

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

1. Γραμμικότητα

Αν $x_i(t) \xleftrightarrow{F} X_i(\omega)$ και c_i αυθαίρετη (πραγματική ή μιγαδική) σταθερά και $i = 1, 2, \dots, n$, τότε ισχύει:

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t) \xleftrightarrow{F} c_1 X_1(\omega) + c_2 X_2(\omega) + \dots + c_n X_n(\omega)$$

2. Ολίσθηση στο Χρόνο

Αν $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό t_0 ισχύει:

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\varphi(\omega) - \omega t_0}$$

3. Ολίσθηση στη Συχνότητα

Αν $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό ω_0 ισχύει:

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega - \omega_0)$$

4. Αλλαγή Κλίμακας στο Χρόνο

Αν $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$ τότε για κάθε πραγματικό αριθμό a ($a \neq 0$), ισχύει:

$$x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

5. Αλλαγή Κλίμακας στη Συχνότητα

Αν $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό a ($a \neq 0$), ισχύει:

$$\frac{1}{|a|} x\left(\frac{t}{a}\right) \xleftrightarrow{F} X(a\omega)$$

8. Συμμετρία (δυϊσμός)

Αν $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$ τότε το σήμα $y(t) = X(t)$ έχει MF: $Y(\omega) = 2\pi x(-\omega)$

9. Παραγωγήιση

Αν $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$ και ο MF της παραγώγου $d^n x(t)/dt^n$ υπάρχει, τότε αυτός υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(\omega)$$

ή γενικότερα:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{F} (j\omega)^n X(\omega)$$

και για το πεδίο συχνοτήτων:

$$(-jt)^k x(t) \xleftrightarrow{F} \frac{d^k X(\omega)}{d\omega^k}$$

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

1. Γραμμικότητα

Εάν $x_1(t) \xrightarrow{L} X_1(s)$ με περιοχή σύγκλισης (ΠΣ) R_1 και $x_2(t) \xrightarrow{L} X_2(s)$ με ΠΣ R_2 τότε για κάθε a_1, a_2 ισχύει:

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \xrightarrow{L} a_1 X_1(s) + a_2 X_2(s) \quad \text{με ΠΣ } R_1 \cap R_2$$

2. Ολίσθηση στον χρόνο

Εάν $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R τότε για κάθε t_0 ισχύει:

$$x(t - t_0) \xrightarrow{L} e^{-st_0} X(s) \quad \text{με την ίδια ΠΣ } R$$

3. Ολίσθηση στη μιγαδική συχνότητα

Εάν $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R , τότε για κάθε s_0 ισχύει:

$$x(t) e^{s_0 t} \xrightarrow{L} X(s - s_0) \quad \text{με ΠΣ } R + \operatorname{Re}\{s_0\}$$

4. Κλιμάκωση στο χρόνο και στη μιγαδική συχνότητα

Εάν $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R , τότε για κάθε $b > 0$ ισχύει:

$$x(bt) \xrightarrow{L} \frac{1}{|b|} X\left(\frac{s}{b}\right) \quad \text{με ΠΣ } R/b$$

6. Μετασχηματισμός Laplace παραγώγου

Εάν $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ με $\Pi\Sigma R$, τότε:

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{L} sX(s) - x(0^-) \text{ με την ίδια } \Pi\Sigma R$$

$$\blacksquare \frac{d^2x(t)}{dt^2} \leftrightarrow s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\blacksquare \frac{d^nx(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}\dot{x}(0) - \dots - \\ -sx^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0)$$

7. Μετασχηματισμός Laplace ολοκληρώματος

Εάν $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ τότε:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{L} \frac{1}{s}X(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau \quad \text{με } \Pi\Sigma R \cap \{Re\{s\} > 0\}$$

8. Παραγωγή στη μιγαδική συχνότητα

Εάν $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ με $\Pi\Sigma R$, τότε:

$$-t x(t) \xrightarrow{L} \frac{dX(s)}{ds} \quad \text{με } \Pi\Sigma R$$

Επεκτείνοντας σε πολλαπλή παράγωγο, έχουμε:

$$(-t)^n x(t) \xrightarrow{L} \frac{d^n X(s)}{ds^n} \quad \text{με } \Pi\Sigma R$$

9. Ολοκλήρωση στη μιγαδική συχνότητα

Εάν $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ τότε:

$$\frac{1}{t} x(t) \xrightarrow{L} \int_0^\infty X(u) du \quad \text{με } \Pi\Sigma R$$

Θεώρημα Αρχικής Τιμής

Έστω το αιτιατό σήμα $x(t)$, το οποίο δεν περιέχει κρουστικές συναρτήσεις στο $t = 0$, με ML τη συνάρτηση $X(s)$ και περιοχή σύγκλισης $\text{Re}\{s\} > s_0$. Τότε ισχύει:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s X(s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = x(0)$$

Θεώρημα Τελική Τιμής

Έστω το αιτιατό σήμα $x(t)$ το οποίο έχει πεπερασμένη τιμή στο όριο $t \rightarrow \infty$, τότε ισχύει:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s X(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x(\infty)$$