \frac{1}{3}}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

και τελικά

$$h(n) = 6\delta(n) - 4 \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Πρόβλημα 10 (βιβλίο σελίδα 297)

Δίνεται ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου το οποίο περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση διαφορών

$$3y(n) - 4y(n-1) + y(n-2) = x(n)$$

όπου $x(n] = (\frac{1}{2})^n$ είναι η είσοδος και οι αρχικές τιμές για την έξοδο είναι $y(-1) = 1$ και $y(-2) = 2$. Να υπολογιστεί η $y(n)$.

Λύση:

Ο αμφίπλευρος ΜΖ της εισόδου είναι

$$X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Πρόβλημα 10 (βιβλίο σελίδα 297)

Παίρνοντας στη συνέχεια το μονόπλευρο MZ και των δύο πλευρών της εξίσωσης διαφορών έχουμε

$$3Y(z) - 4[z^{-1}Y(z) + y(-1)] + [z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)] = X(z)$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση τη $X(z)$ και τις αρχικές συνθήκες και κάνοντας τις πράξεις παίρνουμε

$$Y(z) = \frac{z(3z^2 - 2z + \frac{1}{2})}{3(z-1)(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})}$$

Ανάλυση της $Y(z)$ σε απλά κλάσματα δίνει

$$Y(z) = \frac{3}{2} \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

Συνεπώς

$$y(n) = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad n \geq -2$$

Παράδειγμα 5.13 (σελ. 267)

Δίνεται το σύστημα

$$y(n) - \frac{5}{6}y(n-1) + \frac{1}{6}y(n-2) = x(n-2)$$

Αν είσοδος είναι η βηματική ακολουθία και αρχικές συνθήκες $y(-1) = y(-2) = 1$, να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος

Παράδειγμα 5.13 (σελ. 267)

Εφαρμόζω τον μονόπλευρο Z και τις αρχικές συνθήκες:

$$y(n) - \frac{5}{6}y(n-1) + \frac{1}{6}y(n-2) = x(n-2)$$

$$y(-1) = y(-2) = 1,$$

$$Y(z) \left(1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2} \right) - \frac{5}{6}(zz^{-1}) + \frac{1}{6}z^{-2}(z + z^2) = z^{-2}X(z)$$

Παράδειγμα 5.13 (σελ. 267)

Λυνω ως προς $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)} X(z) - \frac{1}{6} \frac{z(1 - 4z)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)}$$

Και προφανώς, η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από

$$H(z) = \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)}$$

Θα μπορούσε να γραφτεί η έξοδος ως $y(n) = y_0(n) + y_i(n)$

όπου, $y_0(n)$ είναι το τμήμα της εξόδου που οφείλεται στην είσοδο $x(n)$ (λέγεται και απόκριση μηδενικής κατάστασης) και $y_i(n)$ είναι το τμήμα της εξόδου που οφείλεται στις αρχικές συνθήκες (λέγεται και απόκριση μηδενικής εισόδου)

Παράδειγμα 5.13 (σελ. 267)

Για είσοδο $u(n)$ θα έπαιρνα:

$$y_o(n) = 3u(n-1) + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u(n-1) - 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)$$

ενώ η zero input response δίνεται από:

$$y_i(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

και δεν εξαρτάται από την είσοδο