

Σήματα και Συστήματα

Βασίλειος Δαλάκας & Παναγιώτης Ριζομυλιώτης

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεματικής
Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο

Πρόβλημα 1 (βιβλίο σελίδα 27)

Να υπολογιστεί η βασική περίοδος για καθένα από τα παρακάτω περιοδικά σήματα

α) $x_1(t) = e^{j0.25\pi t}$

β) $x_2(t) = \cos(0.2\pi t)$

γ) $x_3(t) = 2 \cos(0.1\pi t) + 2 \sin(0.2\pi t)$

Πρόβλημα 1 (βιβλίο σελίδα 27)

Να υπολογιστεί η βασική περίοδος για καθένα από τα παρακάτω περιοδικά σήματα

α) $x_1(t) = e^{j0.25\pi t}$

β) $x_2(t) = \cos(0.2\pi t)$

γ) $x_3(t) = 2 \cos(0.1\pi t) + 2 \sin(0.2\pi t)$

Λύση:

α) Είναι $x_1(t) = e^{j\frac{2\pi}{8}t}$ άρα η βασική περίοδος δίνεται από την σχέση $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ και είναι $T = 8$.

Πρόβλημα 1 (βιβλίο σελίδα 27)

Να υπολογιστεί η βασική περίοδος για καθένα από τα παρακάτω περιοδικά σήματα

α) $x_1(t) = e^{j0.25\pi t}$

β) $x_2(t) = \cos(0.2\pi t)$

γ) $x_3(t) = 2 \cos(0.1\pi t) + 2 \sin(0.2\pi t)$

Λύση:

α) Είναι $x_1(t) = e^{j\frac{2\pi}{8}t}$ άρα η βασική περίοδος δίνεται από την σχέση $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ και είναι $T = 8$.

β) Είναι $x_2(t) = \cos(0.2\pi t) = \cos(\frac{2\pi}{10}t)$ άρα η βασική του περίοδος είναι $T = 10$.

Πρόβλημα 1 (βιβλίο σελίδα 27)

γ) Το σήμα $x_3(t)$ είναι άθροισμα 2 άλλων σημάτων για τα οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

Πρόβλημα 1 (βιβλίο σελίδα 27)

γ) Το σήμα $x_3(t)$ είναι άθροισμα 2 άλλων σημάτων για τα οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

Έχουμε βασική περίοδο $T_1 = 20$ για το

$$2 \cos(0.1\pi t) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{20}t\right)$$

Πρόβλημα 1 (βιβλίο σελίδα 27)

γ) Το σήμα $x_3(t)$ είναι άθροισμα 2 άλλων σημάτων για τα οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

Έχουμε βασική περίοδο $T_1 = 20$ για το

$$2 \cos(0.1\pi t) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{20}t\right)$$

ενώ η βασική περίοδος για το $2 \sin(0.2\pi t) = 2 \sin\left(\frac{2\pi}{10}t\right)$ είναι $T_2 = 10$.
Επειδή $T_1 = k \cdot T_2$, $k \in \mathbb{Z}^*$ η βασική περίοδος του $x_3(t)$ είναι ίση με **20**.

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 28)

Για καθένα από τα παρακάτω συστήματα:

α)

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x(t) + x(t - 100), & t \geq 0 \end{cases}$$

β)

$$y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t - 100), & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

απαντήστε αν είναι:

- Στατικό ή δυναμικό

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 28)

Για καθένα από τα παρακάτω συστήματα:

α)

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x(t) + x(t - 100), & t \geq 0 \end{cases}$$

β)

$$y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t - 100), & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

απαντήστε αν είναι:

- Στατικό ή δυναμικό

Λύση:

Η έξοδος και των δύο συστημάτων την χρονική στιγμή t εξαρτάται και από τιμές της εισόδου σε χρονικές στιγμές διάφορες του t και για αυτό είναι **δυναμικά**.

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 28)

Για καθένα από τα παρακάτω συστήματα:

α)

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x(t) + x(t - 100), & t \geq 0 \end{cases}$$

β)

$$y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t - 100), & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

απαντήστε αν είναι:

- Χρονικά αμετάβλητο ή μεταβαλλόμενο

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 28)

Για καθένα από τα παρακάτω συστήματα:

α)

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x(t) + x(t - 100), & t \geq 0 \end{cases}$$

β)

$$y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t - 100), & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

απαντήστε αν είναι:

- Χρονικά αμετάβλητο ή μεταβαλλόμενο

Λύση:

Το (α) είναι χρονικά **μεταβαλλόμενο** ενώ το (β) **αμετάβλητο**.

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 28)

Λύση :

(α) Αν η είσοδος του συστήματος είναι $x(t - t_0)$ το σήμα εξόδου είναι
 $\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} \neq y(t - t_0)$

$$y(t') = \begin{cases} 0, & t - t_0 < 0 \rightarrow t < t_0 \\ x(t - t_0) + x(t - t_0 - 100), & t - t_0 \geq 0 \rightarrow t \geq t_0 \end{cases}$$

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 28)

Λύση :

(α) Αν η είσοδος του συστήματος είναι $x(t - t_0)$ το σήμα εξόδου είναι
 $\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} \neq y(t - t_0)$

$$y(t') = \begin{cases} 0, & t - t_0 < 0 \rightarrow t < t_0 \\ x(t - t_0) + x(t - t_0 - 100), & t - t_0 \geq 0 \rightarrow t \geq t_0 \end{cases}$$

Ενώ για το (β) έχουμε $\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = y(t - t_0)$

$$y(t') = \begin{cases} 0, & x(t - t_0) < 0 \\ x(t - t_0) + x(t - t_0 - 100), & x(t - t_0) \geq 0 \end{cases}$$

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 28)

Για καθένα από τα παρακάτω συστήματα:

α)

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x(t) + x(t - 100), & t \geq 0 \end{cases}$$

β)

$$y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t - 100), & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

απαντήστε αν είναι:

- Γραμμικό ή μη γραμμικό

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 28)

Για καθένα από τα παρακάτω συστήματα:

α)

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x(t) + x(t - 100), & t \geq 0 \end{cases}$$

β)

$$y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t - 100), & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

απαντήστε αν είναι:

- Γραμμικό ή μη γραμμικό

Λύση:

Το (α) είναι **γραμμικό** ενώ το (β) **μη γραμμικό**.

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 28)

Λύση : (α) Αν έχουμε δύο σήματα εισόδου $x_1(t)$, $x_2(t)$ για την περίπτωση $t \geq 0$ η έξοδος είναι

$$y_1(t) = \mathcal{F}\{x_1(t)\} = x_1(t) + x_1(t - 100)$$

$$y_2(t) = \mathcal{F}\{x_2(t)\} = x_2(t) + x_2(t - 100)$$

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 28)

Λύση : (α) Αν έχουμε δύο σήματα εισόδου $x_1(t)$, $x_2(t)$ για την περίπτωση $t \geq 0$ η έξοδος είναι

$$y_1(t) = \mathcal{F}\{x_1(t)\} = x_1(t) + x_1(t - 100)$$

$$y_2(t) = \mathcal{F}\{x_2(t)\} = x_2(t) + x_2(t - 100)$$

Αν η είσοδος είναι ο γραμμικός συνδυασμός $ax_1(t) + bx_2(t)$, τότε η έξοδος είναι

$$y(t) = \mathcal{F}\{ax_1(t) + bx_2(t)\}$$

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 28)

Λύση : (α) Αν έχουμε δύο σήματα εισόδου $x_1(t)$, $x_2(t)$ για την περίπτωση $t \geq 0$ η έξοδος είναι

$$y_1(t) = \mathcal{F}\{x_1(t)\} = x_1(t) + x_1(t - 100)$$

$$y_2(t) = \mathcal{F}\{x_2(t)\} = x_2(t) + x_2(t - 100)$$

Αν η είσοδος είναι ο γραμμικός συνδυασμός $ax_1(t) + bx_2(t)$, τότε η έξοδος είναι

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{F}\{ax_1(t) + bx_2(t)\} \\ &= ax_1(t) + bx_2(t) + ax_1(t - 100) + bx_2(t - 100) \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 28)

Λύση : (α) Αν έχουμε δύο σήματα εισόδου $x_1(t)$, $x_2(t)$ για την περίπτωση $t \geq 0$ η έξοδος είναι

$$y_1(t) = \mathcal{F}\{x_1(t)\} = x_1(t) + x_1(t - 100)$$

$$y_2(t) = \mathcal{F}\{x_2(t)\} = x_2(t) + x_2(t - 100)$$

Αν η είσοδος είναι ο γραμμικός συνδυασμός $ax_1(t) + bx_2(t)$, τότε η έξοδος είναι

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{F}\{ax_1(t) + bx_2(t)\} \\ &= ax_1(t) + bx_2(t) + ax_1(t - 100) + bx_2(t - 100) \\ &= a[x_1(t) + x_1(t - 100)] + b[x_2(t) + x_2(t - 100)] \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 28)

Λύση : (α) Αν έχουμε δύο σήματα εισόδου $x_1(t)$, $x_2(t)$ για την περίπτωση $t \geq 0$ η έξοδος είναι

$$y_1(t) = \mathcal{F}\{x_1(t)\} = x_1(t) + x_1(t - 100)$$

$$y_2(t) = \mathcal{F}\{x_2(t)\} = x_2(t) + x_2(t - 100)$$

Αν η είσοδος είναι ο γραμμικός συνδυασμός $ax_1(t) + bx_2(t)$, τότε η έξοδος είναι

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{F}\{ax_1(t) + bx_2(t)\} \\ &= ax_1(t) + bx_2(t) + ax_1(t - 100) + bx_2(t - 100) \\ &= a[x_1(t) + x_1(t - 100)] + b[x_2(t) + x_2(t - 100)] \\ &= ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 28)

Εφόσον η απόκριση του συστήματος σε μία είσοδο, που είναι ο γραμμικός συνδυασμός των δύο σημάτων, είναι ίση με το γραμμικό συνδυασμό των αντίστοιχων αποκρίσεων του συστήματος στα σήματα αυτά το σύστημα είναι γραμμικό.

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 28)

Για καθένα από τα παρακάτω συστήματα:

α)

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x(t) + x(t - 100), & t \geq 0 \end{cases}$$

β)

$$y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t - 100), & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

απαντήστε αν είναι:

- Αιτιατό ή μη αιτιατό

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 28)

Για καθένα από τα παρακάτω συστήματα:

α)

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x(t) + x(t - 100), & t \geq 0 \end{cases}$$

β)

$$y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t - 100), & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

απαντήστε αν είναι:

- Αιτιατό ή μη αιτιατό

Λύση:

Η έξοδος και των δύο συστημάτων εξαρτάται από την παρούσα και τις προηγούμενες τιμές του σήματος εισόδου άρα είναι **αιτιατά**.

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 28)

Για καθένα από τα παρακάτω συστήματα:

α)

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x(t) + x(t - 100), & t \geq 0 \end{cases}$$

β)

$$y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t - 100), & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

απαντήστε αν είναι:

- Ευσταθές ή ασταθές τύπου ΦΕΦΕ

Πρόβλημα 2 (βιβλίο σελίδα 28)

Για καθένα από τα παρακάτω συστήματα:

α)

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x(t) + x(t - 100), & t \geq 0 \end{cases}$$

β)

$$y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t - 100), & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

απαντήστε αν είναι:

- Ευσταθές ή ασταθές τύπου ΦΕΦΕ

Λύση:

Τα δύο συστήματα είναι **ευσταθή** τύπου ΦΕΦΕ.

Πρόβλημα 3 (βιβλίο σελίδα 28)

Να δείξετε ότι η σύνδεση σε σειρά δύο ευσταθών συστημάτων τύπου ΦΕΦΕ είναι σύστημα ευσταθές τύπου ΦΕΦΕ.

Λύση:

Εφόσον ένα σύστημα $\mathcal{F}(\cdot)$ είναι ευσταθές, η έξοδός του y θα είναι φραγμένη για φραγμένη είσοδο x . Αν η φραγμένη αυτή έξοδος χρησιμοποιηθεί ως είσοδος σε ένα άλλο ευσταθές σύστημα $\mathcal{G}(\cdot)$, τότε και η έξοδος του τελευταίου z θα είναι φραγμένη και συνεπώς το συνολικό σύστημα $\mathcal{G}[\mathcal{F}(\cdot)]$ θα είναι ευσταθές.

Πρόβλημα 4 (βιβλίο σελίδα 29)

Θεωρήστε ένα χρονικά αμετάβλητο σύστημα $\mathcal{F}(\cdot)$ με είσοδο $x(t)$ και έξοδο $y(t)$. Δείξτε ότι εάν το $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο T , το ίδιο ισχύει και για το $y(t)$.

Πρόβλημα 4 (βιβλίο σελίδα 29)

Θεωρήστε ένα χρονικά αμετάβλητο σύστημα $\mathcal{F}(\cdot)$ με είσοδο $x(t)$ και έξοδο $y(t)$. Δείξτε ότι εάν το $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο T , το ίδιο ισχύει και για το $y(t)$.

Λύση:

Από την εκφώνηση προκύπτει ότι $y(t) = \mathcal{F}[x(t)]$. Επειδή το σύστημα είναι και χρονικά αμετάβλητο μπορούμε να γράψουμε

$$y(t + T) = \mathcal{F}[x(t + T)] = \mathcal{F}[x(t)] = y(t)$$

άρα η έξοδος είναι περιοδική.

Πρόβλημα 4 (βιβλίο σελίδα 29)

Δώστε ένα παράδειγμα γραμμικού χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος και μιας περιοδικής εισόδου στο σύστημα αυτό για την οποία η αντίστοιχη έξοδος δεν είναι περιοδική.

Πρόβλημα 4 (βιβλίο σελίδα 29)

Δώστε ένα παράδειγμα γραμμικού χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος και μιας περιοδικής εισόδου στο σύστημα αυτό για την οποία η αντίστοιχη έξοδος δεν είναι περιοδική.

Λύση:

Έστω η περιοδική είσοδος $x(t) = \cos(2\pi t)$. Αν το σύστημά μας ορίζεται από την σχέση $y(t) = \mathcal{G}[x(t)] \equiv x(t^2)$ τότε η έξοδος δεν είναι περιοδική:

$$\cos(2\pi t^2) \neq \cos[2\pi(t+T)^2] = \cos[2\pi t^2 + 4\pi tT + 2\pi T^2]$$

αφού η ποσότητα $2Tt + T^2 \notin \mathbb{Z}$, $\forall t$.