

Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα



Σημειώσεις Παραδόσεων

Θωμάς Καμαλάκης

Επίκουρος Καθηγητής

Χαροκοπείου Πανεπιστημίου

Αθήνα, 2013

Το μάθημα Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα διδάσκεται στο 3ο εξάμηνο του προπτυχιακού κύκλου σπουδών του Τμήματος Πληροφορικής και Τηλεματικής του Χαροκοπείου Πανεπιστημίου Αθηνών. Έχει ως κύριο σκοπό την εξοικείωση με βασικές έννοιες των σύγχρονων ψηφιακών τηλεπικοινωνιακών συστημάτων. Υπάρχουν πολλά και καλά βιβλία πάνω στο θέμα αυτό και οι σημειώσεις αυτές έχουν αποστολή να εστιάσουν σε συγκεκριμένα αντικείμενα που καλύπτονται λίγο συνοπτικά στα βιβλία. Η λογική είναι να πάρουμε χεράκι-χεράκι τον φοιτητή και να του εξηγήσουμε πως προκύπτουν ορισμένα σημαντικά αποτελέσματα στη θεωρία των τηλεπικοινωνιακών συστημάτων ενώ παράλληλα να προσφέρουν μερικά παραδείγματα στο πως εφαρμόζονται τα αποτελέσματα στον σχεδιασμό συστημάτων. Έχουν προκύψει μετά απο αρκετή συζήτηση με τους φοιτητές του έτους 2012-2013 τους οποίους και ευχαριστώ, οι οποίοι είχαν την καλοσύνη να μου εξηγήσουν τους βασικούς τους προβληματισμούς σχετικά με το μάθημα και τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν τόσο κατά την διάρκεια του εξαμήνου όσο και στις τελικές εξετάσεις.

Το πόσο δύσκολο είναι ένα μάθημα εξαρτάται φυσικά από τον διδάσκοντα αλλά και από τον τρόπο διαβάσματος. Ο κλασικός τρόπος διαβάσματος στο μάθημα αυτό αλλά και σε παρόμοια τηλεπικοινωνιακά μαθήματα είναι απλός: χαρτί και μολύβι. Δηλαδή προσπαθούμε να ακολουθήσουμε την λογική του βιβλίου ή των σημειώσεων βήμα-βήμα, σχέση-σχέση στο χαρτί μας και όποιο βήμα δεν καταλαβαίνουμε προσπαθούμε να το εξιχνιάσουμε μόνοι μας. Π.χ. εάν δεν καταλαβαίνουμε κάποιο πως προκύπτει κάποιο ολοκλήρωμα το αναζητούμε στο διαδίκτυο. Μάλιστα για την συγκεκριμένη περίπτωση υπάρχουν στο διαδίκτυο και υπολογιστές ολοκληρωμάτων, δείτε για παράδειγμα το <http://integrals.wolfram.com/index.jsp>. Οι πιο μερακλήδες και λάτρεις του προγραμματισμού έχουν τη δυνατότητα να υλοποιήσουν στον υπολογιστή πολλά από όσα αναφέρονται στο κείμενο όπως για παράδειγμα ο αριθμητικός υπολογισμός της πιθανότητας σφάλματος στο PSK που αναλύεται στο κεφάλαιο 3. Το GNU-OCTAVE (<http://www.gnu.org/software/octave/>), ενδύκνεται ιδιαίτερα για τέτοιες υλοποιήσεις αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και οποιαδήποτε γλώσσα προγραμματισμού όπως η C. Στο e-class του μαθήματος σκοπεύω να ανεβάσω σύντομα τέτοια παραδείγματα. Θα πρέπει επίσης να δώσετε προσοχή στα παραδείγματα των σημειώσεων, σε πολλές περιπτώσεις περιέχουν και χρήσιμα συμπεράσματα για την ίδια τη θεωρία.

Ελπίζω οι σημειώσεις να σας βοηθήσουν... όσο βοήθησαν και εμένα να καταλάβω πολλά θέματα στα τηλεπικοινωνιακά συστήματα που δεν μου ήτανε τόσο ξεκάθαρα. Αν βρείτε λάθη (που σίγουρα υπάρχουν!) παρακαλώ ενημερώστε με, είτε στο μάθημα είτε ηλεκτρονικά.

Θωμάς Καμαλάκης (κάπου στον Αργοσαρωνικό, Αυγ. 2013).



1.	Πηγές Πληροφορίας	5
1.1	Εισαγωγικά	5
1.2	Η ερμηνεία της εντροπίας	6
1.3	Θεώρημα κωδικοποίησης της πηγής και αλγόριθμοι κωδικοποίησης	9
1.4	Πηγές με μνήμη	11
1.5	Κατά συνθήκη εντροπία	14
1.6	Το θεώρημα κωδικοποίησης του καναλιού	17
1.7	Η πρώτη μας γνωριμία με το θόρυβο	20
1.8	Συμπεράσματα	25
2.	Μετατροπή από αναλογικό σε ψηφιακό	26
2.1	Εισαγωγικά	26
2.2	Δειγματοληψία	27
2.3	Κβάντιση	34
2.4	Κωδικοποίηση κυματομορφής.	42
3.	Η Επίδραση του Λευκού Προσθετικού Θορύβου.	47
3.1	Εισαγωγικά	47
3.2	Τα σήματα ως διανύσματα	47
3.3	Περισσότερα bits παρακαλώ!	52
3.4	Θόρυβος, αυτός ο άγνωστος.	56
3.5	Gaussian θόρυβος	60
3.6	Ο θόρυβος στο πεδίο των συχνοτήτων	62
3.7	Τι συμβαίνει όταν ο θόρυβος περνάει από ένα σύστημα;	66
3.8	Ο καλύτερος δέκτης	71
3.9	Η περίπτωση του PAM	82
3.9.1	Μερικές πρώτες σκέψεις	82
3.9.2	Επιδόσεις ως προς την πιθανότητα σφάλματος	85
3.9.3	Επιδόσεις ως προς το εύρος ζώνης	90
3.10	Ζωνοπερατό PAM	95
3.11	Διαμόρφωση Φάσης	97
3.11.1	Εισαγωγικά	97
3.11.2	Υπολογισμός της πιθανότητας σφάλματος	102
3.11.3	Υπολογισμός του $P(e)$ σε ειδικές περιπτώσεις	107

3.11.4	Το φάσμα του PSK	111
3.11.5	Ολίσθηση φάσης εξαιτίας του καναλιού	113
3.12	Διαφορική διαμόρφωση φάσης.	114
3.13	Διαμόρφωση QAM	121
3.13.1	Υπολογισμός της πιθανότητας σφάλματος	123
3.14	Η διαμόρφωση PPM (και λοιποί συγγενείς).	126
3.15	Σύγκριση των διαφόρων σχημάτων διαμόρφωσης	130

1. Πηγές Πληροφορίας

1.1 Εισαγωγικά

Προτού ξεκινήσουμε την ενασχόληση μας με τη μετάδοση της ψηφιακής πληροφορίας, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε το πως παράγεται η πληροφορία αυτή και σε ποιό βαθμό μπορεί να περιγραφεί με μαθηματικά εργαλεία. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα πως ένας άνθρωπος πληκτρολογεί ένα κείμενο στον υπολογιστή του, σχηματίζοντας ένα σύνολο από λέξεις στην οθόνη του υπολογιστή. Οι λέξεις αποτελούνται από τα γράμματα του αλφάβητου της γλώσσας που χρησιμοποιείται (π.χ. "Α", "Β", ...) μαζί με ορισμένους ειδικούς χαρακτήρες (π.χ. χαρακτήρες στίξης ".", "!", κτλ). Από τηλεπικοινωνιακή σκοπιά, ο άνθρωπος αυτός είναι μία πηγή πληροφορίας που εκπέμπει διακριτά σύμβολα τα οποία περιλαμβάνουν τους χαρακτήρες που πληκτρολογούνται.

Αν κάποιος εκτυπώσει το κείμενο που πληκτρολογείται, θα διαπιστώσει πως ορισμένα σύμβολα εμφανίζονται πιο συχνά από τα άλλα. Για παράδειγμα, στην ελληνική γλώσσα το γράμμα "Α" συναντάται αρκετά πιο συχνά από το γράμμα "Ξ". Επομένως καταλαβαίνουμε πως κάθε σύμβολο έχει την δική του πιθανότητα εμφάνισης η οποία μπορεί μάλιστα να διαφέρει από τα αυτή των άλλων συμβόλων. Μπορούμε να συμβολίσουμε την πιθανότητα εμφάνισης ενός συμβόλου s στην έξοδο της πηγής X με $P(X=s)$ οπότε στην περίπτωση που συζητήσαμε παραπάνω θα έχουμε $P(X=A) > P(X=\Xi)$.

Μία διακριτή πηγή, δηλαδή μία πηγή που παράγει διακριτά σύμβολα, συνήθως έχει μνήμη. Για παράδειγμα όταν εμφανίζεται το γράμμα "Μ" είναι πολύ πιο πιθανό το επόμενο σύμβολο να αντιστοιχεί σε φωνήεν, π.χ. στο "Α" παρά πάλι σε σύμφωνο, π.χ. το "Ζ". Στα πλαίσια της θεωρίας πιθανοτήτων, η παραπάνω πρόταση συμβολίζεται ως $P(X_n=M, X_{n+1}=A) > P(X_n=M, X_{n+1}=Z)$. Στην εξίσωση αυτή χρησιμοποιούμε τον δείκτη n για να συμβολίσουμε την χρονική στιγμή που παράγεται το κάθε σύμβολο. Η πιθανότητα $P(X_n=M, X_{n+1}=A)$ συμβολίζει την πιθανότητα η πηγή X να παράγει το σύμβολο M την χρονική στιγμή n και την επόμενη χρονική στιγμή $(n+1)$ να παράγει το A . Προς το παρόν, θα θεωρήσουμε ότι οι πηγές μας δεν έχουν μνήμη, δηλαδή η πιθανότητα να εμφανιστεί ένα σύμβολο s_2 δεν εξαρτάται από το σύμβολο s_1 που εμφανίστηκε σε κάποια προηγούμενη χρονική στιγμή. Μαθηματικά αυτό σημαίνει ότι

$$P(X_n = s_1, X_{n+1} = s_2) = P(X_n = s_1)P(X_{n+1} = s_2) \quad (0.1)$$

Ένα σημαντικό μέγεθος μίας πηγής είναι η *εντροπία* της H . Θα δούμε πως η εντροπία μετράει την ποσότητα της πληροφορίας που παράγει μία διακριτή πηγή. Αν θεωρήσουμε πως η πηγή μας δεν έχει μνήμη, τότε η εντροπία $H(X)$ ορίζεται ως εξής:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i \quad (0.2)$$

όπου N είναι ο αριθμός των πιθανών διακριτών συμβόλων $\{s_1, \dots, s_N\}$ που παράγει η πηγή X , και p_i είναι οι πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων αυτών, δηλαδή $p_i = P(X=s_i)$. Οι μονάδες της εντροπίας είναι (όπως θα δούμε και παρακάτω) τα bit/symbol.

Παράδειγμα 1.1

Ας υπολογίσουμε την εντροπία μίας πηγής η οποία εκπέμπει τα σύμβολα "0" και "1" με την ίδια πιθανότητα. Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε $s_0=0$, $s_1=1$, $p_1=P(X=1)=1/2$ και $p_0=P(X=0)=1/2$ και φυσικά $N=2$. Επομένως εφαρμόζοντας τον τύπο της εντροπίας θα βρούμε

$$H(X) = -\left[\frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{2}\right] = 1 \text{ bit/symbol} \quad (0.3)$$

Επομένως η πηγή που εκπέμπει δύο διακριτά σύμβολα 0 και 1 με την ίδια πιθανότητα έχει εντροπία ίση με 1 bit/symbol

Παράδειγμα 1.2

Ας επαναλάβουμε τους ίδιους υπολογισμούς στην περίπτωση όπου η πιθανότητα του συμβόλου 1 είναι ίση με p . Για ποια τιμή του p μεγιστοποιείται η εντροπία $H(X)$;

Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε $p_1=P(X=1)=p$ και $p_0=P(X=0)=1-p$, οπότε η εντροπία γράφεται ως εξής:

$$H(X) = -[p\log_2 p + (1-p)\log_2 (1-p)] \quad (0.4)$$

Για να υπολογίσουμε το μέγιστο της συνάρτησης παραγωγίζουμε ως προς p

$$\frac{dH}{dp} = \log_2 p - \log_2 (1-p) = \log_2 \frac{p}{1-p} \quad (0.5)$$

Η παράγωγος μηδενίζεται για $p=1/2$ οπότε η εντροπία γίνεται μέγιστη εκεί και ίση με 1bit/symbol όπως υπολογίσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα¹.

Στα παραπάνω παραδείγματα εφαρμόσαμε τον τύπο της εντροπίας και είδαμε πως μία δυαδική πηγή έχει μέγιστη εντροπία όταν τα σύμβολα εμφανίζονται με την ίδια πιθανότητα. Είπαμε (χωρίς να το εξηγήσουμε και πολύ!) ότι η εντροπία μετρά την ποσότητα πληροφορίας που παράγει η πηγή. Αν το δεχτούμε αυτό τότε καταλαβαίνουμε ότι η δυαδική πηγή με ισοπίθανα σύμβολα παράγει την μεγαλύτερη πληροφορία από οποιαδήποτε άλλη δυαδική πηγή.

1.2 Η ερμηνεία της εντροπίας

Γιατί όμως η εντροπία μετράει την πληροφορία που παράγει μία πηγή; Καταρχήν ας σκεφτούμε πως μπορούμε να αξιολογήσουμε μία πληροφορία. Φανταστείτε πως έχετε έναν φίλο ο οποίος έρχεται μία μέρα και σας ανακοινώνει πως πιστεύει ότι "Ο Ήλιος ανατέλλει από την ανατολή". Τι αξία έχει

¹ OK, σίγουρα εδώ έχουμε παραλείψει πως πρέπει να υπολογίσουμε και την 2η παράγωγο για να δούμε αν το $p=1/2$ είναι όντως μέγιστο. Κάντε το σαν άσκηση.

για εσάς αυτή η πληροφορία; Προφανώς καμία επειδή ο Ήλιος μας πάντα ανατέλλει από την ανατολή και ο φίλος σας δεν σας είπε κάτι που δεν ξέρετε, αντίθετα σας είπε κάτι που σίγουρα συμβαίνει. Ας υποθέσουμε τώρα πως αντί για αυτό σας λέει "Η μετοχή της εταιρείας Bubble θα ανέβει αύριο κατά 50%". Η πληροφορία αυτή έχει μία αξία για εσάς ιδιαίτερα στην περίπτωση που για την εταιρεία (αν κρίνει κανείς και από το όνομα της!) είναι αρκετά απίθανό αυτό να συμβεί. Το γεγονός πως εσείς κατέχετε την πληροφορία αυτή μπορεί να σας κάνει πλούσιο (αρκεί βέβαια ο φίλος σας να επαληθευθεί). Επομένως υπό μία έννοια, η "αξία" της πληροφορίας εξαρτάται από το πόσο πιθανό είναι να συμβεί κάτι που μαθαίνετε: το μέτρο της πληροφορίας εξαρτάται από την πιθανότητα P ! Όσο πιο απίθανο είναι να συμβεί αυτό που συμβαίνει τόσο πιο μεγάλη είναι η αξία της αντίστοιχης πληροφορίας.

Η συνάρτηση $f(P)=-\log_2 P$ έχει όλες τις ιδιότητες που χρειαζόμαστε για να μετρήσουμε την πληροφορία:

α) Αυξάνει όσο μικραίνει το P . Όπως είδαμε και παραπάνω, όσο πιο σπάνιο είναι αυτό που μαθαίνουμε τόσο μεγαλύτερη είναι η αξία της πληροφορίας για εμάς.

β) Είναι μία συνεχής συνάρτηση. Πράγματι θα ήτανε περίεργο να χρησιμοποιούσαμε για να μετρήσουμε την πληροφορία μία συνάρτηση της πιθανότητας που άλλαζε ξαφνικά (ήτανε δηλαδή ασυνεχής) όταν η πιθανότητα άλλαζε κατά μία πολύ μικρή (αυθαίρετα μικρή) ποσότητα.

γ) Η πληροφορία που κερδίζουμε όταν γνωρίζουμε δύο συμβάντα A και B που είναι ανεξάρτητα θα πρέπει να είναι το άθροισμα των επιμέρους αξιών της πληροφορίας. Η πιθανότητα να συμβεί το A και το B στην περίπτωση που είναι ανεξάρτητα είναι $P(AB)=P(A)P(B)$ και επομένως $-\log_2 P(AB)=-\log_2 P(A)-\log_2 P(B)$. Επομένως ισχύει η ιδιότητα αυτή αν αποφασίσουμε να μετράμε την πληροφορία βάση του $-\log_2 P$.

Ας θεωρήσουμε τώρα μία πηγή η οποία εκπέμπει σύμβολα X από ένα σύνολο διακριτών συμβόλων $(s_1, \dots, s_N)$. Κάθε σύμβολο s_i έχει μέτρο πληροφορίας ίσο με $-\log_2 p_i$ όπου όπως και πριν $p_i = P(X=s_i)$. Ας υποθέσουμε ότι η πηγή εκπέμπει μία μακριά σειρά από M σύμβολα και ότι σε αυτή την σειρά το σύμβολο s_i εμφανίζεται M_i φορές. Το συνολικό μέτρο της πληροφορίας για αυτή την σειρά των συμβόλων θα είναι

$$I_{tot} = -M_1 \log_2 p_1 - \dots - M_N \log_2 p_N \quad (0.6)$$

ο μέσος όρος πληροφορίας ανά σύμβολο θα είναι

$$\frac{I_{tot}}{M} = -\frac{M_1}{M} \log_2 p_1 - \dots - \frac{M_N}{M} \log_2 p_N \quad (0.7)$$

Αν το M είναι πολύ μεγάλο, ο λόγος M_i/M θα μας κάνει την πιθανότητα p_i . Επομένως η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{I_{tot}}{M} = -\sum_{i=1}^M p_i \log_2 p_i = H(X) \quad (0.8)$$

Σύμφωνα με την (0.8) η εντροπία όπως την ορίσαμε στην (0.2) είναι το μέσο μέτρο της πληροφορίας μίας πολύ μεγάλης σειράς συμβόλων που παράγονται από την πηγή X .

Υπάρχει όμως και ένας εναλλακτικός τρόπος ερμηνείας της εντροπίας. Ας θεωρήσουμε πάλι την πηγή μας η οποία εκπέμπει από το ίδιο σύνολο διακριτών συμβόλων $(s_1, \dots, s_N)$. Αν η πηγή εκπέμψει M σύμβολα υπάρχουν N^M διαφορετικές ακολουθίες συμβόλων που μπορεί να έχουμε. Για παράδειγμα αν $N=2$ και $M=3$ τότε η πηγή μας μπορεί να παράγει $2^3=8$ διαφορετικές ακολουθίες συμβόλων με μήκος 3: (s_1, s_1, s_1) , (s_1, s_1, s_2) , (s_1, s_2, s_1) , (s_1, s_2, s_2) , (s_2, s_1, s_1) , (s_2, s_1, s_2) , (s_2, s_2, s_1) , (s_2, s_2, s_2) . Ωστόσο αν τα σύμβολα δεν είναι ισοπίθανα τότε κάποιες ακολουθίες είναι πολύ πιο πιθανό να λάβουν χώρα από κάποιες άλλες. Θεωρείστε για παράδειγμα ότι $p_1=P(X=s_1)=0.9$ και $p_2=P(X=s_2)=0.1$. Τότε η ακολουθία (s_1, s_1, s_1) έχει πιθανότητα $0.9^3=0.729$ να εμφανιστεί ενώ η (s_2, s_2, s_2) θα εμφανιστεί με πιθανότητα $0.1^3=0.001$. Επίσης σε μία μεγάλη ακολουθία συμβόλων (π.χ. $M=10000$) περιμένουμε περίπου το 90% να είναι s_1 ενώ μόνο το 10% να είναι ίσο με s_2 . Αν το M τείνει στο άπειρο, ακριβώς το 90% των συμβόλων θα είναι ίσο με s_1 ενώ το υπόλοιπο 10% θα είναι ίσο με s_2 . Σύμφωνα λοιπόν με αυτά που είπαμε μέχρι τώρα συνάγουμε ότι ναι μεν μπορεί να εμφανιστεί οποιαδήποτε ακολουθία στην έξοδο της πηγής μας αλλά όσο αυξάνει ο αριθμός M των συμβόλων, γίνεται ολοένα και πιο πιθανό να εμφανιστούμε ακολουθίες που έχουμε $p_1 M=0.9M$ σύμβολα s_1 και $p_2 M=0.1M$ σύμβολα s_2 . Θα ονομάζουμε αυτές τις ακολουθίες, *τυπικές ακολουθίες*.

Ποιά είναι η πιθανότητα εμφάνισης αυτών των τυπικών ακολουθιών; Δεν είναι δύσκολο να το υπολογίσουμε. Τα σύμβολα εμφανίζονται το ένα ανεξάρτητα από το προηγούμενο του και επομένως η πιθανότητα P_{typical} να εμφανιστούν $p_1 M$ σύμβολα s_1 και $p_2 M$ σύμβολα s_2 είναι:

$$P_{\text{typical}} = (p_1)^{p_1 M} (p_2)^{p_2 M} \quad (0.9)$$

Όσο αυξάνει το M είπαμε πως τόσο μικραίνει η πιθανότητα μία ακολουθία να μην είναι τυπική. Στο όριο όπου το M τείνει στο άπειρο έπεται ότι θα λαμβάνουμε μόνο τυπικές ακολουθίες οι οποίες θα συμβαίνουν με πιθανότητα που υποδεικνύει η (0.9) και η οποία είναι η ίδια για όλες τις πιθανές τυπικές ακολουθίες. Επομένως το πλήθος των τυπικών ακολουθιών είναι:

$$N_{\text{typical}} \cong \frac{1}{P_{\text{typical}}} = (p_1)^{-p_1 M} (p_2)^{-p_2 M} = \left(2^{\log_2 p_1}\right)^{-p_1 M} \left(2^{\log_2 p_2}\right)^{-p_2 M} = 2^{-M(p_1 \log_2 p_1 + p_2 \log_2 p_2)} = 2^{MH(X)} \quad (0.10)$$

Τώρα ας αναρωτηθούμε το εξής: αν αποφασίζαμε να κωδικοποιήσουμε όλες αυτές τις τυπικές ακολουθίες με σειρές από bit πόσες ακολουθίες θα χρειαζόμασταν; Για 2^2 ακολουθίες συμβόλων χρειαζόμαστε 4 bit, για 2^3 χρειαζόμαστε 3 bit, για $2^{MH(X)}$ χρειαζόμαστε $MH(X)$ bit. Ο μέσος αριθμός bit ανά σύμβολο είναι $MH(X)/M=H(X)$ bit/symbol. Άρα:

Το $H(X)$ είναι ο μέσος αριθμός bit ανά σύμβολο που θα χρησιμοποιούσαμε για να κωδικοποιήσουμε μία μεγάλη ακολουθία από σύμβολα που παράγονται από την πηγή μας.

Παράδειγμα 1.3

Μία πηγή παράγει τα σύμβολα 1, 2, 3, 4 με πιθανότητα $p_1=0.5$, $p_2=0.3$, $p_3=0.1$, $p_4=0.1$. Να υπολογιστεί ο μέσος αριθμός bit/symbol που χρειάζεται για να κωδικοποιηθούν πολύ μεγάλες ακολουθίες συμβόλων από την πηγή αυτή. Πόσος θα ήταν ο αριθμός αυτός αν τα σύμβολα ήτανε ισοπίθανα;

Είπαμε πως ο μέσος αριθμός bit/symbol καθορίζεται από την εντροπία της πηγής. Αν εφαρμόσουμε τον τύπο (0.2) βρίσκουμε $H(X)=1.6855\text{bit/symbol}$.

Αν τα σύμβολα ήτανε ισοπίθανα τότε $p_1=0.25$, $p_2=0.25$, $p_3=0.25$, $p_4=0.25$ οπότε $H(X)=2\text{bit/symbol}$.

Επομένως: η πηγή με ισοπίθανα σύμβολα χρειάζεται 2/1.6855 περισσότερα bit για να μεταδώσουμε την πληροφορία της ($\approx 18\%$ επιπλέον bit).

1.3 Θεώρημα κωδικοποίησης της πηγής και αλγόριθμοι κωδικοποίησης

Ο Claude Shannon ήδη από το 1948 είχε καταφέρει να αποδείξει με αυστηρό μαθηματικό τρόπο το γεγονός πως μία πηγή με εντροπία H μπορεί να κωδικοποιηθεί με αυθαίρετα μικρή πιθανότητα σφάλματος αρκεί ο ρυθμός R με τον οποίο αντιστοιχούμε τα bit στα σύμβολα της να είναι μεγαλύτερος από το H , $R>H$. Στην αντίθετη περίπτωση όπου $R<H$, τότε δεν είναι δυνατόν να βρούμε κάποιο τρόπο κωδικοποίησης των ακολουθιών εξόδου που να μην οδηγεί σε σφάλματα.

Φυσικά εγείρεται το ερώτημα: Πως θα γίνει αυτή η κωδικοποίηση στην περίπτωση όπου $R>H$; Υπάρχουν στην βιβλιογραφία διάφοροι τρόποι κωδικοποίησης που έχουνε στόχο να προσεγγίζουν το όριο που θέτει το θεώρημα κωδικοποίησης της πηγής. Παράδειγμα αποτελεί ο αλγόριθμος Lempel-Ziv ο οποίος προτάθηκε το 1977.

Ας δούμε τον κώδικα Lempel-Ziv με ένα παράδειγμα. Μία πηγή μεταδίδει το μήνυμα: "AABABBBABAABABBBABBABB". Είναι φανερό πως χρησιμοποιούνται δύο σύμβολα το "A" και το "B", πρόκειται δηλαδή για δυαδική πηγή. Το πρώτο βήμα του αλγορίθμου είναι να χωρίσουμε τη σειρά του μηνύματος σε σειρές συμβόλων οι οποίες δεν υπάρχουν στις σειρές συμβόλων που έχουμε δει μέχρι τώρα. Ας δούμε τι εννοούμε με αυτή τη φράση. Ξεκινάμε από την αρχή και διαβάζουμε το πρώτο γράμμα "A". Επειδή δεν το έχουμε δει μέχρι το ξεχωρίζουμε και η ακολουθία γράφεται A|ABABBBABAABABBBABBABB. Συνεχίζουμε την ανάγνωση των συμβόλων. Συναντάμε πάλι το δεύτερο "A" αλλά επειδή ήδη το έχουμε συναντήσει μία φορά δεν το ξεχωρίζουμε και προχωρούμε στο επόμενο σύμβολο. Μέχρι τώρα έχουμε διαβάσει τη σειρά των συμβόλων AB την οποία δεν έχουμε συναντήσει μέχρι τώρα και επομένως χωρίζουμε τα σύμβολα ως εξής: A|AB|ABBBABAABABBBABBABB. Συνεχίζουμε την ανάγνωση των συμβόλων. Συναντάμε το γράμμα "A" (το οποίο όμως το έχουμε δει προηγουμένως ως ακολουθία συμβόλων), μετά το "B" αλλά πάλι δεν σταματάμε επειδή ήδη έχουμε δει την σειρά "AB" και το επόμενο σύμβολο "B". Σταματάμε επειδή το "ABB" δεν το έχουμε συναντήσει προηγουμένως και χωρίζουμε τα σύμβολα ως εξής: A|AB|ABB|BABAABABBBABBABB.

Αν συνεχίσουμε μέχρι το τέλος θα λάβουμε: A|AB|ABB|B|ABA|ABAB|BB|ABBA|BB. Βέβαια το τελευταίο "BB" το έχουμε ήδη συναντήσει αλλά δεν πειράζει, στο τέλος της ακολουθίας κάνουμε μία εξαίρεση. Στη συνέχεια απαριθμούμε τις διαφορετικές ακολουθίες στις οποίες έχουμε χωρίσει την

μεγάλη ακολουθία. Έτσι έχουμε: $1 \rightarrow A$, $2 \rightarrow AB$, $3 \rightarrow ABB$, $4 \rightarrow B$, $5 \rightarrow ABA$, $6 \rightarrow ABAB$, $7 \rightarrow BB$, $8 \rightarrow ABBA$, $9 \rightarrow BB$. Έχουμε επομένως να μεταδώσουμε 9 ακολουθίες τις οποίες μπορούμε να κωδικοποιήσουμε όπως εμείς θέλουμε. Ο αλγόριθμος Lempel-Ziv κωδικοποιεί τις ακολουθίες ως εξής: Ξεκινάμε από το 0 για την πρώτη ακολουθία, δηλαδή την A. Οι επόμενες ακολουθίες, π.χ. η AB θα προκύπτουν από μία προηγούμενη (στην συγκεκριμένη περίπτωση η A την οποία έχουμε αριθμήσει με 1) συν ένα σύμβολο (ή bit) το οποίο προστίθεται για να μας δώσει την νέα κατάσταση. Έτσι η AB κωδικοποιείται ως 1B. Επειδή η ABB προκύπτει από την AB (που έχουμε αριθμήσει ως 2) με την πρόσθεση ενός B, θα έχουμε ότι η ABB κωδικοποιείται ως 2B. Επομένως έχουμε την παρακάτω κωδικοποίηση για τις ακολουθίες μας:

$0A \rightarrow A$, $1B \rightarrow AB$, $2B \rightarrow ABB$, $0B \rightarrow B$, $2A \rightarrow ABA$, $5B \rightarrow ABAB$, $4B \rightarrow BB$, $3A \rightarrow ABBA$, $7 \rightarrow BB$.

Το τελευταίο $7 \rightarrow BB$ προκύπτει επειδή δεν χρειάζεται να προσθέσουμε τίποτα στην BB που έχουμε ήδη αριθμήσει ως 7 για να προκύψει η ακολουθία αυτή. Στη συνέχεια μετατρέπουμε την κωδικοποίηση της κάθε ακολουθίας ως εξής: μετατρέπουμε τον αριθμό στο δυαδικό του ισοδύναμο και το σύμβολο που ακολουθεί σε 0 ή 1. Π.χ. αν αποφασίσουμε πως το "A" αντιστοιχεί στο 0 και το "B" στο 1, το ABB το οποίο έχουμε κωδικοποιήσει ως 2B θα μεταδοθεί ως 10,1 όπου το κόμμα χωρίζει τη δυαδική αναπαράσταση του 2 από τη δυαδική αναπαράσταση του B που είπαμε πως είναι το 1.

Ας δούμε μία-μία τις δυαδικές αναπαραστάσεις των ακολουθιών του μηνύματος:

$0A \rightarrow 0$ δηλαδή: 0

$1B \rightarrow 1,1$ δηλαδή: 11

$2B \rightarrow 10,1$ δηλαδή: 101

$0B \rightarrow 00,1$ δηλαδή 001

$2A \rightarrow 010,0$ δηλαδή 100

$5B \rightarrow 101,1$ δηλαδή 1011

$4B \rightarrow 100,1$ δηλαδή 1001

$3A \rightarrow 11,0$ δηλαδή 110

$7 \rightarrow 0111$

Παρατηρήστε ότι ο αριθμός των bit που χρησιμοποιούνται για την δυαδική αναπαράσταση αυξάνει. Έτσι στην περίπτωση του 0B, η αρίθμηση του όπως είδαμε και παραπάνω είναι ίση με 3 και επομένως χρησιμοποιούμε 2 bit για την περιγραφή του 0 στο 0B. Αντίστοιχα στο 2A του οποίου η αρίθμηση αντιστοιχεί στο 5, χρησιμοποιούμε 3 ψηφία για την περιγραφή του 2, δηλαδή τα 010.

Παρακάτω φαίνονται τα βήματα που ακολουθήσαμε:

A |AB |ABB |B |ABA |ABAB |BB |ABBA |BB

1	2	3	4	5	6	7	8	9
0A	1B	2B	0B	2A	5B	4B	3A	7
0	11	101	001	0100	1011	1001	110	1011

Φυσικά τώρα θα πείτε: Τελικά τι κερδίσαμε με τον τρόπο αυτό; Ξεκινήσαμε με 22 δυαδικά σύμβολα και καταλήξαμε με 27 bit. Γιατί να μην κωδικοποιήσουμε απευθείας τα σύμβολα το κάθε ένα με 1 bit; Έχετε δίκιο αλλά η ακολουθία είναι πολύ μικρή για να φανεί η αξία του αλγορίθμου. Σε μεγαλύτερες ακολουθίες ο αλγόριθμος επιτυγχάνει σημαντική μείωση των απαιτούμενων συμβόλων και υπό προϋποθέσεις πλησιάζει το όριο του Shannon. Ο αλγόριθμος αυτός και διάφορες παραλλαγές του χρησιμοποιούνται πολύ συχνά σε διάφορα προγράμματα συμπίεσης.

1.4 Πηγές με μνήμη

Μέχρι τώρα θεωρήσαμε ότι η πηγή μας δεν έχει μνήμη. Δηλαδή η πιθανότητα να εκπέμψει η πηγή το σύμβολο s_1 την χρονική στιγμή n , δεν εξαρτάται την εμφάνιση κάποιο συμβόλου την προηγούμενη χρονική στιγμή $(n-1)$ ή κάποια άλλη παρελθούσα χρονική στιγμή. Επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$P(X_n = s_1, X_{n-1} = s_2) = P(X_n = s_1)P(X_{n-1} = s_2) \quad (0.11)$$

Δεδομένου ότι η δεσμευμένη πιθανότητα δύο γεγονότων ορίζεται ως $P(A|B)=P(AB)/P(B)$ όπου $P(A|B)$ είναι η πιθανότητα να συμβεί το A δεδομένου ότι έχει συμβεί το B η (0.11) μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$P(X_n = s_1 | X_{n-1} = s_2) = P(X_n = s_1) \quad (0.12)$$

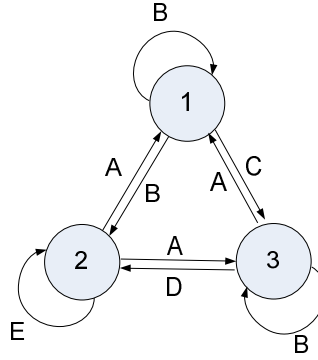
Η εξίσωση (0.12) υποδηλώνει και πάλι ότι η πιθανότητα να εκπέμψει η πηγή μας το s_1 την χρονική στιγμή n δεν εξαρτάται από το τι προηγήθηκε. Ωστόσο σε ένα ελληνικό κείμενο όπως είπαμε και παραπάνω, η εμφάνιση των συμβόλων έχει μία συσχέτιση. Επομένως μπορεί να έχουμε

$$P(X_n = s_1 | X_{n-1} = s_2) \neq P(X_n = s_1) \quad (0.13)$$

Αυτό σημαίνει πως η πηγή μας έχει μνήμη και επομένως αυτό θα πρέπει να ληφθεί υπόψη στον υπολογισμό της εντροπίας της. Πως όμως θα υπολογίσουμε την εντροπία μίας τέτοιας πηγής;

Ας σκεφτούμε λίγο πως ερμηνεύσαμε την εντροπία μίας πηγής χωρίς μνήμη (με τον δεύτερο τρόπο). Υποθέσαμε ότι η πηγή εκπέμπει ακολουθίες με πολύ μεγάλο αριθμό συμβόλων ($M \rightarrow \infty$) και στην συνέχεια υπολογίσαμε το μέσο αριθμό bit ανά σύμβολο που χρειαζόμαστε για να αναπαραστήσουμε τις ακολουθίες αυτές. Γιατί να μην κάνουμε το ίδιο και τώρα;

Για να εξηγήσουμε τι εννοούμε ας θεωρήσουμε μία μαρκοβιανή πηγή η οποία μεταπίπτει από μία κατάσταση σε μία άλλη εκπέμποντας παράλληλα ένα σύμβολο. Η πηγή αυτή περιγράφεται με ένα διάγραμμα καταστάσεων όπως το παρακάτω



Σχήμα 1-1: Το διάγραμμα καταστάσεων μίας μαρκοβιανής πηγής

Αν κανείς παρακολουθήσει τα σύμβολα εξόδου για μεγάλο χρονικό διάστημα θα καταγράψει ακολουθίες συμβόλων στην μορφή "ABAD...". Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $N(M)$ διαφορετικές πιθανές ακολουθίες μήκους M . Μπορεί να νομίζετε πως $N(M)=5^M$ εφόσον έχουμε πέντε διαφορετικά σύμβολα (A,B,C,D,E) αλλά δεν είναι έτσι καθώς κάποιοι συνδυασμοί δεν υποστηρίζονται από την πηγή μας. Για παράδειγμα η πηγή δεν μπορεί να εκπέμψει την ακολουθία "ED" καθώς το E εκπέμπεται όταν πάμε από την κατάσταση 2 στην κατάσταση 2, ενώ το D εκπέμπεται όταν πάμε από την κατάσταση 3 στην κατάσταση 2. Επομένως είναι αδύνατον η πηγή να εκπέμψει τον συνδυασμό "ED". Ας υποθέσουμε πως για κάθε διαφορετική ακολουθία n_i είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε και την πιθανότητα εμφάνισης της $P(n_i)$. Για εμάς κάθε τέτοια ακολουθία είναι ένα πιθανό "μεγάλο" σύμβολο (που αποτελείται από M μικρά σύμβολα) και ο μέσος αριθμός bit ανά μικρό σύμβολο που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να κωδικοποιήσουμε τα μεγάλα σύμβολα είναι

$$G_M = -\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N(M)} P(n_i) \log_2 P(n_i) \quad (0.14)$$

όταν το $M \rightarrow \infty$ η (0.14) θα πρέπει να είναι ο μέσος αριθμός bit που χρειαζόμαστε για να κωδικοποιήσουμε μία πολύ μεγάλη ακολουθία συμβόλων και επομένως η εντροπία της πηγής.

Πως όμως υπολογίζεται αυτό το όριο; Ευτυχώς για πηγές πληροφορίας σαν αυτές που εικονίζονται στο Σχήμα 1-1 υπάρχει ένας απλός τρόπος εξαιτίας ενός πολύ βασικού θεωρήματος που μας λέει ότι:

Η εντροπία της πηγής ισούται με την εντροπία καταστάσεων της

$$H = -\sum_{i=1}^K p_i \left\{ \sum_{j=1}^K p_{ji} \log_2 p_{ji} \right\} \quad (0.15)$$

όπου p_i είναι η πιθανότητα να βρεθεί η πηγή μας στην κατάσταση i (στην περίπτωση μας $i=1,2,3$), K είναι ο πιθανός αριθμός καταστάσεων ($K=3$ στο Σχήμα 1-1) ενώ $p_{ji}=P(j|i)$ είναι η πιθανότητα η πηγή μας να βρεθεί στην κατάσταση j αν ήδη βρίσκεται στην κατάσταση i . Ας τα καταλάβουμε όλα αυτά με ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.4 Μαρκοβιανή Πηγή

Για την Μαρκοβιανή πηγή στο Σχήμα 1-1 να υπολογιστεί η εντροπία της αν οι πιθανότητες μετάβασης είναι $P(1|1)=0.1$, $P(2|1)=0.2$, $P(3|1)=0.7$, $P(1|2)=0.3$, $P(2|2)=0.2$, $P(3|2)=0.5$, $P(1|3)=0.1$, $P(2|3)=0.3$, $P(3|3)=0.6$.

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα αρκεί να υπολογίσουμε την (0.15). Για να το κάνουμε αυτό χρειαζόμαστε τα p_{ji} και τα p_i . Τα p_{ji} προκύπτουν απλά από τις πιθανότητες μετάβασης $p_{ji}=P(j|i)$ και μάλιστα μπορούμε να τα τοποθετήσουμε σε έναν πίνακα:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(1|1) & P(1|2) & P(1|3) \\ P(2|1) & P(2|2) & P(2|3) \\ P(3|1) & P(3|2) & P(3|3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.7 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix} \quad (0.16)$$

Πως θα υπολογίσουμε όμως τις πιθανότητες p_i ? Είναι θέμα απλής εφαρμογής των νόμων των πιθανοτήτων. Αν θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα B_k τα οποία είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα² ενώ παράλληλα αποτελούν και ένα πλήρες σετ ενδεχομένων³, τότε

$$P(A) = \sum_{k=1}^L P(A | B_k) P(B_k) \quad (0.17)$$

Εφαρμόζοντας αυτόν τον τύπο στην περίπτωση μας παίρνουμε:

$$p_1 = P(1|1)p_1 + P(1|2)p_2 + P(1|3)p_3 \quad (0.18)$$

$$p_2 = P(2|1)p_1 + P(2|2)p_2 + P(2|3)p_3 \quad (0.19)$$

$$p_3 = P(3|1)p_1 + P(3|2)p_2 + P(3|3)p_3 \quad (0.20)$$

ή αν αντικαταστήσουμε

$$-0.9p_1 + 0.3p_2 + 0.1p_3 = 0 \quad (0.21)$$

$$0.2p_1 - 0.8p_2 + 0.3p_3 = 0 \quad (0.22)$$

$$0.7p_1 + 0.5p_2 - 0.4p_3 = 0 \quad (0.23)$$

Ξέρω τι μπορεί να σκέφτεστε: έχουμε τρεις εξισώσεις και τρεις αγνώστους οπότε μπορούμε να λύσουμε και να βρούμε τα p_i . Όμως αν προσέξετε η τρίτη εξίσωση απλά προκύπτει από την πρόσθεση της πρώτης με την δεύτερη και μία αλλαγή πρόσημου. Δηλαδή δεν μας λέει και τίποτα καινούργιο. Χρειαζόμαστε μία καινούργια εξίσωση για να βρούμε τους αγνώστους μας και η μόνη ίσως που μας έρχεται στο μυαλό είναι η

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \quad (0.24)$$

² Δηλαδή αν συμβεί το B_1 δεν μπορεί να έχει συμβεί και το B_2 κ.ο.κ.

³ Δηλαδή δεν μπορεί να μην έχει συμβεί ένα από τα B_k . Π.χ. αν το B_k είναι το ενδεχόμενο ένα ζάρι να φέρει k τότε είναι προφανές ότι τα $B_1, \dots, B_6$ έχουνε αυτή την ιδιότητα.

Επομένως λύνουμε το σύστημα:

$$-0.9p_1 + 0.3p_2 + 0.1p_3 = 0 \quad (0.25)$$

$$0.2p_1 - 0.8p_2 + 0.3p_3 = 0 \quad (0.26)$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \quad (0.27)$$

που είναι εύκολο να δείξουμε πως έχει λύση:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1518 \\ 0.2589 \\ 0.5893 \end{bmatrix} \quad (0.28)$$

Κάνοντας τους υπολογισμούς σύμφωνα με την (0.15) έχουμε $H=1.3236\text{bit/symbol}$.

1.5 Κατά συνθήκη εντροπία

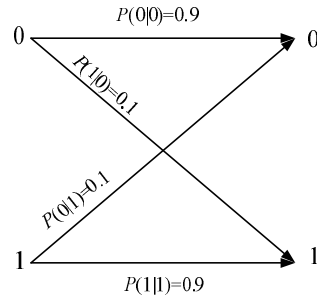
Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε μία πηγή X η οποία εκπέμπει σύμβολα και τοποθετείται στην είσοδο ενός συστήματος επικοινωνίας. Στην έξοδο του συστήματος λαμβάνουμε σύμβολα τα οποία μπορεί να είναι τα ίδια με αυτά που εκπέμπει η X , ή αν το σύστημα μας δεν είναι ιδανικό τα σύμβολα κάποιες φορές μπορεί να διαφέρουν. Μπορούμε να σκεφτόμαστε την έξοδο του συστήματος ως μία δεύτερη πηγή πληροφορίας Y . Το ερώτημα που τίθεται είναι με ποιό ρυθμός bit/s μπορούμε να μεταδώσουμε πληροφορία από το εν λόγω σύστημα;

Για να ξεκαθαρίσουμε λίγο παραπάνω τα πράγματα ας υποθέσουμε πως η πηγή X μεταδίδει δύο σύμβολα 0 και 1 με πιθανότητα $P(X=0)=p_0=0.5$ και $P(X=1)=p_1=0.5$. Το σύστημα μας περιγράφεται από τις πιθανότητες $P(Y=y|X=x)=P(y|x)$ που υποδηλώνουν την πιθανότητα να λάβουμε y στην έξοδο του συστήματος ενώ η πηγή στην είσοδο έχει εκπέμψει x . Ας υποθέσουμε ότι $P(1|1)=0.9$ (δηλαδή υπάρχει 90% πιθανότητα να λάβουμε το 1 αν εκπέμψουμε το 1), $P(0|1)=0.1$ καθώς και ότι $P(0|0)=0.9$ και $P(1|0)=0.1$. Η κατάσταση συνοψίζεται στο διάγραμμα στο Σχήμα 1-2. Όπως φαίνεται και από το σχήμα υπάρχει μία πιθανότητα $p_e=0.1$ το σύμβολο να μην αποκωδικοποιηθεί σωστά, δηλαδή να στείλουμε 1 και να πάρουμε 0 ή να στείλουμε 0 και να πάρουμε 1.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι παρακολουθούμε το σύστημα μας για μία μεγάλη ακολουθία συμβόλων⁴ με πλήθος M . Εφόσον η πιθανότητα να κάνουμε σφάλμα είναι p_e τότε το πλήθος των σφαλμάτων που συμβαίνει σε αυτή την ακολουθία είναι $\approx Mp_e$ και φυσικά όσο μεγαλύτερο είναι το M τόσο ακριβέστερα ισχύει αυτό. Πόσες διαφορετικές ακολουθίες υπάρχουν που διαφέρουν σε Mp_{error} θέσεις από την αρχική; Σύμφωνα με την συνδυαστική, ο αριθμός των διαφορετικών ακολουθιών με πλήθος M σύμβολα που διαφέρουν σε Mp_e θέσεις είναι:

$$\binom{M}{Mp_e} = \frac{M!}{(M - Mp_e)!(Mp_e)!} \quad (0.29)$$

⁴ Ναι, ναι καλά το καταλάβατε! Όταν μιλάμε για την εντροπία συχνά λέμε και "μεγάλη ακολουθία συμβόλων".



Σχήμα 1-2: Ένα διάγραμμα που απεικονίζει το ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα

Ναι αλλά όσο αυξάνει το M , το $M!$ προσεγγίζεται πολύ καλά από την σχέση:

$$\ln(M!) \cong M \ln M - M \quad (0.30)$$

οπότε

$$\ln \left(\frac{M}{Mp_e} \right) = \ln \frac{M!}{(M - Mp_e)!(Mp_e)!} \cong M \ln(M) - (M - Mp_e) \ln(M - Mp_e) - Mp_e \ln(Mp_e) \quad (0.31)$$

Δεδομένου ότι $\log_2 x = \ln x / \ln 2$ θα έχουμε:

$$\log_2 \left(\frac{M}{Mp_e} \right) \cong M \log_2(M) - (M - Mp_e) \log_2(M - Mp_e) - Mp_e \log_2(Mp_e) \quad (0.32)$$

Εφόσον $\log_2(ab) = \log_2 a + \log_2 b$ θα έχουμε

$$\log_2 \left(\frac{M}{Mp_e} \right) \cong -(1 - p_e) \log_2(1 - p_e) - p_e \log_2 p_e \quad (0.33)$$

ή διαφορετικά,

$$N_e = \left(\frac{M}{Mp_e} \right) \cong 2^{MH_b(p_e)} \quad (0.34)$$

όπου

$$H_b(p_e) = -(1 - p_e) \log_2(1 - p_e) - p_e \log_2 p_e \quad (0.35)$$

Παρατηρούμε επομένως ότι η ποσότητα (0.35) σχετίζεται άμεσα μέσω της (0.34) με τον αριθμό των διαφορετικών ακολουθιών συμβόλων που μπορεί να προκύψουν εξαιτίας των σφαλμάτων που λαμβάνουν χώρα στο σύστημα μας.

Για κάθε μία ακολουθία εισόδου όμως υπάρχουν N_e διαφορετικοί συνδυασμοί ακολουθιών που παράγονται στην έξοδο και ο αριθμός αυτών καθορίζεται από την (0.34). Αν θεωρήσουμε τώρα όλες

τις τυπικές ακολουθίες εισόδου, καταλαβαίνουμε ότι αν τύχει κάθε ακολουθία εισόδου να παράγει N_e διαφορετικές ακολουθίες εξόδου ο αριθμός των ακολουθιών εισόδου θα καθορίζεται από την

$$N_i = 2^{MH(Y)} / N_e \cong 2^{M[H(Y) - H_b(p_e)]} \quad (0.36)$$

Στην περίπτωση αυτή ο ρυθμός των bit πληροφορίας ανά σύμβολο (bit/symbol) που περνάμε από το κανάλι είναι

$$R = \frac{\log_2 N_i}{M} = H(Y) - H_b(p_e) \quad (0.37)$$

Γιατί υποθέσαμε ότι κάθε ακολουθία εισόδου παράγει διαφορετικές ακολουθία εξόδου; Μα γιατί στην περίπτωση αυτή ο δέκτης δεν μπορεί να μπερδευτεί: ναι μεν η ακολουθία εξόδου δεν θα είναι ίδια με την ακολουθία εισόδου ωστόσο ο δέκτης υπολογίζει όλες τις πιθανές ακολουθίες εξόδου που αντιστοιχούν σε κάθε ακολουθία εισόδου και εφόσον αυτές δεν επικαλύπτονται ξέρει τελικά ποιά ακολουθία μετέδωσε η πηγή εισόδου X .

Παρατηρούμε επομένως πως η ποσότητα $H_b(p_e)$ υπό μία έννοια "κλέβει" ρυθμό από το σύστημα μας. Στη γενικότερη περίπτωση όπου το σύστημα μας δεν είναι δυαδικό ή δεν είναι συμμετρικό (δηλαδή $P(1|0) \neq P(0|1)$), η $H_b(p_e)$ αποδεικνύεται ότι πρέπει να υπολογίζεται από τον τύπο:

$$H(Y|X) = - \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} P(x, y) \log_2 P(y|x) \quad (0.38)$$

όπου N_s είναι ο αριθμός των συμβόλων που μεταδίδει το σύστημα μας στην είσοδο του (π.χ. $N_s=2$ στην περίπτωση στο Σχήμα 1-2) ενώ $P(x, y)$ είναι η πιθανότητα $P(X=x, Y=y)$ ενώ $P(y|x) = P(Y=y|X=x)$. Η παραπάνω ποσότητα ονομάζεται *εντροπία υπό συνθήκη*. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα 1.5

Να υπολογιστεί η υπό συνθήκη εντροπία ενός συστήματος το οποίο καθορίζεται από το Σχήμα 1-2. Να υποθέσετε ότι τα bit εισόδου μεταδίδονται με την ίδια πιθανότητα, δηλαδή $P(0)=P(X=0)=P(1)=P(X=1)=1/2$ όπου με $P(x)$ συμβολίζουμε το $P(X=x)$.

Σύμφωνα με αυτά που μας λέει το σχήμα έχουμε

$$P(1|0) = P(0|1) = p_e \quad (0.39)$$

$$P(1|1) = P(0|0) = 1 - p_e \quad (0.40)$$

Για να βρούμε τις πιθανότητες $P(x, y)$ χρησιμοποιούμε τους νόμους των πιθανοτήτων:

$$P(x, y) = P(X = x, Y = y) = P(Y = y | X = x)P(X = x) = P(y|x) / P(x) \quad (0.41)$$

Επομένως:

$$P(1,1) = P(1|1)P(1) = \frac{1}{2}(1-p_e) \quad (0.42)$$

$$P(0,0) = P(0|0)P(0) = \frac{1}{2}(1-p_e) \quad (0.43)$$

$$P(1,0) = P(1|0)P(0) = \frac{p_e}{2} \quad (0.44)$$

$$P(0,1) = P(0|1)P(1) = \frac{p_e}{2} \quad (0.45)$$

αν χρησιμοποιήσουμε την (0.38) εύκολα βρίσκουμε ότι

$$H(Y|X) = -(1-p_e) \log_2(1-p_e) - p_e \log_2 p_e \quad (0.46)$$

δηλαδή (όπως περιμέναμε!) στην ειδική περίπτωση στο Σχήμα 1-2 η $H(Y|X)$ ισούται με την $H_b(p_e)$ που είχαμε υπολογίσει.

1.6 Το θεώρημα κωδικοποίησης του καναλιού

Είδαμε και προηγουμένως την πρακτική αξία που έχει η εντροπία υπό συνθήκη $H(Y|X)$ στην περίπτωση ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος εφόσον καθορίζει τον ρυθμό μετάδοσης της πληροφορίας πάνω από το σύστημα μας μέσω της (0.37). Η περίφημη *χωρητικότητα* του καναλιού ορίζεται ως ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας ο οποίος μπορεί να συμβεί με αυθαίρετα μικρή πιθανότητα σφάλματος⁵.

Το *θεώρημα κωδικοποίησης του καναλιού* μας πληροφορεί ότι η χωρητικότητα C ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος ή "καναλιού" προκύπτει ως:

$$C = \max_{P(x)} \{H(Y) - H(Y|X)\} \quad (0.47)$$

Το "max" στην (0.47) νοείται ως μεγιστοποίηση ως προς τις πιθανότητες μετάδοσης των συμβόλων της πηγής X που τοποθετείται στην είσοδο του συστήματος. Με άλλα λόγια το θεώρημα μας λέει πως για να πετύχουμε το μέγιστο ρυθμό μετάδοσης της πληροφορίας θα πρέπει να "παίζουμε" με την στατιστική της πηγής που βάζουμε στην είσοδο του καναλιού. Ενδεχομένως αυτό να φαίνεται περίεργο: μία πηγή εκπέμπει αυτό που εκπέμπει, πως μπορούμε να επεμβούμε σε αυτήν; Ωστόσο πολλές φορές μπορούμε να επεμβούμε π.χ. στον τρόπο που επιλέγουμε τα σύμβολα. Ας δούμε ένα παράδειγμα

Παράδειγμα 1.6

Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του καναλιού στο Σχήμα 1-2. Δίδεται ότι $p_e=0.01$.

⁵ "Αυθαίρετα μικρή" σημαίνει πως για πεπερασμένες ακολουθίες έχει μη μηδενική τιμή αλλά η τιμή της τείνει στο μηδέν όταν το πλήθος των συμβόλων στην ακολουθία τείνει στο άπειρο.

Σύμφωνα με την (0.47) θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε την ποσότητα $H(Y)-H(Y|X)$ ως προς τις πιθανότητες των συμβόλων $P_0=P(X=0)$ και $P_1=P(X=1)$. Ξεκινάμε εκφράζοντας το $H(Y)$ ως συνάρτηση των P_0 και P_1 . Έχουμε:

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^2 P(Y=b_i) \log_2 P(Y=b_i) \quad (0.48)$$

όπου $b_0=0$ και $b_1=1$. Η (0.48) μας υποδεικνύει ότι θα πρέπει να βρούμε τις πιθανότητες $P(Y=1)$ και $P(Y=0)$ συναρτήσει των P_0 και P_1 . Για να το κάνουμε αυτό, χρησιμοποιούμε τον κανόνα της ολικής πιθανότητας:

$$P(Y=1) = P(1|0)P_0 + P(1|1)P_1 = p_e P_0 + (1-p_e)P_1 \quad (0.49)$$

$$P(Y=0) = P(0|0)P_0 + P(0|1)P_1 = (1-p_e)P_0 + p_e P_1 \quad (0.50)$$

όπως είδαμε και πριν η δεσμευμένη εντροπία δίνεται από την (0.38). Υπολογίζουμε τις πιθανότητες $P(x,y)$ όπως και προηγουμένως:

$$P(1,1) = P(1|1)P(1) = P_1(1-p_e) \quad (0.51)$$

$$P(0,0) = P(0|0)P(0) = P_0(1-p_e) \quad (0.52)$$

$$P(1,0) = P(1|0)P(0) = p_e P_0 \quad (0.53)$$

$$P(0,1) = P(0|1)P(1) = p_e P_1 \quad (0.54)$$

Σύμφωνα με την (0.38) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= -P_1(1-p_e) \log_2(1-p_e) - P_0(1-p_e) \log_2(1-p_e) \\ &\quad - p_e P_0 \log_2 p_e - p_e P_1 \log_2 p_e = -(1-p_e) \log_2(1-p_e) - p_e \log_2 p_e \end{aligned} \quad (0.55)$$

Παρατηρούμε ότι η δεσμευμένη εντροπία του συστήματος δεν εξαρτάται από τα P_1 και P_0 . Συνεπώς για να μεγιστοποιήσουμε την $H(Y)-H(Y|X)$ πρέπει να μεγιστοποιήσουμε απλά την $H(Y)$. Πως όμως μεγιστοποιούμε την $H(Y)$; Υπάρχουν διάφοροι τρόποι. Καταρχήν τα P_1 και P_0 συνδέονται εφόσον $P_1+P_0=1$. Οπότε μπορούμε να θέσουμε $P_1=p$ και να απαλείψουμε το P_0 από τις (0.49)-(0.50) οι οποίες γράφονται:

$$y_1 = P(Y=1) = p_e(1-p) + (1-p_e)p = p_e + p - 2pp_e = p_e + p(1-2p_e) \quad (0.56)$$

$$y_0 = P(Y=0) = (1-p_e)(1-p) + p_e p = 1-p_e - p(1-2p_e) \quad (0.57)$$

Για να απλοποιήσουμε λίγο τον τρόπο γραφής από εδώ και στο εξής θα γράφουμε y_1 και θα εννοούμε $P(Y=1)$ και y_0 που θα εννοούμε $P(Y=0)$. Φυσικά $y_0=1-y_1$ και η $H(Y)$ γράφεται:

$$H(Y) = -(1-y_1) \log_2(1-y_1) - y_1 \log_2 y_1 \quad (0.58)$$

Όπως είδαμε από το Παράδειγμα 1.2, η εντροπία αυτή μεγιστοποιείται όταν $y_i=1/2$ επομένως θα έχουμε $p_e+p(1-2p_e)=1/2$ από το οποίο προκύπτει ότι η $H(Y)$ μεγιστοποιείται για $p=1/2$ και είναι ίση με $H(Y)=1\text{bit/s}$. Η χωρητικότητα του καναλιού θα είναι επομένως:

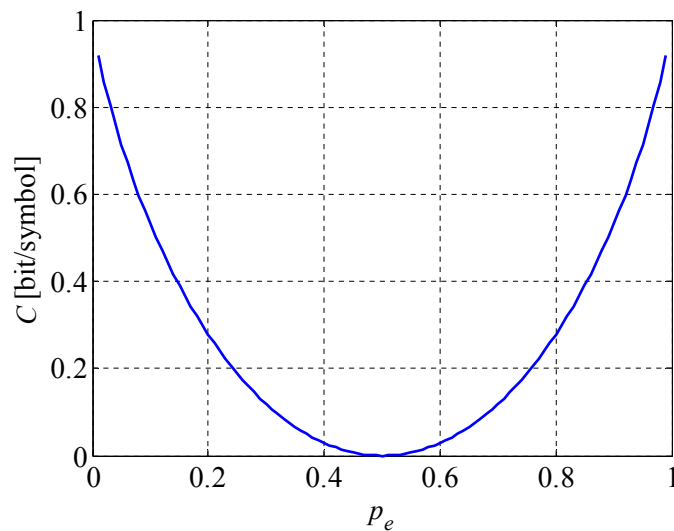
$$C = \max_{P(x)} \{H(Y) - H(Y|X)\} = 1 + (1 - p_e) \log_2(1 - p_e) + p_e \log_2 p_e \quad (0.59)$$

Αντικαθιστώντας $p_e=0.01$ βρίσκουμε $C=0.9192\text{bit/symbol}$.

Παράδειγμα 1.7

Να κάνετε μία γραφική παράσταση της χωρητικότητας του καναλιού στο Σχήμα 1-2 σε συνάρτηση με το p_e .

Λαμβάνοντας υπόψη το Παράδειγμα 1.6 και ειδικά την εξίσωση (0.59) η γραφική παράσταση της χωρητικότητας C ως συνάρτηση του p_e προκύπτει ως εξής:



Σχήμα 1-3: Η χωρητικότητα του συστήματος στο Σχήμα 1-2 συναρτήσει της πιθανότητας σφάλματος p_e .

Αξίζει να σχολιάσουμε μερικά πράγματα για το Σχήμα 1-3. Καταρχήν για $p_e=1/2$ η χωρητικότητα είναι ίση με μηδέν! Πράγματι δεν είναι δύσκολο να καταλάβουμε ότι στην περίπτωση αυτή το σύστημα μας "κάνει ότι του κατέβει" αφού η έξοδος Y είναι τελείως τυχαία και δεν εξαρτάται από την είσοδο X . Ότι και να είναι το X , το Y έχει 50% πιθανότητα να είναι 1 ή 0 επομένως το σύστημα αυτό είναι ισοδύναμο με το να αποφασίζει κανείς ρίχνοντας ένα νόμισμα κορώνα γράμματα.

Το επόμενο πολύ ενδιαφέρον (κατά την γνώμη μου) αποτέλεσμα είναι πως όσο αυξάνει η πιθανότητα σφάλματος p_e πέρα από το $1/2$ αυξάνει και η χωρητικότητα του καναλιού. Θα αναρωτιέστε βέβαια πως είναι δυνατόν να συμβαίνει αυτό. Σκεφτείτε το εξής: Αν το p_e είναι μεγαλύτερο του 50% τότε αυτό σημαίνει πως είναι πιο πιθανό το 0 να φτάσει στην έξοδο ως 1. Επομένως μπορούμε να υποδείξουμε στο δέκτη ότι αν λάβει 1 στην ουσία είναι πιο πιθανό να

έχουμε εκπέμψει 0. Οπότε απλά αντιστρέφουμε το bit που λαμβάνουμε και η πιθανότητα να κάνουμε σφάλμα γίνεται $1-p < 1/2$.

1.7 Η πρώτη μας γνωριμία με το θόρυβο

Τι συμβαίνει όμως σε ένα (λίγο) πιο πρακτικό σύστημα; Πως αλλοιώνεται η έξοδος Y σε σχέση με την είσοδο X ; Σε μία ευρεία κατηγορία συστημάτων θεωρούμε ότι η έξοδος Y συνδέεται με την είσοδο X βάση της σχέσης:

$$Y = X + N \quad (0.60)$$

όπου N είναι μία τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει τον θόρυβο που εισάγεται στο σύστημα και η οποία αλλοιώνει την είσοδο X . Αν λοιπόν ο πομπός εκπέμψει μία ακολουθία συμβόλων $(x_1, \dots, x_M)$ τότε στην έξοδο λαμβάνουμε την ακολουθία $(x_1+n_1, \dots, x_M+n_M)$ όπου τα n_i είναι τα δείγματα του θορύβου που "μολύνουνε" τα σύμβολα μας.

Στις τηλεπικοινωνίες αν έχουμε ένα σήμα $\zeta(t)$ τότε ως μέση ισχύ του σήματος σε ένα διάστημα $[-T/2, T/2]$, ορίζουμε την ποσότητα

$$P_\zeta = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \zeta^2(t) dt \quad (0.61)$$

Συνήθως θεωρούμε πως το διάστημα T είναι πολύ μεγάλο ($T \rightarrow \infty$) οπότε

$$P_\zeta = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \zeta^2(t) dt \quad (0.62)$$

Αν έχουμε τα δείγματα ζ_i ενός σήματος $\zeta(t)$ μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση ισχύ από την σχέση

$$P_\zeta = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \zeta_i^2 \quad (0.63)$$

και συνήθως θεωρούμε πως τα δείγματα είναι πάρα πολλά οπότε

$$P_\zeta = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \zeta_i^2 \quad (0.64)$$

Ορισμένες φορές τα σήματα είναι τυχαία. Τότε ως μέση ισχύ ορίζουμε την αναμενόμενη τιμή της μέσης ισχύος για κάθε δείγμα του τυχαίου σήματος. Όταν έχουμε να κάνουμε με συνεχή σήματα τότε,

$$P_\zeta = E \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \zeta^2(t) dt \right\} \quad (0.65)$$

ενώ αν έχουμε τα δείγματα των σημάτων, έπεται ότι

$$P_\zeta = E \left\{ \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \zeta_i^2 \right\} \quad (0.66)$$

Στην (0.60) είπαμε πως το N είναι τυχαίο και αντιπροσωπεύει τον θόρυβο. Αν P_N είναι η μέση ισχύ του θορύβου έπεται ότι για πολύ μεγάλο αριθμό δειγμάτων του θορύβου έπεται ότι

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M E \{ n_i^2 \} \cong P_N \quad (0.67)$$

Η προσέγγιση καλυτερεύει όσο αυξάνει ο αριθμός των δειγμάτων M . Αν υποθέσουμε δε ότι η στατιστική του θορύβου δεν αλλάζει με το χρόνο και πως τα δείγματα του έχουν την ίδια αναμενόμενη ισχύ θα έχουμε

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M E \{ n_i^2 \} = \frac{1}{M} M E \{ n_i^2 \} = E \{ n_i^2 \} \cong P_N \quad (0.68)$$

Φανταστείτε τώρα ότι καταγράφουμε μία πολύ μεγάλη ακολουθία δειγμάτων θορύβου n_m . Αν αυτά τα δείγματα παράγονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή του n^2 (δηλαδή το P_N) απλά παίρνοντας τον μέσο όρο των τιμών n_m^2 που έχουμε καταγράψει. Επομένως για μία πολύ μεγάλη ακολουθία ($M \rightarrow \infty$) θα έχουμε

$$P_N \cong \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M n_m^2 \quad (0.69)$$

Επίσης μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η αναμενόμενη τιμή του πλάτους του θορύβου είναι ίση με μηδέν, δηλαδή $E\{n_i\}=0$. Σε ένα δεύτερο επίπεδο, ο θόρυβος χαρακτηρίζεται και από την πυκνότητα πιθανότητας των δειγμάτων του $f_N(n)$. Ένα πολύ συνηθισμένο υπόδειγμα θορύβου είναι ο Gaussian θόρυβος για τον οποίο ισχύει:

$$f_N(n) = \frac{1}{P_N \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{n^2}{2P_N} \right) \quad (0.70)$$

Υπό προϋποθέσεις μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα δείγματα του θορύβου είναι ανεξάρτητα, δηλαδή η συνδυασμένη πυκνότητα πιθανότητας δύο δειγμάτων δίνεται από την:

$$f_N(n_i, n_j) = f_N(n_i) f_N(n_j) = \frac{1}{2\pi P_N^2} \exp \left(-\frac{n_i^2 + n_j^2}{2P_N} \right) \quad (0.71)$$

Ας γυρίσουμε τώρα πίσω στο σύστημα μας. Αν εκπέμφουμε την $(x_1, \dots, x_M)$ και λάβουμε την $(y_1, \dots, y_M) = (x_1 + n_1, \dots, x_M + n_M)$ πως θα αποφασίσουμε σε ποιιά σύμβολα αντιστοιχεί η δεύτερη ακολουθία χωρίς να γνωρίζουμε την πρώτη; (αν ξέραμε τι μεταδίδαμε στην είσοδο, τότε δεν θα χρειαζόμασταν το σύστημα επικοινωνίας μας...). Μπορούμε να συγκρίνουμε την $(y_1, \dots, y_M)$ με όλες τις πιθανές αρχικές ακολουθίες μετάδοσης $(z_1, \dots, z_M)$ και να επιλέξουμε αυτήν που απέχει το λιγότερο από την $(y_1, \dots, y_M)$. Πως υπολογίζουμε την απόσταση μεταξύ των $(y_1, \dots, y_M)$ και $(z_1, \dots, z_M)$; Ας πάρουμε την

περίπτωση όπου $M=2$ και μεταδίδουμε δυαδικά σύμβολα. Τότε οι πιθανές ακολουθίες εκπομπής (x_1, x_2) είναι οι 00, 01, 10, 11. Οι ακολουθίες αυτές παριστάνονται σε ένα σύστημα συντεταγμένων με τέσσερα σημεία που αποτελούν τις κορυφές ενός τετραγώνου όπως δείχνει και το Σχήμα 1-4.

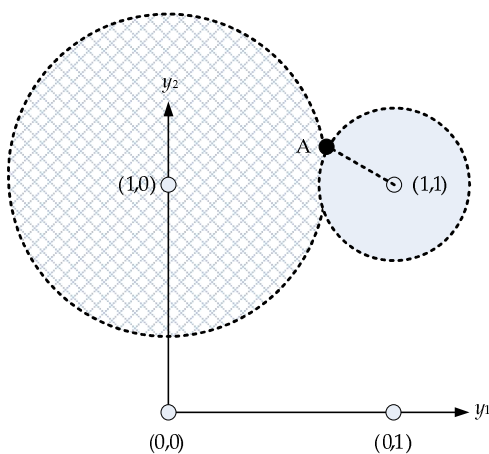
Ας υποθέσουμε τώρα πως βρισκόμαστε από την μεριά του δέκτη και λαμβάνουμε το σήμα $(y_1, y_2) = (0.8, 1.2)$ το οποίο αντιστοιχεί στο σημείο A στο Σχήμα 1-4. Θα πρέπει να αποφασίσουμε σε ποιά από τις τέσσερις πιθανές ακολουθίες με $M=2$ bit αντιστοιχεί η εν λόγω ακολουθία λήψης. Ο δέκτης μπορεί να υπολογίσει την απόσταση του σημείου A από τα τέσσερα πιθανά σημεία. Προφανώς η απόσταση μεταξύ του A και του $(1,1)$ είναι μικρότερη από τις αποστάσεις του από το $(1,0)$ το $(0,0)$ και το $(0,1)$ άρα είναι πιο πιθανό η ακολουθία που εκπέμψαμε στον πομπό να είναι η $(1,1)$, εκτός βέβαια αν ο θόρυβος είναι πολύ μεγάλος. Στην ουσία ο δέκτης υπολογίζει την απόσταση

$$d = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \quad (0.72)$$

και για τις τέσσερις πιθανές ακολουθίες εισόδου και καταλήγει σε αυτήν με το μικρότερο d . Εναλλακτικά θα μπορούσε κανείς να σκεφτεί ότι ο δέκτης γράφει τέσσερις κύκλους με κέντρα που συμπίπτουν με τα σημεία των ακολουθιών (x_1, x_2) που περνάνε από το σημείο A και επιλέγει τον κύκλο με την μικρότερη ακτίνα.

Η παραπάνω τεχνική θα μπορούσε να γενικευθεί στην περίπτωση όπου έχουμε μεγαλύτερες ακολουθίες ($M > 2$) και περισσότερα των δύο συμβόλων (π.χ. τα σύμβολα μας να ήταν τα 0,1,2,3). Αν το $M=3$ αντί για τους κύκλους στο Σχήμα 1-4 θα είχαμε σφαίρες με κέντρα τις πιθανές ακολουθίες εισόδου. Για $M > 3$ θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε ένα σύστημα με περισσότερους από τρεις άξονες που φυσικά δεν μπορούμε να το φανταστούμε γεωμετρικά. Ωστόσο η λογική είναι παρόμοια: θα επιλέγαμε την "υπερσφαίρα" που περνάει από το A και έχει την μικρότερη ακτίνα. Σε κάθε περίπτωση ο δέκτης υπολογίζει την απόσταση:

$$d = \left[\sum_{m=1}^M (x_m - y_m)^2 \right]^{1/2} \quad (0.73)$$



Σχήμα 1-4: Αποκωδικοποίηση μίας ακολουθίας από $M=2$ bit.

και καταλήγει στην ακολουθία $(x_1, \dots, x_M)$ με την μικρότερη απόσταση d . Εφόσον $y_m = x_m + n_m$ προκύπτει ότι

$$d^2 = \sum_{m=1}^M n_m^2 \quad (0.74)$$

Τι συμβαίνει στην περίπτωση όπου έχουμε πολύ μεγάλες ακολουθίες; Σύμφωνα με την (0.74) υπολογίζουμε το άθροισμα των τετραγώνων των δειγμάτων του θορύβου τα οποία αν υποθέσουμε ότι παράγονται στατιστικά ανεξάρτητα. Εφαρμόζοντας την (0.69) βλέπουμε ότι

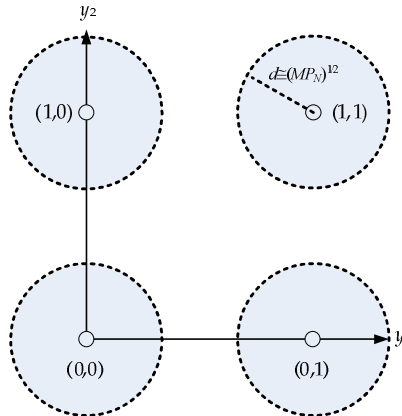
$$d^2 \cong MP_N \quad (0.75)$$

Άρα: η απόσταση των σημείων που αντιστοιχούν στην ακολουθία $(y_1, \dots, y_M)$ που λαμβάνουμε από την ακολουθία $(x_1, \dots, x_M)$ που εκπέψαμε είναι περίπου ίση με $d = (MP_N)^{1/2}$. Με άλλα λόγια η ακτίνα της υπερσφαίρας πάνω στην οποία βρίσκεται το A και η αρχική ακολουθία μετάδοσης $(x_1, \dots, x_M)$ είναι περίπου $d = (MP_N)^{1/2}$.

Ας ασχοληθούμε τώρα λιγάκι με τις ακολουθίες εισόδου. Ας υποθέσουμε πως μας δίνεται ένας περιορισμός για την ισχύ των συμβόλων x_m δηλαδή απαιτούμε η μέση ισχύ τους να είναι μικρότερη από P . Αυτό σημαίνει πως για όλες τις ακολουθίες εισόδου θα έχουμε:

$$MP \geq \sum_{m=1}^M x_m^2 \quad (0.76)$$

οπότε βλέπουμε ότι τα $(x_1, \dots, x_M)$ βρίσκονται σε μία μεγάλη υπερσφαίρα με ακτίνα $M^{1/2}(P+P_N)^{1/2}$. Εξαιτίας του θορύβου κάθε ακολουθία μετατοπίζεται σε μία υπερσφαίρα με ακτίνα $(MP_N)^{1/2}$ με κέντρο τα εκάστοτε $(x_1, \dots, x_M)$. Επομένως για να λάβει χώρα αξιόπιστη επικοινωνία θα πρέπει οι ακολουθίες αυτές να είναι αρκετά αραιά τοποθετημένες ώστε οι υπερσφαίρες τους να μην έχουν επικάλυψη. Στο Σχήμα 1-5 φαίνεται πως θα έπρεπε να είναι η κατάσταση στην περίπτωση όπου $M=2$ (αυτή η τιμή του M είναι πολύ μικρή αλλά έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να παρασταθεί εύκολα στις δύο διαστάσεις).



Σχήμα 1-5: Τοποθέτηση των κύκλων του θορύβου αρκετά αραιά ώστε να μην έχει πρόβλημα

Πόσες μικρές υπερσφαίρες $(MP_N)^{1/2}$ χωράει η μεγάλη υπερσφαίρα με ακτίνα $M^{1/2}(P+P_N)^{1/2}$; Εφόσον ο "όγκος" μίας υπερσφαίρας στις M διαστάσεις είναι ανάλογος της M -οστής δύναμης της ακτίνας⁶ της R^M έπεται ότι ο αριθμός των διαφορετικών ακολουθιών που μπορεί να χωρέσουν μέσα στην υπερσφαίρα με ακτίνα $M^{1/2}(P+P_N)^{1/2}$ είναι

$$N_M \cong \frac{(MP)^{M/2}}{(MP_N)^{M/2}} = \left(\frac{P_N + P}{P_N} \right)^{M/2} = \left(1 + \frac{P}{P_N} \right)^{M/2} \quad (0.77)$$

Στην παραπάνω εξίσωση N_M είναι ο αριθμός των διαφορετικών ακολουθιών που μπορούν να μεταδοθούν από το κανάλι μας. Ο μέσος αριθμός των bit ανά σύμβολο που μεταδίδονται αξιόπιστα είναι $1/M \log_2 N_M$ επομένως θα έχουμε για την χωρητικότητα του καναλιού,

$$C = \frac{1}{M} \log_2 N_M \cong \frac{1}{M} \log_2 \left(1 + \frac{P}{P_N} \right)^{M/2} = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{P}{P_N} \right) \quad (0.78)$$

Συνήθως στις επικοινωνίες πέρα από το πόση πληροφορία περνάμε ανά σύμβολο μας ενδιαφέρει και πόσο γρήγορα περνάει αυτή η πληροφορία από το κανάλι μας, δηλαδή ο ρυθμός bit/s. Όπως θα δούμε και παρακάτω αν το εύρος ζώνης που χρησιμοποιούμε είναι W , τότε ο ρυθμός συμβόλων που μπορούμε να περάσουμε από το κανάλι είναι $\cong 2W$. Επίσης συχνά η ισχύς του θορύβου είναι ανάλογος του εύρους ζώνης, δηλαδή $P_N \cong WN_0$ όπου N_0 είναι μία παράμετρος που ονομάζεται φασματική πυκνότητα θορύβου. Επομένως η χωρητικότητα του καναλιού (μετρούμενη σε bit ανά μονάδα χρόνου) θα είναι:

$$C_b = 2WC \cong W \log_2 \left(1 + \frac{P}{N_0 W} \right) \quad (0.79)$$

Η σχέση (0.79) είναι η διάσημη σχέση που διατύπωσε ο Shannon και συνδέει τον μέγιστο ρυθμό πληροφορίας που περνάει από ένα κανάλι με Gaussian θόρυβο, στο οποίο η ισχύς του θορύβου είναι ανάλογη του εύρους ζώνης W . Ας δούμε ένα παράδειγμα

Παράδειγμα 1.8

Υπολογίστε την χωρητικότητα ενός καναλιού με Gaussian θόρυβο στο οποίο το χρησιμοποιούμενο εύρος ζώνης είναι 4kHz ενώ το πηλίκο σήμα προς θόρυβο είναι 40dB.

Το πηλίκο σήμα-προς-θόρυβο (signal-to-noise ratio SNR) ορίζεται ως

$$\left(\frac{S}{N} \right) = \frac{P}{N_0 W} \quad (0.80)$$

Εφόσον $(S/N) = 40\text{dB}$ έπεται ότι $P/N_0/W = 10^4$ και επομένως $C_b = 4\text{kHz} \times \log_2(1+10^4) = 53\text{kb/s}$.

Παράδειγμα 1.9

⁶ Π.χ. στις δύο διαστάσεις όπου η υπερσφαίρα είναι στην ουσία ένας κύκλος είναι πR^2 ενώ στις τρεις διαστάσεις η υπερσφαίρα είναι μία κανονική τρισδιάστατη $4\pi R^3/3$.

Να υπολογίσετε το ελάχιστο ηλίκιο σήμα προς θόρυβο που χρειάζεται για να μεταδώσουμε αξιόπιστα με ρυθμό 5Mb/s σε ένα κανάλι με εύρος ζώνης 1MHz.

Ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης καθορίζεται από το C_b . Αν $C_b=5\text{Mb/s}$ έπεται ότι το απαιτούμενο SNR είναι

$$\frac{S}{N} = \frac{P}{N_0 W} = 2^{C_b/W} - 1 = 31 \quad (0.81)$$

Μετατρέποντας την παραπάνω τιμή στην λογαριθμική κλίκαμα έχουμε:

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{dB} = 14.9\text{dB} \quad (0.82)$$

1.8 Συμπεράσματα

Η ενότητα αυτή αποτέλεσε την πρώτη μας γνωριμία με τα τηλεπικοινωνιακά συστήματα σε ένα θεωρητικό επίπεδο. Μάθαμε για την έννοια της εντροπίας ως μέτρο μίας πηγής πληροφορίας. Εξετάσαμε πηγές χωρίς μνήμη και πηγές με μνήμη ενώ παράλληλα ορίσαμε την χωρητικότητα ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος. Υπό ορισμένες προϋποθέσεις είδαμε πως συνδέεται το εύρος ζώνης που είναι διαθέσιμο για επικοινωνία, το ηλίκιο σήμα-προς-θόρυβο και ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης bit.

Θα πρέπει να σημειωθεί πως τα αποτελέσματα σε αυτό το κεφάλαιο ήτανε θεωρητικά, χωρίς να εξειδικεύουν πολύ στην περιγραφή του συστήματος. Στα επόμενα κεφάλαια θα ασχοληθούμε εκτενέστερα με το πως είναι ένα πραγματικό σύστημα επικοινωνίας, πως μεταδίδεται και πως αλλοιώνεται η πληροφορία. Τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου θέτουν κάποια όρια στις επιδόσεις του συστήματος, αλλά η ακριβής επίδοση του θα πρέπει να υπολογιστεί λαμβάνοντας υπόψη την δομή του με μεγαλύτερη λεπτομέρεια. Στο επόμενο κεφάλαιο ασχολούμαστε λίγο πιο πρακτικά με το πως παράγεται η ψηφιακή πληροφορία.

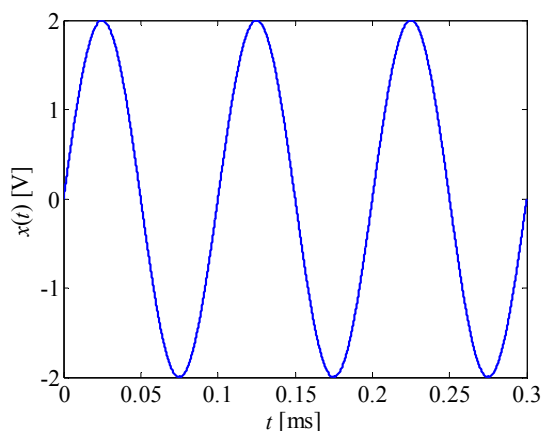
2. Μετατροπή από αναλογικό σε ψηφιακό

2.1 Εισαγωγικά

Ζούμε σε έναν αναλογικό (ως επί το πλείστον κόσμο) και τα αρκετά από τα σήματα τα οποία πρέπει να μεταδώσουμε είναι από τη φύση τους αναλογικά. Για παράδειγμα όταν μιλάμε στο μικρόφωνο η φωνή μας μετατρέπεται σε ηλεκτρικό ρεύμα το οποίο όταν καταγράφεται σε έναν παλμογράφο αντιστοιχεί σε μία συνεχή κυματομορφή. Θα πρέπει με κάποιον τρόπο το αναλογικό αυτό σήμα να μετατραπεί σε ψηφιακό ώστε να μεταδοθεί από το ψηφιακό μας τηλεπικοινωνιακό σύστημα. Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τις μεθόδους δειγματοληψίας και κβάντισης που έχουν ως κύριο σκοπό την μετατροπή του αναλογικού σήματος σε ψηφιακό (analog-to-digital conversion-ADC).

Με τον όρο δειγματοληψία εννοούμε πως σε ένα αναλογικό σήμα $x(t)$ θεωρούμε μόνο τα δείγματα $x(t_n)$ του σε διακριτές χρονικές στιγμές t_n οι οποίες συνήθως καθορίζονται από τη σχέση $t_n = n\Delta t$. Με τον όρο κβάντιση εννοούμε την διαδικασία όπου το πεδίο τιμών του $x(t)$ και επομένως και των $x(t_n)$ χωρίζεται σε έναν πεπερασμένο αριθμό διαστημάτων $[a_m \ b_m]$ και κάθε φορά που το $x(t_n)$ βρίσκεται εντός του $[a_m \ b_m]$ αναθέτουμε στο σήμα εξόδου (κβαντισμένο σήμα) μία συγκεκριμένη τιμή y_m που έχουμε προεπιλέξει. Η τιμή y_m θα βρίσκεται και αυτή εντός του $[a_m \ b_m]$.

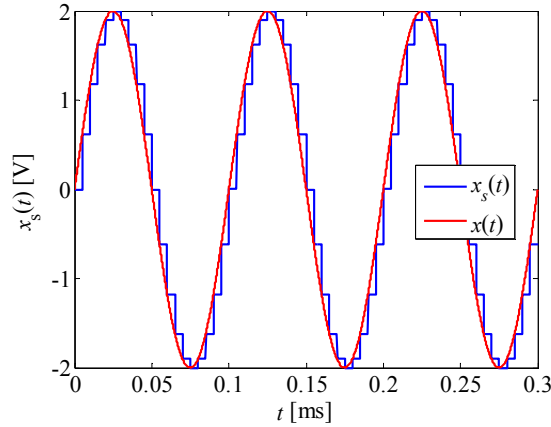
Ας τα δούμε αυτά με ένα παράδειγμα: θεωρούμε ένα ημιτονοειδές σήμα τάσης $x(t) = V_0 \cos(2\pi ft)$ με συχνότητα $f = 10\text{kHz}$ και πλάτος ίσο με $V_0 = 2\text{V}$. Στο Σχήμα 2-1 έχουμε παραστήσει γραφικά το αρχικό αναλογικό μας σε ένα διάστημα τριών περιόδων του από $t = 0\text{ms}$ μέχρι $t = 0.3\text{ms}$.



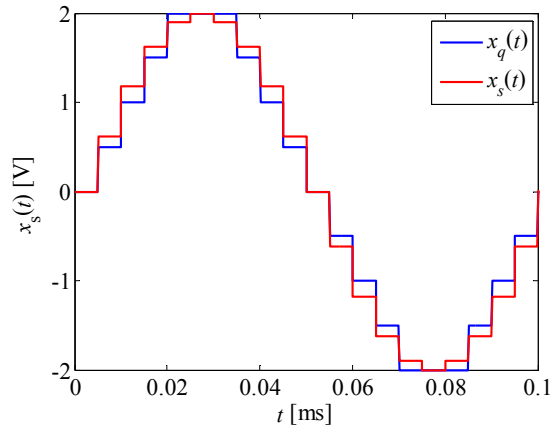
Σχήμα 2-1: Το αρχικό αναλογικό σήμα $x(t)$.

Στο Σχήμα 2-2 έχουμε παραστήσει γραφικά το δειγματοληπτημένο σήμα $x_s(t)$ σε σχέση με το αρχικό σήμα $x(t)$ θεωρώντας πως η περίοδος δειγματοληψίας είναι $\Delta t = 0.01\text{ms}$. Όπως περιμένουμε, το $x_s(t)$ παράγεται από τις τιμές του $x(t)$ στις χρονικές στιγμές $t_n = n\Delta t$. Στο Σχήμα 2-3 έχουμε παραστήσει γραφικά το κβαντισμένο σήμα $x_q(t)$ που παράγεται από την κβάντιση των δειγμάτων του $x(t)$ που απαρτίζουν το σήμα $x_s(t)$ θεωρώντας ότι το διάστημα τιμών από -2.25V έως 2.25V χωρίζεται $M_s = 9$ διαστήματα τιμών με μήκος 0.5V το κάθε ένα, δηλαδή $a_1 = -2.25\text{V}$, $b_1 = -1.75\text{V}$ ενώ $a_2 = -1.75\text{V}$, $b_2 = -1.25\text{V}$

κ.ο.κ. Παρατηρούμε πως υπάρχει κάποια διαφορά μεταξύ των τιμών των δειγμάτων του αρχικού σήματος και των τιμών του κβαντισμένου σήματος. Ο τρόπος με τον οποίο κβαντίζουμε το σήμα φυσικά είναι στην ευχέρεια μας. Αν έχουμε κατάλληλο hardware θα μπορούσαμε να χωρίσουμε το διάστημα σε $M_s=1000$ διαστήματα αντί μόνο για 9 οπότε να έχουμε πολύ λιγότερη παραμόρφωση.



Σχήμα 2-2: Το δειγματοληπτημένο σήμα $x_s(t)$ σε σχέση με το αρχικό σήμα $x(t)$.



Σχήμα 2-3: Το κβαντισμένο και δειγματοληπτημένο σήμα $x_q(t)$ σε σχέση με το δειγματοληπτημένο σήμα $x_s(t)$.

Στο εμπόριο κυκλοφορούν πολλά ολοκληρωμένα κυκλώματα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την δειγματοληψία και την κβάντιση του σήματος, οι λεγόμενοι μετατροπείς από αναλογικό σε ψηφιακό (analog-to-digital converters, ADCs). Η επιδόσεις τους χαρακτηρίζονται από κυρίως δύο στοιχεία, την ταχύτητα δειγματοληψίας $f_s=1/\Delta t$ και το πλήθος των διαστημάτων στο οποίο χωρίζουν ένα συγκεκριμένο πεδίο τιμών M_q .

2.2 Δειγματοληψία

Ας επικεντρωθούμε πρώτα στην λειτουργία της δειγματοληψίας. Τι συμβαίνει σε ένα σήμα όταν το δειγματοληπτούμε; Αρχικά από ότι φαίνεται, χάνεται κάποιο μέρος της πληροφορίας καθώς αποφασίζουμε να αναπαραστήσουμε ένα συνεχές σήμα $x(t)$ με μερικά δείγματα του $x(n\Delta t)$. Ωστόσο

υπάρχουν περιπτώσεις όπου η δειγματοληψία δεν οδηγεί σε παραμόρφωση του σήματος, με την έννοια ότι αυτή είναι αντιστρέψιμη.

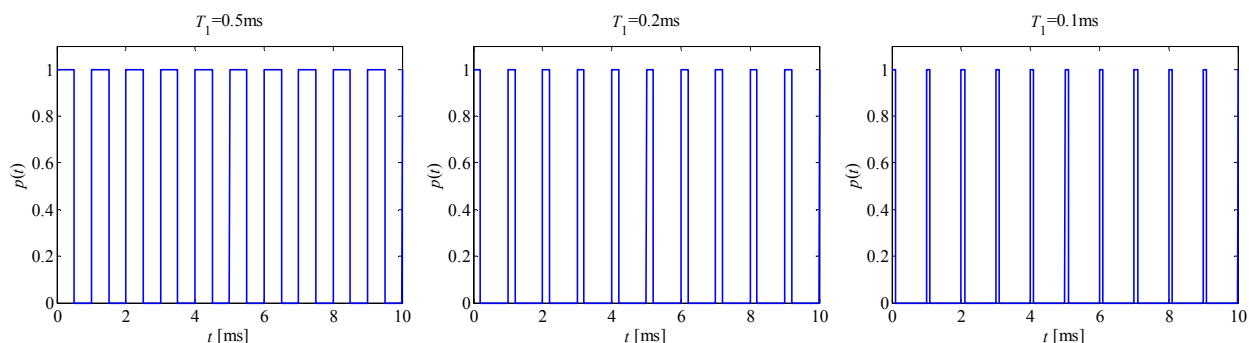
Για να το δούμε αυτό, ας θεωρήσουμε αρχικά πως το αρχικό σήμα $x(t)$ έχει πεπερασμένο εύρος ζώνης, δηλαδή αν $X(f)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$, δηλαδή

$$X(f) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx(t)e^{-j2\pi ft} \quad (1.1)$$

τότε υπάρχει ένα $W > 0$ για το οποίο

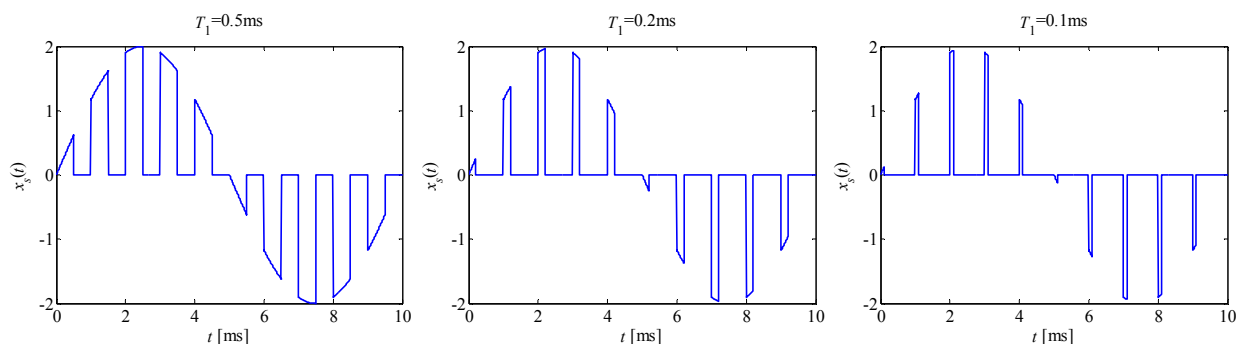
$$X(f) = 0 \text{ για } |f| \geq W \quad (1.2)$$

Ένας από τους πιθανούς τρόπους δειγματοληψίας, μαθηματικά περιγράφεται από τον πολλαπλασιασμό του αρχικού σήματος $x(t)$ με ένα περιοδικό σήμα $p(t)$ που αποτελείται από πολύ παλμούς με διάρκεια T_1 οι οποίοι απέχουν Δt . Για να το καταλάβουμε ας θεωρήσουμε τους παλμούς στο Σχήμα 2-4 οι οποίες αποτελούνται από παλμούς που επαναλαμβάνονται κάθε $\Delta t = 1\text{ms}$ και έχουν διάρκεια $T_1 = 0.5\text{ms}$, $T_1 = 0.2\text{ms}$ και $T_1 = 0.1\text{ms}$.



Σχήμα 2-4: Περιοδικές παλμοσειρές με σταδιακά μικρότερη διάρκεια παλμών.

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει όταν πολλαπλασιάζουμε αυτά τα σήματα με ένα σήμα $x(t)$ το οποίο είναι ημιτονοειδές και δίνεται από την σχέση $x(t) = V_0 \sin(2\pi ft)$. Στην περίπτωση αυτή επιλέγουμε $f = 100\text{Hz}$ και $V_0 = 2\text{V}$. Το αποτέλεσμα του γινομένου $x_s(t) = x(t)p(t)$ παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 2-5: Το γινόμενο $x_s(t) = x(t)p(t)$ για διαφορετικές τιμές του T_1 .

Παρατηρούμε από το Σχήμα 2-5 πως όσο στενεύουν οι παλμοί του $p(t)$ τόσο περισσότερα το $x_s(t)$ τείνει να αποτελείται από δείγματα του $x(t)$. Φυσικά υπάρχει μία διαφορά από το σήμα $x_s(t)$ στο Σχήμα 2-3: Σε εκείνη την περίπτωση το σήμα $x_s(t)$ παρέμενε ίσο με το δείγμα σε όλη την περίοδο δειγματοληψίας Δt . Στην περίπτωση στο Σχήμα 2-5 το σήμα παραμένει ίσο με το δείγμα μόνο στην διάρκεια T_1 του παλμού και μηδενίζεται. Η πρώτη περίπτωση συχνά αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως *sample-and-hold* (δειγματοληψία με διατήρηση της τιμής) και αποτελεί πιο πρακτική μορφή δειγματοληψίας. Η μορφή δειγματοληψίας που παρουσιάζουμε τώρα είναι κάπως διαφορετική αλλά το σημαντικό είναι και πως όταν το T_1 είναι πολύ μικρό και στις δύο περιπτώσεις αναπαριστάμε το σήμα με έναν αριθμό δειγμάτων τα οποία λαμβάνονται ανά τακτά χρονικά διαστήματα.

Από το Σχήμα 2-5 συνεπάγεται ότι η παραμόρφωση του σήματος είναι ιδιαίτερα μεγάλη στην περίπτωση όπου το T_1 είναι πολύ μικρό. Ας δούμε όμως τι συμβαίνει όταν το σήμα μας έχει πεπερασμένο εύρος ζώνης. Όπως κάθε περιοδικό σήμα⁷, η παλμοσειρά $p(t)$ αναλύεται σε μία σειρά Fourier,

$$p(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} P_m \exp(j2\pi m / \Delta t) \quad (1.3)$$

όπου

$$P_m = \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} p(t) e^{-j\frac{2\pi m}{\Delta t} t} dt = \frac{T_1}{\Delta t} \text{sinc}\left(\frac{mT_1}{\Delta t}\right) \quad (1.4)$$

Το σήμα $x_s(t)$ γράφεται ως εξής:

$$x_s(t) = x(t)p(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} P_m x(t) \exp(j2\pi m t / \Delta t) \quad (1.5)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του $x_s(t)$ δίνεται από την σχέση:

$$X_s(f) = F \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} P_m x(t) \exp(j2\pi m t / \Delta t) \right\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} P_m F \{ x(t) \exp(j2\pi m t / \Delta t) \} \quad (1.6)$$

Χρησιμοποιούμε τώρα την ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier που μας λέει πως αν $Y(f)=F\{y(t)\}$ είναι το φάσμα ενός σήματος $y(t)$ τότε το φάσμα του σήματος $y(t)\exp(j2\pi f_0 t)$ είναι $Y(f-f_0)$. Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή:

$$F \{ x(t) \exp(j2\pi m t / \Delta t) \} = X \left(f - \frac{m}{\Delta t} \right) \quad (1.7)$$

οπότε το φάσμα του $X_s(f)$ γράφεται ως εξής:

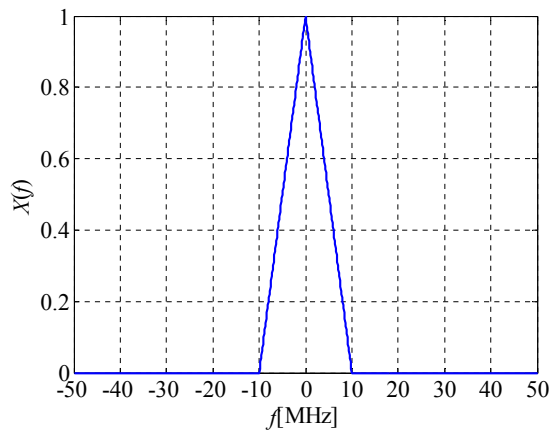
⁷ Εντάξει ίσως όχι και κάθε σήμα. Δεν πρέπει να είναι και πολύ άτακτο, δηλαδή να μην παρουσιάζει παρά διακριτές ασυνέχειες.

$$X_s(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} P_m X(f - m / \Delta t) \quad (1.8)$$

Αν και δεν της φαίνεται, η (1.8) είναι ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα. Μας λέει ότι το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος αποτελείται από το αρχικό φάσμα $X(f)$ πολλαπλασιασμένο με P_0 που λαμβάνουμε για $m=0$ συν διαδοχικές επικαλύψεις του φάσματος αυτού πολλαπλασιασμένες με P_m οι οποίες απέχουν φασματικά $m/\Delta t$ από το αρχικό φάσμα. Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.1

Δίνεται ένα σήμα με το τριγωνικό φάσμα του παρακάτω σχήματος



Σχήμα 2-6: Το αρχικό τριγωνικό φάσμα στο Παράδειγμα 2.1

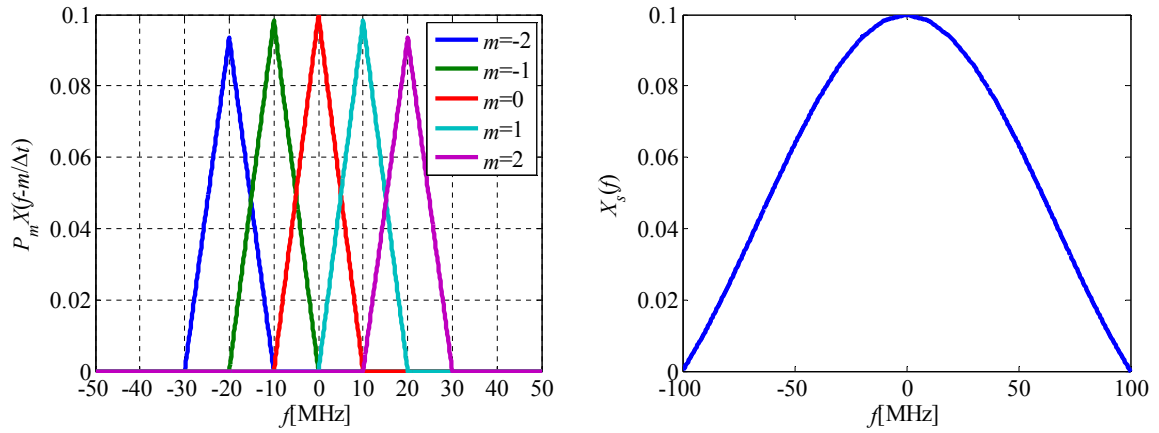
Να βρείτε το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος στην περίπτωση όπου το σήμα δειγματοληπτείται με ρυθμό α) $\Delta t=0.1\mu s$, β) $\Delta t=0.05\mu s$ και γ) $\Delta t=0.025\mu s$. Να θεωρήσετε πως οι παλμοί δειγματοληψίας έχουν διάρκεια $T_1=0.01\mu s$.

Για να υπολογίσουμε το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την (1.8). Οι συντελεστές P_m υπολογίζονται από την (1.4)⁸ και οι τιμές του φαίνονται στον παρακάτω πίνακα για ορισμένες τιμές του m θεωρώντας ότι $\Delta t=0.1\mu s$ και $T_1=0.01\mu s$.

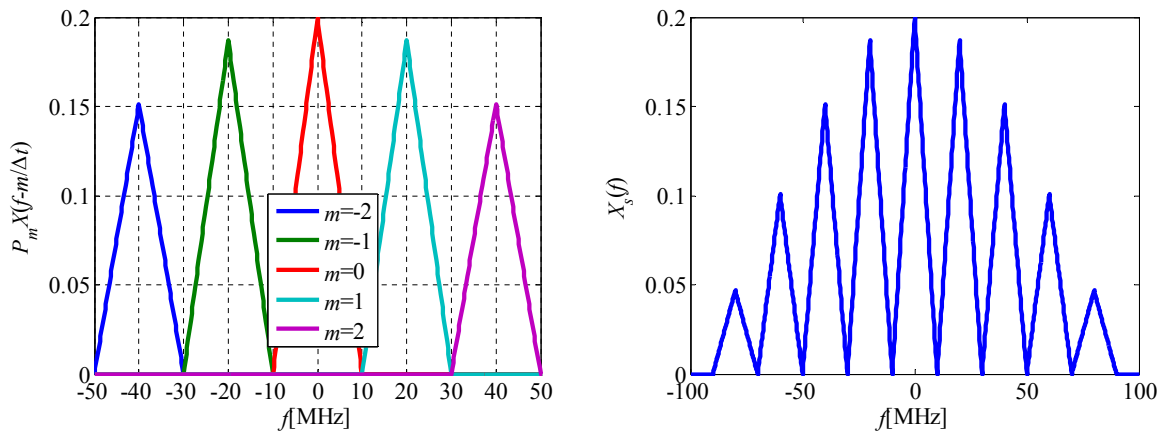
Συντελεστής	Τιμή
$P_{\pm 3}$	0.0858
$P_{\pm 2}$	0.0935
$P_{\pm 1}$	0.0984
P_0	0.1

Τα φάσματα $P_m X(f-m/\Delta t)$ αποτελούνται από διαδοχικές μετατοπίσεις του αρχικού φάσματος $X(f)$ στο Σχήμα 2-6 πολλαπλασιασμένα με τον εκάστοτε συντελεστή P_m . Στο Σχήμα 2-7 έχουμε παραστήσει γραφικά τα φάσματα αυτά στην πρώτη περίπτωση όπου $\Delta t=0.1\mu s$ και $T_1=0.01\mu s$.

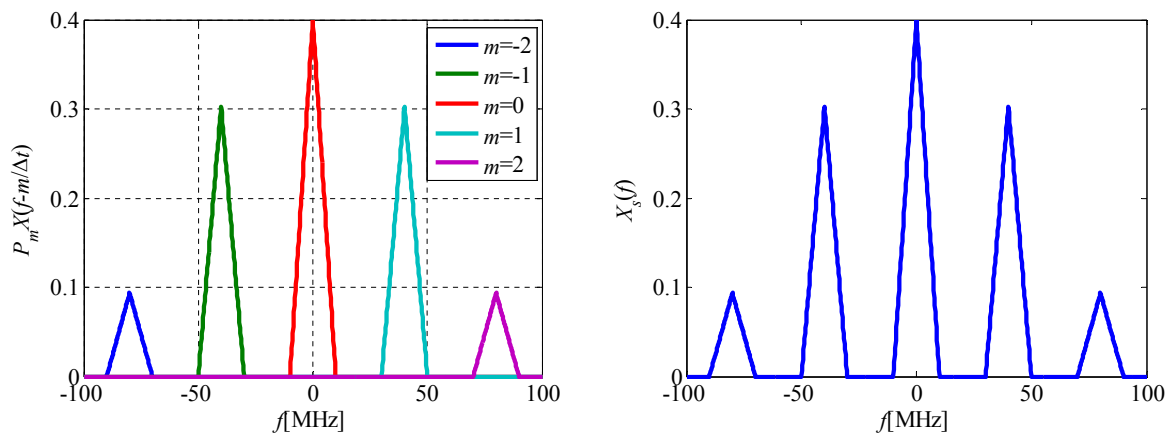
⁸ Θυμηθείτε ότι $\text{sinc}(x)=\sin(\pi x)/(\pi x)$ αν $x \neq 0$ και $\text{sinc}(0)=1$.



Σχήμα 2-7: Μερικά από τα φάσματα $P_m X(f-m/\Delta t)$ καθώς και το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος στην περίπτωση όπου $T_1=0.01\mu s$ και $\Delta t=0.1\mu s$.



Σχήμα 2-8: Μερικά από τα φάσματα $P_m X(f-m/\Delta t)$ καθώς και το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος στην περίπτωση όπου $T_1=0.01\mu s$ και $\Delta t=0.05\mu s$.

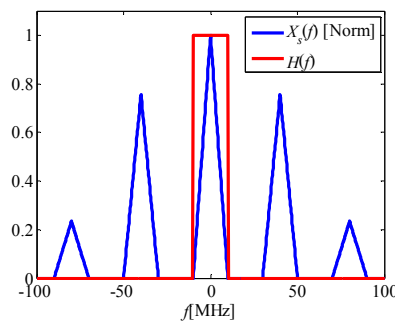


Σχήμα 2-9: Μερικά από τα φάσματα $P_m X(f-m/\Delta t)$ καθώς και το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος στην περίπτωση όπου $T_1=0.01\mu s$ και $T_1=0.01\mu s$ και $\Delta t=0.05\mu s$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση στο Σχήμα 2-7 το φάσμα του σήματος παρουσιάζει σημαντική διεύρυνση ενώ στην περίπτωση στο Σχήμα 2-8 και Σχήμα 2-9 όπου $\Delta t=0.05\mu s$ και $\Delta t=0.025\mu s$ αντίστοιχα, υπάρχει πάλι σημαντική παραμόρφωση, ωστόσο το αρχικό φάσμα ξεχωρίζει σε σχέση με τα γειτονικά φάσματα.

Η τελευταία παρατήρηση από το Παράδειγμα 2.1 είναι πολύ σημαντική: Αν η δειγματοληψία του σήματος γίνει με αρκετά μεγάλο ρυθμό $1/\Delta t$ τότε τα φάσματα $P_m X(f-m/\Delta t)$ δεν παρουσιάζουν επικάλυψη. Αν το σήμα έχει πεπερασμένο εύρος ζώνης, δηλαδή $X(f)=0$ για $|f|>W$ έπεται ότι αν $1/\Delta t>2W$ τότε τα πλευρικά φάσματα $P_{\pm 1} X(f\pm 1/\Delta t)$ δεν επικαλύπτονται με το αρχικό φάσμα $P_0 X(f)$ και επομένως αν περάσουμε το σήμα από ένα φίλτρο το οποίο αποκόπτει συχνότητες $|f|>W$ τότε στην έξοδο του φίλτρου θα λάβουμε το αρχικό σήμα. Στο Σχήμα 2-10 έχουμε παραστήσει γραφικά τη συνάρτηση το κανονικοποιημένο (ως προς την μονάδα) φάσμα του σήματος και ένα ορθογώνιο φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $H(f)$ η οποία διέπεται από την σχέση:

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq W \\ 0 & |f| > W \end{cases} \quad (1.9)$$



Σχήμα 2-10: Το κανονικοποιημένο φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος και η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου που χρησιμοποιούμε για να ανακτήσουμε το αρχικό σήμα.

Το φάσμα του σήματος που προκύπτει στην έξοδο του φίλτρου είναι $H(f)X_s(f)$ και είναι εύκολο να δούμε ότι στην ουσία πρόκειται για ένα φάσμα ανάλογο του $X(f)$. Συνοψίζουμε:

Αν ένα σήμα με πεπερασμένο εύρος ζώνης W δειγματοληπτηθεί με ρυθμό $f_s=1/\Delta t$ μεγαλύτερο ή ίσο από το $2W$ τότε το αρχικό σήμα είναι δυνατόν να προκύψει από το δειγματοληπτημένο σήμα με την χρήση ενός φίλτρου.

Ο ρυθμός δειγματοληψίας $f_s=2W$ ονομάζεται ρυθμός Nyquist και είναι ο ελάχιστος ρυθμός δειγματοληψίας που χρειάζεται ώστε να μην υπάρχει παραμόρφωση του σήματος μετά την έξοδο του φίλτρου. Στην περίπτωση στο Παράδειγμα 2.1, ο ρυθμός Nyquist είναι $f_s=2W=20\text{MHz}$ που αντιστοιχεί σε μία περίοδο δειγματοληψίας $\Delta t=1/f_s=0.05\mu s$ και αντιστοιχεί στο Σχήμα 2-8. Όπως βλέπουμε στην περίπτωση αυτή, ο διαχωρισμός των διαδοχικών φασμάτων είναι οριακά δυνατός⁹.

⁹ Ορθογώνια φίλτρα δεν υπάρχουνε ωστόσο στην πράξη, οπότε πρέπει κανείς να αρκεστεί σε μία προσέγγιση τους. Αυτό σημαίνει πως ο ρυθμός δειγματοληψίας θα πρέπει να είναι λίγο μεγαλύτερος από $2W$.

Με την χρήση του ορθογώνιου φίλτρου λαμβάνουμε το φάσμα $P_0X(f)$ και εφόσον $P_0=T_1/\Delta t$ έπεται ότι το φάσμα αυτό ισούται με $(T_1/\Delta t)X(f)$, είναι δηλαδή υποβαθμισμένο αφού πολλαπλασιάζεται με ένα παράγοντα $T_1/\Delta t < 1$. Αν η παλμοσειρά $p(t)$ έχει πλάτος $\Delta t/T_1$ αντί για 1, τότε στην έξοδο του φίλτρου θα λαμβάναμε απευθείας το φάσμα $X(f)$ χωρίς καμία υποβάθμιση. Η παλμοσειρά $p(t)$ γράφεται και ως εξής:

$$p(t) = \Delta t \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d(t - m\Delta t) \quad (1.10)$$

όπου $d(t)$ είναι ένας ορθογώνιος απομονωμένος παλμός

$$d(t) = \begin{cases} 1/T_1 & 0 \leq t \leq T_1 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (1.11)$$

Η (1.10) μας λέει ότι η περιοδική παλμοσειρά $p(t)$ είναι μία περιοδική υπέρθεση από ορθογώνιους απομονωμένους παλμούς $d(t)$ μετατοπισμένους σε θέση κατά ακέραια πολλαπλάσια του Δt . Οι συντελεστές Fourier του $p(t)$ προκύπτουν ως εξής:

$$P_m = \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} p(t) e^{-j\frac{2\pi m}{\Delta t}t} dt = \text{sinc}\left(\frac{mT_1}{\Delta t}\right) \quad (1.12)$$

Όπως περιμέναμε, $P_0=1$ οπότε στην έξοδο του φίλτρου λαμβάνουμε το αρχικό φάσμα $P_0X(f)=X(f)$. Ας σκεφτούμε τι συμβαίνει όσο μικραίνει το T_1 . Ο παλμός $d(t)$ αυξάνει σε πλάτος αλλά μειώνεται σε διάρκεια. Ωστόσο το εμβαδόν το οποίο βρίσκεται υπό τον παλμό παραμένει σταθερό, ανεξάρτητο από το T_1 και ίσο με:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} dt = 1 \quad (1.13)$$

Στο όριο $T_1 \rightarrow 0$, ο παλμός αποκτά άπειρο πλάτος και μηδενική διάρκεια, ωστόσο το εμβαδόν του παραμένει ίσο με 1 σύμφωνα με την (1.13). Οι παραπάνω ιδιότητες είναι οι ιδιότητες της συνάρτησης $\delta(t)$ και επομένως στο όριο αυτό, $d(t) \rightarrow \delta(t)$ και η παλμοσειρά (1.10) γράφεται ως εξής:

$$p(t) = \Delta t \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - m\Delta t) \quad (1.14)$$

ενώ το δειγματοληπτημένο σήμα γράφεται ως:

$$x_s(t) = x(t)p(t) = \Delta t x(t) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - m\Delta t) = \Delta t \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m\Delta t) \delta(t - m\Delta t) \quad (1.15)$$

η τελευταία ισότητα στην (1.15) ισχύει επειδή $\delta(t)=0$ για $t \neq 0$ οπότε $\delta(t-m\Delta t)=0$ για $t \neq m\Delta t$ επομένως $x(t)\delta(t-m\Delta t)=x(m\Delta t)\delta(t-m\Delta t)$. Σύμφωνα με την (1.15) το $x_s(t)$ σχηματίζεται από τα δείγματα του $x(t)$ τα οποία απέχουν χρονικά Δt , έχουμε δηλαδή την περίπτωση της ιδανικής δειγματοληψίας που το δειγματοληπτημένο σήμα αποτελείται μόνο από ισαπέχοντα στον άξονα του χρόνου δείγματα του

σήματος. Οι συντελεστές Fourier του $p(t)$ προκύπτουν από την (1.12), θέτοντας $T_1 \rightarrow 0$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το όριο του $\text{sinc}(x)$ όταν το $x \rightarrow 0$ είναι ίσο με 1, οπότε

$$P_m = \lim_{T_1 \rightarrow 0} \text{sinc}\left(\frac{mT_1}{\Delta t}\right) = 1 \quad (1.16)$$

Το φάσμα του δειγματοληπτημένο σήματος προκύπτει από την (1.8) ως

$$X_s(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(f - m / \Delta t) \quad (1.17)$$

Επομένως:

Ακόμα και στην θεωρητική περίπτωση της ιδανικής δειγματοληψίας με πολύ στενούς παλμούς (διάρκειας αυθαίρετα μικρής) είναι δυνατόν να ανακτήσουμε το αρχικό σήμα από το δειγματοληπτημένο σήμα με την χρήση ενός φίλτρου αρκεί βέβαια να έχουμε δειγματοληπτήσει ρυθμό $f_s = 1/\Delta t$ μεγαλύτερο ή ίσο από το $2W$.

2.3 Κβάντιση

Το επόμενο βήμα μετά την δειγματοληψία είναι όπως συζητήσαμε και στην ενότητα 2.1 η κβάντιση των δειγμάτων. Η κβάντιση είναι η διαδικασία κατά την οποία το πεδίο τιμών του σήματος διαιρείται σε έναν συγκεκριμένο αριθμό M υπο-διαστημάτων $[a_m, a_{m+1}]$ όπου $0 \leq m \leq M-1$, και επιλέγουμε μία τιμή c_m μέσα από κάθε υποδιαστήμα $[a_m, a_{m+1}]$ να αντιπροσωπεύει τις τιμές του αρχικού σήματος στο υποδιαστήμα αυτό. Μαθηματικά γράφουμε ότι το κβαντισμένο σήμα $x_q(t)$ διέπεται από την σχέση

$$x_q(t) = c_m \text{ εάν } a_m < x_s(t) \leq a_{m+1} \quad (1.18)$$

όπου $x_s(t)$ είναι το σήμα που παράγεται κατά την δειγματοληψία. Τα δείγματα $x_i = x(k\Delta t)$ από τα οποία αποτελείται το $x_s(t)$ μπορούν να θεωρηθούν πως παράγονται από μία τυχαία μεταβλητή X και η κβάντιση μετασχηματίζει αυτή την τυχαία μεταβλητή σε μία νέα σύμφωνα με την

$$Y = c_m \text{ εάν } a_m < X \leq a_{m+1} \quad (1.19)$$

Δυστυχώς αντίθετα με την δειγματοληψία ενός σήματος περιορισμένου εύρους ζώνης, δεν υπάρχει γνωστός τρόπος έτσι ώστε το σφάλμα που εισάγεται από την κβάντιση να είναι μηδέν. Ένα μέτρο του σφάλματος είναι η αναμενόμενη τετραγωνική απόσταση,

$$d(X, Y) = E\{(X - Y)^2\} \quad (1.20)$$

Δεδομένου ότι το Y παίρνει συγκεκριμένες τιμές, δηλαδή τις c_m μπορούμε να γράψουμε την (1.20) και ως εξής:

$$d(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - y)^2 f_X(x) dx = \sum_{m=0}^{M-1} \int_{a_m}^{a_{m+1}} (x - c_m)^2 f_X(x) dx \quad (1.21)$$

Όσο πιο κοντά είναι η κβαντισμένη έκδοση της X , δηλαδή η Y στο X τόσο μικρότερο είναι και το σφάλμα που υπολογίζει η (1.20). Συχνά το $(X-Y)$ καλείται θόρυβος κβάντισης και επομένως η (1.20) υπολογίζει την ισχύ του θορύβου κβάντισης. Η δε ποσότητα

$$\text{SQNR} = \frac{E\{X^2\}}{E\{(X-Y)^2\}} = \frac{E\{X^2\}}{d(X,Y)} \quad (1.22)$$

ονομάζεται πηλίκo σήματος προς θόρυβο κβάντισης¹⁰ και παίζει παρόμοιο ρόλο με το πηλίκo SNR που ορίσαμε στην ενότητα 1.7.

Στην περίπτωση όπου το διάστημα τιμών της X είναι πεπερασμένο μπορούμε να επιλέξουμε τα διαστήματα κβάντισης να έχουν το ίδιο μέγεθος Δ , οπότε $a_{m+1}-a_m=\Delta$ για $0 \leq m \leq M-1$. Για να ισχύει η προηγούμενη συνθήκη αρκεί να έχουμε $a_m=a_0+m\Delta$ όπου $\Delta=(a_M-a_0)/M$. Επίσης μπορούμε να επιλέξουμε τις τιμές κβάντισης c_m να βρίσκονται στο κέντρο των διαστημάτων, $c_{m+1}=(a_m+a_{m+1})/2$ για $0 \leq m \leq M-1$. Ο παραπάνω τρόπος επιλογής των διαστημάτων και των τιμών κβάντισης αντιστοιχεί στην ομοιόμορφη κβάντιση. Ας δούμε ένα παράδειγμα

Παράδειγμα 2.2

Τα δείγματα ενός σήματος ακολουθούν ομοιόμορφη τυχαία κατανομή εντός του διαστήματος $[0 \ 1]$. Αν χρησιμοποιήσουμε ομοιόμορφη κβάντιση με $M=4$ διαστήματα, να υπολογίσετε το SQNR.

Έχουμε $M=4$ ενώ τα άκρα του πεδίου τιμών είναι $a_0=0$ και $a_4=1$. Σύμφωνα με τα παραπάνω θα έχουμε $\Delta=(a_4-a_0)/4=0.25$ οπότε τα διαστήματα κβάντισης είναι τα $[0 \ 0.25)$, $[0.25 \ 0.5)$, $[0.5 \ 0.75)$ και $[0.75 \ 1]$ ενώ οι αντίστοιχες τιμές c_m είναι $c_{m+1}=(a_m+a_{m+1})/2$ οπότε $c_1=0.125$, $c_2=0.375$, $c_3=0.625$ και $c_4=0.875$. Για να καθορίσουμε την ισχύ του αρχικού σήματος X έχουμε

$$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \quad (1.23)$$

όπου η $f_X(x)$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας του X και είναι ίση με 1 εντός του $[0 \ 1]$ σύμφωνα με την εκφώνηση. Για την ισχύ του θορύβου κβάντισης έχουμε ας υπολογίσουμε το $X-Y$ ανάλογα με την τιμή του X . Αν $X \in [0 \ 0.25]$ τότε $Y=c_1=0.125$ και ούτω καθεξής. Μπορούμε να γράψουμε την αναμενόμενη τιμή $d(X,Y)=E\{(X-Y)^2\}$ ως εξής:

$$d(X,Y) = \sum_{m=0}^3 \int_{a_m}^{a_{m+1}} (x-c_m)^2 f_X(x) dx = \sum_{m=0}^3 \int_{a_m}^{a_{m+1}} (x-c_m)^2 dx \quad (1.24)$$

Τα ολοκλήρωματα αυτά υπολογίζονται εύκολα:

¹⁰ Αγγλιστί signal to quantization noise ratio, πηλίκo σήματος προς θόρυβο κβάντισης.

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} (x - c_i)^2 dx = \frac{(a_{i+1} - c_i)^3}{3} - \frac{(a_i - c_i)^3}{3} = \frac{2}{3} \left[\frac{b_i - a_i}{2} \right]^3 = \frac{1}{12} \Delta^3 \quad (1.25)$$

Εφαρμόζοντας την (1.24) έχουμε:

$$E\{(X - Y)^2\} = \frac{M\Delta^3}{12} = 0.0052 \quad (1.26)$$

οπότε

$$\text{SQNR} = \frac{E\{X^2\}}{E\{(X - Y)^2\}} = 64 \cong 18\text{dB} \quad (1.27)$$

Παράδειγμα 2.3

Να επαναλάβετε τους υπολογισμούς στο Παράδειγμα 2.2 στην περίπτωση όπου χρησιμοποιούμε $M=32$ διαστήματα κβάντισης.

Έχουμε $M=32$ ενώ τα άκρα του πεδίου τιμών είναι $a_0=0$ και $a_{32}=1$. Ο υπολογισμός προχωράει όπως και στο Παράδειγμα 2.2. Το Δ είναι τώρα $\Delta=(a_{32}-a_0)/32=0.0313$ και εφαρμόζοντας την σχέση (1.26) για τις νέες τιμές του Δ και του M έχουμε

$$E\{(X - Y)^2\} = \frac{M\Delta^3}{12} = 8.13 \times 10^{-5} \quad (1.28)$$

και τελικά

$$\text{SQNR} = \frac{E\{X^2\}}{E\{(X - Y)^2\}} = 4096 \cong 36.1\text{dB} \quad (1.29)$$

Παρατηρούμε επομένως μία σημαντική μείωση του SQNR με την αύξηση των διαστημάτων κβάντισης όπως άλλωστε είναι και αναμενόμενο.

Μέχρι τώρα θεωρήσαμε ότι το διάστημα τιμών της X είναι πεπερασμένο. Τι συμβαίνει όταν το διάστημα τιμών είναι όλος ο πραγματικός άξονας; Τότε απλά επιλέγουμε τα a_0 και a_M έτσι ώστε η πιθανότητα να έχουμε $P(X < a_0)$ και $P(X > a_M)$ να είναι πολύ μικρές, με άλλα λόγια οι τιμές της X που βρίσκονται εκτός του $[a_0, a_M]$ να συμβαίνουν πολύ σπάνια. Στη συνέχεια ορίζουμε πάλι τις τιμές κβάντισης c_m με τον ίδιο τρόπο όπως και πριν. Στην περίπτωση όπου $X < a_0$ απλά θέτουμε το Y ίσο με c_1 ενώ στην περίπτωση όπου $X > a_M$ θέτουμε $Y = c_M$. Στην ουσία δηλαδή τα δύο εξωτερικά διαστήματα κβάντισης είναι $(-\infty, a_1]$ και $[a_M, +\infty)$ και στην περίπτωση όπου το X «πέσει» εντός αυτών η έξοδος του κβαντιστή θα είναι c_1 και c_M αντίστοιχα. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση για το $d(X, Y)$ γράφεται ως εξής:

$$d(X, Y) = \int_{-\infty}^{a_1} (x - c_1)^2 f_X(x) dx + \sum_{m=1}^{M-2} \int_{a_m}^{a_{m+1}} (x - c_m)^2 f_X(x) dx + \int_{a_{M-1}}^{+\infty} (x - c_M)^2 f_X(x) dx \quad (1.30)$$

Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα 2.4

Να υπολογίσετε το SQNR για ένα κβαντιστή με $M=4$ διαστήματα κβάντισης στην περίπτωση όπου η πυκνότητα πιθανότητας του X θα δίνεται από μία Gaussian με μέση τιμή $m_x=0$ και τυπική απόκλιση $\sigma=1$. Να θεωρήσετε ομοιόμορφη κβάντιση με $a_0=-3$ και $a_M=3$.

Υπολογίζουμε αρχικά το διάστημα $\Delta=(a_M-a_0)/M=1.5$. Επομένως τα άκρα των διαστημάτων θα είναι $a_0=-3$, $a_1=-1.5$, $a_2=0$, $a_3=1.5$ και $a_4=3$. Η ισχύς του αρχικού σήματος είναι

$$E\{X^2\} = \sigma^2 = 1 \quad (1.31)$$

Στη συνέχεια προχωράμε στον υπολογισμό του $d(X,Y)$. Θα πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι η πυκνότητα πιθανότητας στην νέα περίπτωση δίνεται από την σχέση:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.32)$$

Εφαρμόζουμε την (1.30) για το $d(X,Y)$:

$$d(X,Y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{a_1} (x-c_1)^2 e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx + \sum_{m=1}^{M-2} \int_{a_m}^{a_{m+1}} (x-c_m)^2 e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx + \int_{a_{M-1}}^{+\infty} (x-c_M)^2 e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx \right\} \quad (1.33)$$

Σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση στο τα ολοκληρώματα στο Παράδειγμα 2.2 δεν μπορούν να υπολογιστούν «με το χέρι» δηλαδή αναλυτικά. Ωστόσο αν χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα $(x-c_i)^2 = x^2 - 2cx + c^2$ θα έχουμε

$$d(X,Y) = d_1 + d_2 + d_3 \quad (1.34)$$

όπου

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{a_1} x^2 e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx + \sum_{m=1}^{M-2} \int_{a_m}^{a_{m+1}} x^2 e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx + \int_{a_{M-1}}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx \right\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx \quad (1.35)$$

$$d_2 = \frac{-2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left\{ c_1 \int_{-\infty}^{a_1} x e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx + \sum_{m=1}^{M-2} c_m \int_{a_m}^{a_{m+1}} x e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx + c_M \int_{a_{M-1}}^{+\infty} x e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx \right\} \quad (1.36)$$

$$d_3 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left\{ c_1^2 \int_{-\infty}^{a_1} e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx + \sum_{m=1}^{M-2} c_m^2 \int_{a_m}^{a_{m+1}} e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx + c_M^2 \int_{a_{M-1}}^{+\infty} e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx \right\} \quad (1.37)$$

Στην (1.35) απλά χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα του αθροίσματος των ολοκληρωμάτων. Δεν είναι δύσκολο να αναγνωρίσουμε ότι

$$d_1 = E\{X^2\} = \sigma^2 \quad (1.38)$$

Στη συνέχεια προχωράμε στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int_{\alpha}^{\beta} x e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx \quad (1.39)$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι εφόσον $d(-x^2)=-2xdx$, αν θέσουμε $z=-x^2/2\sigma^2$ θα έχουμε $dz=-xdx/\sigma^2$ οπότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} x e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx = -\sigma^2 \int_{z_{\alpha}}^{z_{\beta}} e^z dz = \sigma^2 \left(e^{-\alpha^2/(2\sigma^2)} - e^{-\beta^2/(2\sigma^2)} \right) \quad (1.40)$$

όπου $z_{\beta}=-\beta^2/2\sigma^2$ και $z_{\alpha}=-\alpha^2/2\sigma^2$. Χρησιμοποιώντας την (1.40) θα έχουμε:

$$d_2 = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ -c_1 \sigma e^{-a_1^2/(2\sigma^2)} + \sigma \sum_{m=1}^{M-2} c_m \left(e^{-a_{m+1}^2/(2\sigma^2)} - e^{-a_m^2/(2\sigma^2)} \right) + c_M \sigma e^{-a_{M-1}^2/(2\sigma^2)} \right\} \quad (1.41)$$

Για τον υπολογισμό του d_3 στην (1.37) πρέπει να υπολογίσουμε ολοκληρώματα της μορφής:

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx \quad (1.42)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό δεν υπολογίζεται αναλυτικά, ωστόσο υπολογίζεται με την βοήθεια της συνάρτησης σφάλματος erf η οποία ορίζεται από την:

$$\text{erf}(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\zeta} e^{-\zeta^2} d\zeta \quad (1.43)$$

Αν θέσουμε $\zeta=x/2^{1/2}/\sigma$ στην (1.42) τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx = \sigma \sqrt{2} \int_{\zeta_{\alpha}}^{\zeta_{\beta}} e^{-\zeta^2} d\zeta = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \text{erf}\left(\frac{\beta}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \text{erf}\left(\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right\} \quad (1.44)$$

οπότε η (1.37) θα δώσει:

$$d_3 = \frac{1}{2} \left\{ c_1^2 \left[1 + \text{erf}\left(\frac{a_1}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right] + \sum_{m=2}^{M-1} c_m^2 \left[\text{erf}\left(\frac{a_m}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \text{erf}\left(\frac{a_{m-1}}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right] + c_M^2 \left[1 - \text{erf}\left(\frac{a_{M-1}}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right] \right\} \quad (1.45)$$

Εφόσον έχουμε υπολογίσει τα d_1 , d_2 και d_3 είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το $d(X,Y)$ βάσει της (1.34). Αντικαθιστώντας έχουμε $d_1=1$, $d_2=1.974$ και $d_3=1.164$, οπότε $d(X,Y)=d_1+d_2+d_3=0.1898$ και ο λόγος SQNR είναι $\sigma^2/d(X,Y)=5.26$ (7.2dB).

Παράδειγμα 2.5

Να επαναλάβετε τον ίδιο υπολογισμό στην περίπτωση όπου διαιρούμε το διάστημα των πραγματικών αριθμών σε $M=32$ διαστήματα. Να θεωρήσετε:

α) $a_0=-3$ και $a_M=3$

β) $a_0=-5$ και $a_M=5$.

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία όπως στο Παράδειγμα 2.4. Στην (α) περίπτωση βρίσκουμε $d(X,Y)=0.0035$ και επομένως $SQNR=\sigma^2/d(X,Y)=286$ (24.6dB). Στην περίπτωση (β) βρίσκουμε $d(X,Y)=0.0081$ και επομένως $SQNR=\sigma^2/d(X,Y)=286$ (20.8dB). Παρατηρούμε επομένως πως ανάλογα με την επιλογή των άκρων a_0 και a_M μπορεί να έχουμε και διαφορετικό πηλίκο σήματος-προς-θόρυβο κβάντισης.

Στα παραπάνω βλέπουμε ότι ο υπολογισμός του SQNR στην ουσία εξαρτάται από την πυκνότητα πιθανότητα $f_X(x)$. Ωστόσο στην περίπτωση όπου ο αριθμός των διαστημάτων κβάντισης είναι πολύ μεγάλος τότε υπάρχει μία πολύ χρήσιμη προσέγγιση που μπορούμε να εφαρμόσουμε. Ας υποθέσουμε πως η X λαμβάνει τιμές μόνο εντός του διαστήματος $[a_0 a_M]$. Επίσης υποθέτουμε πως ο αριθμός των διαστημάτων κβάντισης είναι τόσο μεγάλος ώστε μέσα σε κάθε διάστημα κβάντισης η $f_X(x)$ είναι σταθερή, δηλαδή για $a_m \leq x \leq a_{m+1}$ έχουμε $f_X(x) \cong f_X(c_m)$.

$$d(X,Y) = \sum_{m=0}^{M-1} \int_{a_m}^{a_{m+1}} (x - c_m)^2 f_X(x) dx \cong \sum_{m=0}^{M-1} f_X(c_m) \int_{a_m}^{a_{m+1}} (x - c_m)^2 dx \quad (1.46)$$

Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 2.2 τα ολοκληρώματα εντός της (1.46) σύμφωνα με την (1.25) ισούνται με $\Delta^3/12$ οπότε

$$d(X,Y) \cong \sum_{m=0}^{M-1} f_X(c_m) \frac{\Delta^3}{12} = \frac{\Delta^2}{12} \sum_{m=0}^{M-1} f_X(c_m) \Delta \cong \frac{\Delta^2}{12} \int_{a_0}^{a_M} f_X(x) dx = \frac{\Delta^2}{12} \quad (1.47)$$

Η δεύτερη προσεγγιστική ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι για μεγάλο M , σύμφωνα με τον ορισμό του ολοκληρώματος έχουμε:

$$\sum_{m=0}^{M-1} f_X(c_m) \Delta \cong \int_{a_0}^{a_M} f_X(x) dx \quad (1.48)$$

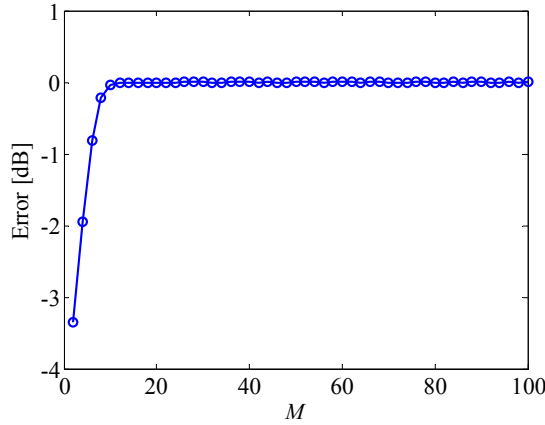
Επομένως έχουμε

$$SQNR \cong 12 \frac{E\{X^2\}}{\Delta^2} \quad (1.49)$$

Παράδειγμα 2.6

Να συγκρίνεται τις τιμές του προσεγγιστικού SQNR για τα δείγματα στο Παράδειγμα 2.3 για διάφορες τιμές του M θεωρώντας ότι $a_0=-10$ και $a_M=10$.

Εφαρμόζουμε την τεχνική του παραδείγματος για διάφορες τιμές του M από 2 έως 100. Στο Σχήμα 2-11 παριστάνουμε τη διαφορά σε dB των τιμών του SQNR που υπολογίζονται από την (1.49) και το Παράδειγμα 2.3. Όσο αυξάνει το M τόσο μειώνεται και το σφάλμα στην προσέγγιση.



Σχήμα 2-11: Το σφάλμα μεταξύ των τιμών του SQNR που υπολογίζεται από την (1.49) και τη μεθοδολογία στο Παράδειγμα 2.3.

Τα προηγούμενα παραδείγματα υποδεικνύουν ότι η παραμόρφωση που εισάγει ένας κβαντιστής εξαρτάται τόσο από τις προδιαγραφές του (δηλαδή πλήθος διαστημάτων κβάντισης M , τρόπος επιλογής των εξόδων c_m , κτλ) καθώς και από την στατιστική της μεταβλητής εισόδου X , δηλαδή την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$. Τίθεται επομένως το ερώτημα: αν γνωρίζουμε την $f_X(x)$ ποιά είναι τα βέλτιστα χαρακτηριστικά του κβαντιστή; Φυσικά στην πράξη δεν μπορούμε να έχουμε άπειρα διαστήματα κβάντισης επομένως επαναδιατυπώνουμε το ερώτημα ως εξής:

Για έναν δεδομένο αριθμό διαστημάτων κβάντισης M , αν γνωρίζουμε την $f_X(x)$ ποιά είναι τα βέλτιστα χαρακτηριστικά του κβαντιστή; Δηλαδή πως επιλέγουμε τα άκρα των υποδιαστημάτων $[a_m, b_m]$ και τις τιμές c_m ; Στην ουσία θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την

$$d(X, Y) = \int_{-\infty}^{a_1} (x - c_1)^2 f_X(x) dx + \sum_{m=1}^{M-2} \int_{a_m}^{a_{m+1}} (x - c_m)^2 f_X(x) dx + \int_{a_{M-1}}^{+\infty} (x - c_M)^2 f_X(x) dx \quad (1.50)$$

ως προς τα (a_m, c_m) δηλαδή ένα σύνολο $2M-1$ μεταβλητών. Η ελαχιστοποίηση της d η οποία είναι επομένως συνάρτηση πολλών μεταβλητών προχωράει παρόμοια με την περίπτωση μίας συνάρτησης μίας μεταβλητής, δηλαδή μέσω των παραγώγων. Τα σημεία που είναι υποψήφια για ακρότατα (μέγιστα ή ελάχιστα) θα πρέπει να μηδενίζουν την κλίση ∇d της συνάρτησης d . Η κλίση ορίζεται ως εξής:

$$\nabla d = \left(\frac{\partial d}{\partial c_1}, \dots, \frac{\partial d}{\partial c_{M_s}}, \frac{\partial d}{\partial a_2}, \dots, \frac{\partial d}{\partial a_{M_s}} \right) \quad (1.51)$$

δηλαδή είναι ένα διάνυσμα του οποίου οι συνιστώσες είναι οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης d . Για να μηδενίζεται το ∇d θα πρέπει να μηδενίζονται όλες οι συνιστώσες του, δηλαδή να έχουμε

$$\frac{\partial d}{\partial c_m} = 0 \quad (1.52)$$

$$\frac{\partial d}{\partial a_m} = 0 \quad (1.53)$$

Ας δούμε τι συνεπάγεται η (1.53). Παραγωγίζοντας έχουμε

$$\frac{\partial d(X, Y)}{\partial a_m} = (a_m - c_m)^2 f_X(a_m) - (a_m - c_{m+1})^2 f_X(a_m) \quad (1.54)$$

Για να υπολογίσουμε την (1.54) χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\frac{\partial}{\partial x} \int_a^x g(x') dx' = g(x)$ ¹¹ όπου a είναι μία σταθερά και $g(x)$ μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τώρα αν υποθέσουμε ότι η πυκνότητα πιθανότητας $f_X(a_m)$ δεν είναι μηδέν και ισχύει η (1.53), θα έχουμε¹²

$$c_m - a_m = c_{m+1} - a_m \quad (1.55)$$

από όπου προκύπτει πως

$$a_m = \frac{c_m + c_{m+1}}{2} \quad (1.56)$$

Δηλαδή η βέλτιστη επιλογή των a_m προκύπτει πως είναι το ημίθροισμα των τιμών κβάντισης c_m . Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους ως προς c_m . Θα έχουμε:

$$\frac{\partial d}{\partial c_m} = 2 \int_{a_m}^{a_{m+1}} (x - c_m) f_X(x) dx \quad (1.57)$$

οπότε για να ισχύει η (1.52) θα πρέπει να έχουμε

$$\int_{a_m}^{a_{m+1}} (x - c_m) f_X(x) dx = 0 \quad (1.58)$$

ή ισοδύναμα:

$$c_m = \left[\int_{a_m}^{a_{m+1}} x f_X(x) dx \right] \left[\int_{a_m}^{a_{m+1}} f_X(x) dx \right]^{-1} \quad (1.59)$$

Επομένως για να υπολογίσουμε τα βέλτιστα c_m καθορίζονται από την συγκεκριμένη μορφή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$. Παρατηρούμε πως η βέλτιστη τιμή των a_m καθορίζεται από τα c_m σύμφωνα με την (1.56) ενώ η βέλτιστη τιμή των c_m καθορίζεται από τα a_m σύμφωνα με την (1.59). Πρόκειται για ένα σύνολο πεπλεγμένων μη γραμμικών εξισώσεων που δεν μπορούν να

¹¹ Μη μου πείτε ότι δεν το ξέρετε! Είναι το βασικό θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

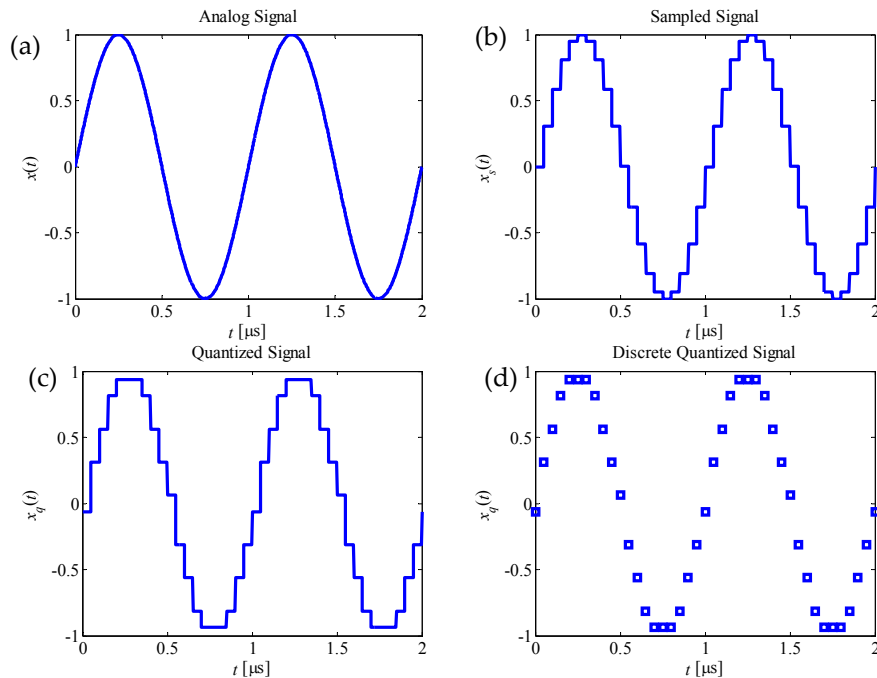
¹² Το ποιο σωστό είναι ότι ισχύει $|c_m - a_m| = |c_{m+1} - a_m|$ από όπου προκύπτει ότι $c_m - a_m = c_{m+1} - a_m$ και $c_m - a_m = -c_{m+1} + a_m$. Ωστόσο η πρώτη εναλλακτική σημαίνει ότι $c_m = c_{m+1}$ και επομένως όλες οι τιμές κβάντισης είναι ίδιες κάτι που δεν μπορεί να συμβαίνει σε έναν πρακτικό κβαντιστή.

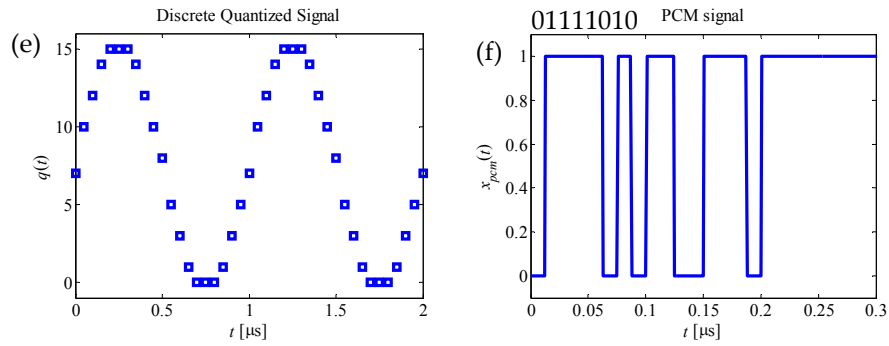
λυθούν αναλυτικά (δηλαδή με το χέρι) αλλά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή για να τις λύσουμε.

2.4 Κωδικοποίηση κυματομορφής.

Τώρα που δειγματοληπτήσαμε και κβαντίσαμε την αναλογική κυματομορφή, είναι καιρός να μετατρέψουμε τα διακριτά σύμβολα που παράγονται στην έξοδο του κβαντιστή σε σειρές από bit. Η διαμόρφωση με κωδικοποίηση παλμών (pulse code modulation – PCM) είναι ίσως ότι πιο απλό μπορεί να σκεφτεί κανείς για το σκοπό αυτό. Στην PCM θεωρούμε ότι ο κβαντιστής μας έχει $M=2^v$ πιθανές εξόδους c_m και σε κάθε πιθανή έξοδο αντιστοιχούμε μία σειρά από bit με μήκος v .

Ας δούμε αυτή την διαδικασία με ένα παράδειγμα. Θέλουμε να κωδικοποιήσουμε ένα ημιτονοειδές σήμα με πλάτος ίσο με 1 και συχνότητα 1MHz το οποίο δειγματοληπτείται κάθε $\Delta t=0.05\mu s$ και κβαντίζεται ομοιόμορφα με $M=16$ στάθμες ενώ παράλληλα θεωρούμε $a_0=-1$ και $a_M=1$, δηλαδή τα διαστήματα κβάντισης καλύπτουν όλο το πεδίο τιμών του σήματος. Οι τιμές κβάντισης c_m επιλέγονται όπως και πριν, δηλαδή ως τα μέσα των διαστημάτων κβάντισης $[a_m, a_{m+1}]$. Δεδομένου ότι $M=16$, έπεται πως υπάρχουν 16 διακριτές έξοδοι του κβαντιστή οι οποίες χρειάζονται $v=\log_2 M=4$ bit για να κωδικοποιηθούν.

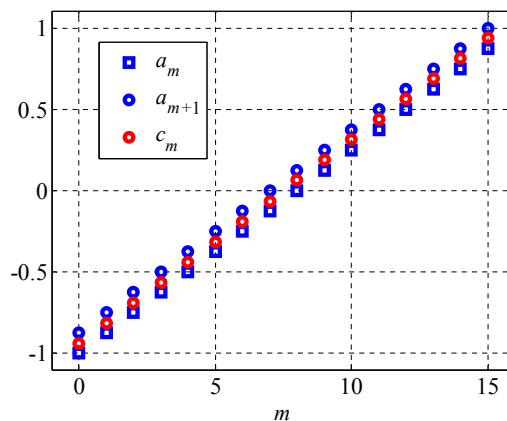




Σχήμα 2-12: (a) Το αρχικό σήμα $x(t)$, (b) το δειγματοληπτημένο σήμα $x_s(t)$, (c) το κβαντισμένο σήμα $x_q(t)$, (d) οι εξόδοι του κβαντιστή που παράγονται στους συγκεκριμένους χρόνους $t_n=n\Delta t$, (e) οι στάθμες που αντιστοιχούν στις εξόδους του κβαντιστή και (f) το σήμα PCM που αντιστοιχεί σε αυτές

Στο Σχήμα 2-12 έχουμε παραστήσει γραφικά τα διάφορα στάδια που περνάει ένα αναλογικό σήμα για να κωδικοποιηθεί σε ένα σήμα PCM. Στο Σχήμα 2-12(a) έχουμε παραστήσει το αρχικό αναλογικό ημιτονοειδές σήμα. Στη συνέχεια το σήμα δειγματοληπτείται κατά τα γνωστά και κβαντίζεται με έναν ομοιόμορφο κβαντιστή. Η έξοδος του κβαντιστή φαίνεται στο Σχήμα 2-12(c) ενώ στο Σχήμα 2-12(d) έχουμε παραστήσει το κβαντισμένο σήμα τις χρονικές στιγμές $t_n=n\Delta t$ όπου έχουμε κάνει την δειγματοληψία του αρχικού σήματος. Στο Σχήμα 2-12(e) παρουσιάζουμε τις στάθμες που αντιστοιχούν στις εξόδους του κβαντιστή. Τέλος στο Σχήμα 2-12(f) δείχνουμε το αντίστοιχο σήμα PCM.

Ας παρακολουθήσουμε την διαδικασία λίγο πιο προσεκτικά. Για $n=0$, η πρώτη στιγμή δειγματοληψίας είναι η $t_0=0$ και στην συγκεκριμένη χρονική στιγμή το αναλογικό σήμα έχει την τιμή $x(0)=0$. Επομένως για την διάρκεια $0 \leq t < \Delta t$ το δειγματοληπτημένο σήμα θα ισούται με $x_s(t)=0$. Η τιμή αυτή πρέπει παράλληλα να κβαντιστεί και εφόσον έχουμε ομοιόμορφη κβάντιση με $M=16$, θα έχουμε $a_m=a_0+m\Delta$ όπου $\Delta=(a_M-a_0)/M=0.125$.



Σχήμα 2-13: Τα άκρα των διαστημάτων κβάντισης (με μπλέ χρώμα) και οι τιμές κβάντισης (με κόκκινο χρώμα) στην περίπτωση ενός ομοιόμορφου κβαντιστή εντός του $[-1 \ 1]$ με $M=16$.

Στο Σχήμα 2-13 έχουμε παραστήσει γραφικά τα άκρα των διαστημάτων κβάντισης a_m και a_{m+1} καθώς και τις τιμές κβάντισης c_m στην περίπτωση του ομοιόμορφου κβαντιστή που έχουμε θεωρήσει. Η τιμή $x(0)=0$ τυχαίνει να πέφτει ακριβώς πάνω στο άκρο του διαστήματος a_8 και επομένως θα πρέπει να αποφασίσουμε αν στην περίπτωση αυτή ο κβαντιστής αποφασίζει ότι η τιμή ανήκει στο $[a_7 a_8]$ ή στο $[a_8 a_9]$. Δεν έχει και πολύ σημασία τι θα αποφασίσουμε αρκεί να ακολουθούμε την ίδια στρατηγική σε κάθε ανάλογη περίπτωση. Αν υποθέσουμε ότι ο κβαντιστής αποφασίζει ότι το δείγμα ανήκει στο $[a_7 a_8]$ τότε η τιμή του κβαντιστή που αντιστοιχεί στο εν λόγω δείγμα θα είναι η $c_7=-0.0625$. Αν αριθμήσουμε τις $M=16$ τιμές του κβαντιστή από το 0 έως 15, η c_7 θα είναι η νούμερο 7 το οποίο 7 και για τον λόγο αυτό στο Σχήμα 2-12(e) δείχνουμε πως για $t=0$ ο κβαντιστής παράγει στην έξοδο του την 7^η τιμή κβάντισης του, δηλαδή την $c_7=-0.0625$. Το 7 στο δυαδικό είναι 0111 και επομένως τα bit της κυματομορφής PCM που αντιστοιχούν στην έξοδο αυτή είναι 0111. Για το λόγο αυτό στο Σχήμα 2-12(f) έχουμε ένα 0 ακολοθούμενο από έναν ευρύ παλμό για $\Delta t/4 \leq t < \Delta t = 0.05\mu s$ ο οποίος αντιστοιχεί σε τρεις συνεχόμενους άσους 111.

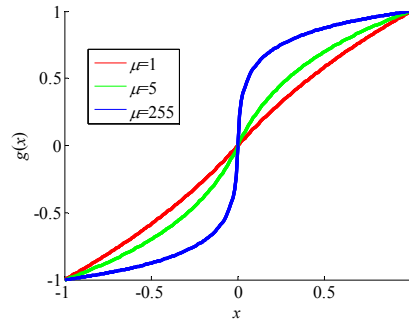
Με τον ίδιο τρόπο μπορεί κανείς να δείξει ότι η έξοδος του κβαντιστή την επόμενη χρονική στιγμή δειγματοληψίας ($t=\Delta t=0.05\mu s$) θα είναι ίση με $c_{10}=0.3125$, δηλαδή η 10^η στη σειρά κβαντισμένη έξοδος οπότε τα bit του PCM σήματος θα είναι τα 1010 που είναι το 10 στο δυαδικό. Για τον λόγο αυτό στην κυματομορφή του PCM βλέπουμε ότι έχουμε υψηλή στάθμη για $\Delta t \leq t < \Delta t + \Delta t/4$ ενώ μετά ακολουθεί χαμηλή στάθμη για $\Delta t + \Delta t/4 \leq t < \Delta t + \Delta t/2$ κάτι που αντιστοιχεί στα δύο πρώτα bit του 1010. Στην συνέχεια επαναλαμβάνεται η εναλλαγή μεταξύ υψηλής και χαμηλής στάθμης που αντιστοιχεί στα δύο τελευταία bit του 1010. Με τον ίδιο τρόπο ερμηνεύεται και η υπόλοιπη κυματομορφή του PCM.

Η μορφή του PCM που εξετάσαμε μέχρι τώρα, χρησιμοποιεί ομοιόμορφη κβάντιση η οποία είναι ιδανική στην περίπτωση όπου η μεταβλητή X είναι ομοιόμορφα κατανομημένη. Ωστόσο πολλά σήματα μπορεί να μην διέπονται από ομοιόμορφη κατανομή, π.χ. σε ένα σήμα φωνής τα μικρά δείγματα που αντιστοιχούν σε μικρή ένταση φωνής έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης από ότι δείγματα που αντιστοιχούν σε υψηλότερη ένταση (ειδικά όταν ο ομιλών κάνει πολλές παύσεις στο λόγο του). Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται ένα είδος ηθελημένης παραμόρφωσης του σήματος έτσι ώστε το τελικό σήμα να αποκτήσει χαρακτηριστικά παραπλήσια με αυτά ενός σήματος που έχει παραχθεί από μία ομοιόμορφη κατανομή. Η παραμόρφωση χαρακτηρίζεται από μία συνάρτηση παραμόρφωσης $g(x)$ η οποία δρα πάνω στα δείγματα της X και μας δίνει τα νέα δείγματα. Αν θεωρήσουμε¹³ ότι η X έχει μέγιστο το +1 και ελάχιστο το -1 τότε ένα παράδειγμα $g(x)$ που χρησιμοποιείται συχνά, ειδικά σε χώρες όπως οι ΗΠΑ ή ο Καναδάς είναι η

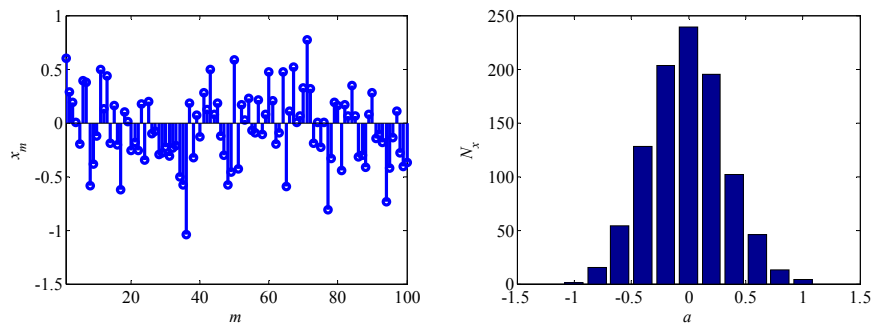
$$g(x) = \frac{\log(1 + \mu |x|)}{\log(1 + \mu)} \operatorname{sgn}(x) \quad (1.60)$$

Η συνάρτηση $\operatorname{sgn}(x)$ είναι το πρόσημο του x , και ισούται με -1 εάν $x < 0$, με +1 εάν $x > 0$ και με 0 εάν $x = 0$. Στο Σχήμα 2-14 έχουμε παραστήσει γραφικά την (1.60) για διάφορες τιμές της παραμέτρου μ . Παρατηρούμε πως όσο αυξάνει το μ τόσο αυξάνει και η απόκλιση της $g(x)$ από μία ευθεία $g_0(x)=x$ η οποία αντιστοιχεί σε μηδενική παραμόρφωση.

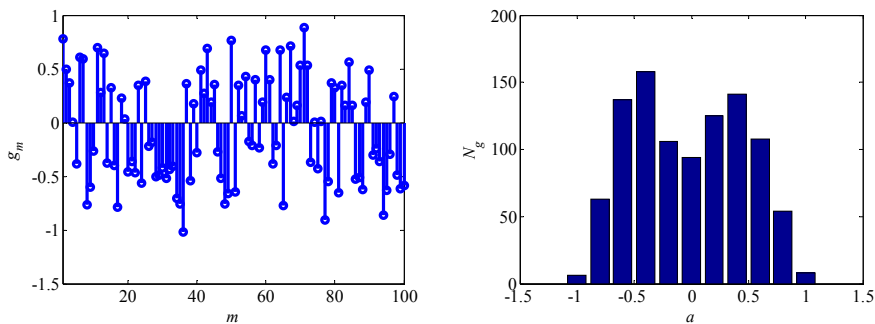
¹³ Αν δεν ισχύει αυτό απλά κανονικοποιούμε με την μέγιστη τιμή.



Σχήμα 2-14: Η συνάρτηση $g(x)$ στην (1.60) για διάφορες τιμές του μ .



Σχήμα 2-15: (α) τα πρώτα 100 δείγματα από τα 1000 δείγματα που παράγονται από μία Gaussian τυχαία διαδικασία με $\sigma=1$ και μηδενική μέση τιμή, (β) ο αριθμός εμφανίσεων εντός των διαστημάτων που αναφέρονται στο κείμενο του συνόλου των 1000 δειγμάτων της Gaussian διαδικασίας.



Σχήμα 2-16: (α) τα πρώτα 100 μετασχηματισμένα δείγματα και (β) ο αριθμός εμφανίσεων εντός των διαστημάτων που αναφέρονται στο κείμενο του συνόλου των μετασχηματισμένων 1000 δειγμάτων.

Ας δούμε τώρα τη δράση της παραμόρφωσης στα δείγματα ενός σήματος. Παράγουμε 1000 δείγματα από μία Gaussian κατανομή με μέση τιμή μηδέν και τυπική απόκλιση $\sigma=1/3$. Στο Σχήμα 2-15(a) δείχνουμε τα πρώτα 100 δείγματα της κατανομής ενώ στο Σχήμα 2-15(b) έχουμε παραστήσει το ιστόγραμμα των 1000 δειγμάτων. Στην ουσία το ιστόγραμμα είναι μία γραφική αναπαράσταση του αριθμού των εμφανίσεων N_x των δειγμάτων εντός συγκεκριμένων διαστημάτων τιμών. Στο σχήμα έχουμε θεωρήσει ότι το κεντρικό διάστημα έχει κέντρο το $x=0$ και μήκος 0.2, δηλαδή είναι το $[-0.1 \ 0.1]$. Γύρω από αυτό το διάστημα έχουμε θεωρήσει 5 διαστήματα με το ίδιο μήκος στα αριστερά και 5 διαστήματα στα δεξιά του. Έτσι λοιπόν το γεγονός ότι η μπάρα στο Σχήμα 2-15(b) δείχνει ίση με 239

σημαίνει ότι 239 δείγματα της x από τα 1000 βρίσκονται εντός του διαστήματος $[-0.1 \ 0.1]$. Φυσικά η μορφή του ιστογράμματος στο Σχήμα 2-15(b) δεν πρέπει να αποτελεί μεγάλη έκπληξη. Τα δείγματα παράγονται από μία Gaussian κατανομή και αυτό σημαίνει μικρές τιμές έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης από ότι μεγάλες τιμές. Επίσης επειδή η κατανομή είναι συμμετρική, μία τάση που αποτυπώνεται προσεγγιστικά και στο Σχήμα 2-15(b)¹⁴. Στη συνέχεια στο Σχήμα 2-16(a) έχουμε παραστήσει τον μετασχηματισμό των 100 πρώτων δειγμάτων $g_m=g(x_m)$ μέσω της (1.60) όπου έχουμε θεωρήσει ότι $\mu=5$. Το αντίστοιχο ιστόγραμμα φαίνεται στο Σχήμα 2-16(b). Παρατηρούμε ότι το νέο ιστόγραμμα είναι πιο ομαλό στις μικρές τιμές από ότι το αρχικό ιστόγραμμα στο Σχήμα 2-15(b). Αυτό οφείλεται στην παραμόρφωση των δειγμάτων που επιφέρει ο μετασχηματισμός $g(X)$. Υπάρχουν και άλλοι τρόποι κωδικοποίησης κυματομορφής αλλά εδώ δεν θα ασχοληθούμε περαιτέρω με το θέμα.

¹⁴ Για να βλέπαμε πραγματικά συμμετρικό ιστόγραμμα θα έπρεπε να πάρουμε πάρα πολλά δείγματα.

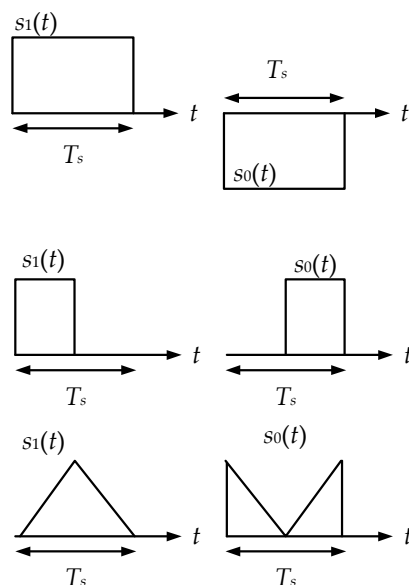
3. Η Επίδραση του Λευκού Προσθετικού Θορύβου.

3.1 Εισαγωγικά

Είναι τώρα καιρός να ασχοληθούμε τώρα με την μετάδοση της πληροφορίας μέσα από ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα. Ήδη σε προηγούμενο κεφάλαιο μάθαμε κάποια πράγματα για την επίδραση του θορύβου στην πληροφορία μας. Είναι τώρα καιρός να ασχοληθούμε με πιο πρακτικά συστήματα που χρησιμοποιούν συγκεκριμένο τρόπο διαμόρφωσης. Αλλά ας πάρουμε τα πράγματα από την αρχή.

3.2 Τα σήματα ως διανύσματα

Ο τίτλος της παραγράφου θα πρέπει να ξενίζει. Τι σχέση έχουν τα σήματα με τα διανύσματα; Θα δούμε πως υπάρχει μία πολύ στενή σχέση που πηγάζει από την έννοια του διανυσματικού χώρου. Ας υποθέσουμε ότι κάποιος επιθυμεί να μεταδώσει μία σειρά από bit μέσα από ένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι (π.χ. μία οπτική ίνα στην περίπτωση των ενσύρματων συστημάτων ή τον αέρα στην περίπτωση των ασύρματων συστημάτων). Θα πρέπει να αποφασίσουμε την κυματομορφή $s_1(t)$ και $s_0(t)$ που θα αντιστοιχήσουμε το «1» και το «0». Υπάρχουν μία σειρά από επιλογές που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 3-1: Μερικές εναλλακτικές επιλογές για τις κυματομορφές $s_0(t)$ και $s_1(t)$ που αντιστοιχούν στο «0» και στο «1» αντίστοιχα.

Η πρώτη επιλογή συνίσταται στην αντιστροφή της πολικότητας του σήματος. Αν πρόκειται να μεταδώσουμε «1» τότε μεταδίδουμε έναν θετικό ορθογώνιο παλμό διάρκειας T_s όπου T_s είναι η διάρκεια του bit. Στην περίπτωση όπου έχουμε να μεταδώσουμε το «0» απλά αντιστρέφουμε το πρόσημο του σήματος και ο παλμός γίνεται αρνητικός. Στη δεύτερη περίπτωση χρησιμοποιούμε

έναν παλμό με μικρότερη διάρκεια. Στην περίπτωση όπου πρόκειται να μεταδώσουμε το «1» μεταδίδουμε έναν παλμό διάρκειας $T_s/2$ ο οποίος καλύπτει το διάστημα $[0, T_s/2]$ ενώ στην περίπτωση του «0» μεταδίδουμε τον ίδιο παλμό αλλά μετατοπισμένο κατά $T_s/2$, δηλαδή ο παλμός τώρα καταλαμβάνει το διάστημα $[T_s/2, 0]$. Πρόκειται για δύο διαφορετικούς τρόπους αποτύπωσης της πληροφορίας (δηλαδή των bit) σε ένα σήμα: η πρώτη ονομάζεται διαμόρφωση πλάτους παλμού (pulse amplitude modulation – PAM) ενώ η δεύτερη διαμόρφωση θέσης παλμού (pulse position modulation – PPM). Στην τρίτη περίπτωση έχουμε ακολουθήσει μία διαφορετική στρατηγική. Χρησιμοποιούμε έναν τριγωνικό παλμό στην περίπτωση που μεταδίδουμε το «1» και έναν αναστραμμένο τριγωνικό παλμό όταν μεταδίδουμε το «0».

Μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης περίπτωσης υπάρχει μία ουσιώδης διαφορά. Στην διαμόρφωση πλάτους στο Σχήμα 3-1, τα δύο σήματα $s_1(t)$ και $s_0(t)$ μπορούν να γραφούν συναρτήσει ενός σήματος $p(t)$ το οποίο είναι για παράδειγμα ένας ορθογώνιος παλμός διάρκειας T_s με ενέργεια ίση με την μονάδα, δηλαδή:

$$\int_0^{T_s} p^2(t) dt = 1 \quad (2.1)$$

Αν A_p είναι το πλάτος του $p(t)$ θα έχουμε:

$$A_p = \frac{1}{\sqrt{T_s}} \quad (2.2)$$

οπότε η εξίσωση για το $p(t)$ είναι

$$p(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{T_s} & 0 \leq t < T_s \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2.3)$$

ενώ αν A είναι το πλάτος του $s_1(t)$ και $-A$ το πλάτος του $s_0(t)$ θα έχουμε

$$s_1(t) = A\sqrt{T_s} p(t) \quad (2.4)$$

$$s_0(t) = -A\sqrt{T_s} p(t) \quad (2.5)$$

Οι (2.4)-(2.5) δηλώνουν το γεγονός πως και τα δύο σήματα είναι ανάλογα ενός βασικού σήματος $p(t)$ οπότε υπό μία έννοια παράγονται από το $p(t)$. Μπορούμε να πούμε το ίδιο για την περίπτωση του PPM που είναι το δεύτερο παράδειγμα στο Σχήμα 3-1; Υπάρχει δηλαδή ένα βασικό σήμα έστω $b(t)$ και σταθερές c_1 και c_2 έτσι ώστε να ισχύει

$$s_1(t) = c_1 b(t) \quad (2.6)$$

$$s_0(t) = c_2 b(t) \quad (2.7)$$

Αν ισχύουν οι (2.6)-(2.7) έπεται καταρχήν ότι εάν $c_2 \neq 0$, $s_1(t) = (c_1/c_2)s_2(t)$, δηλαδή το $s_1(t)$ είναι ανάλογο του $s_2(t)$ κάτι που δεν μπορεί να συμβαίνει αν κοιτάξουμε προσεκτικά τα σήματα της δεύτερης περίπτωσης στο Σχήμα 3-1: όπου το $s_1(t)$ δεν είναι μηδέν είναι μηδέν το $s_2(t)$ και το ανάποδο, οπότε

$$\int_0^{T_s} s_0(t)s_1(t)dt = 0 \quad (2.8)$$

κάτι που συνεπάγεται και ότι

$$\frac{c_1}{c_2} \int_0^{T_s} s_1^2(t)dt = 0 \quad (2.9)$$

και εφόσον το $s_1(t)$ δεν έχει μηδενική ενέργεια έπεται ότι $c_1/c_2 = 0$ δηλαδή $s_1(t) = 0$ κάτι που δεν ισχύει (το σήμα $s_1(t)$ είναι ένας παλμός). Αυτό έχει ως συνέπεια το c_2 να είναι μηδέν. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι αν $c_1 \neq 0$ το $s_2(t)$ θα είναι μηδέν. Δείξαμε επομένως πως στην περίπτωση του PPM δεν υπάρχει ένα βασικό σήμα από το οποίο να παράγονται τα σήματα $s_1(t)$ και $s_2(t)$. Ωστόσο αν ορίσουμε τους παλμούς

$$p_1(t) = \begin{cases} \sqrt{2/T_s} & 0 \leq t < T_s/2 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2.10)$$

$$p_2(t) = \begin{cases} \sqrt{2/T_s} & T_s/2 \leq t < T_s \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2.11)$$

τότε αν A είναι το πλάτος των $s_1(t)$ και $s_2(t)$ θα έχουμε:

$$s_1(t) = A\sqrt{\frac{T_s}{2}}p_1(t) + 0p_2(t) \quad (2.12)$$

$$s_0(t) = 0p_1(t) + A\sqrt{\frac{T_s}{2}}p_2(t) \quad (2.13)$$

Φυσικά οι όροι που πολλαπλασιάζονται με μηδέν δεν χρειάζονται απλά τους γράφουμε για να δείξουμε ότι κάθε ένα από τα δύο σήματα μπορεί να γραφεί ως

$$c_1p_1(t) + c_2p_2(t) \quad (2.14)$$

δηλαδή ως γραμμικός συνδυασμός των $p_1(t)$ και $p_2(t)$. Επίσης μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\int_0^{T_s} p_1(t)p_2(t)dt = 0 \quad (2.15)$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι το $\langle f, g \rangle$ το οποίο για δύο σήματα $g(t)$ και $f(t)$ ορίζεται ως

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{T_s} f(t)g(t)dt \quad (2.16)$$

έχει όλες τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου και από εδώ και πέρα θα το ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο των $f(t)$ και $g(t)$. Η (2.15) υποδεικνύει ότι τα p_1 και p_2 έχουν εσωτερικό γινόμενο μηδέν, είναι δηλαδή «κάθετα» σήματα. Ταυτόχρονα υπό μία έννοια, το $\langle f, f \rangle$ θα είναι το τετράγωνο του μέτρου της f . Για τα βασικά σήματα που χρησιμοποιήσαμε έχουμε:

$$\langle p(t), p(t) \rangle = \int_0^{T_s} p^2(t)dt = 1 \quad (2.17)$$

καθώς και

$$\langle p_1(t), p_1(t) \rangle = \langle p_2(t), p_2(t) \rangle = 1 \quad (2.18)$$

Συνοψίζουμε τι μάθαμε μέχρι εδώ:

α) στην περίπτωση του PAM, τα σήματα που αντιπροσωπεύουν τα δύο bit παράγονται από ένα και μόνο βασικό σήμα $p(t)$ το οποίο ορίζεται στην (2.3) και έχει μέτρο 1. Τα δύο σήματα παράγονται πολλαπλασιάζοντας το $p(t)$ με $\pm AT_s^{1/2}$.

β) στην περίπτωση του PPM τα σήματα που αντιπροσωπεύουν τα δύο bit παράγονται όχι από ένα αλλά σύμφωνα με τις (2.12)-(2.13) από το γραμμικό συνδυασμό δύο βασικών σημάτων $p_1(t)$ και $p_2(t)$ τα οποία είναι μεταξύ τους κάθετα και έχουν μέτρο ίσο με 1.

Είναι φανερό πως στην πρώτη περίπτωση του PAM μπορούμε να αναπαραστήσουμε τα δύο σήματα $s_1(t)$ και $s_0(t)$ ως δύο σημεία πάνω σε μία ευθεία δηλαδή στον μονοδιάστατο χώρο όπως δείχνει



Σχήμα 3-2: Γεωμετρική αναπαράσταση των σημάτων $s_0(t)$ και $s_1(t)$ στην περίπτωση του PAM πάνω σε μία ευθεία. Η θέση πάνω στην ευθεία καθορίζεται από την τιμή του συντελεστή αναλογίας για κάθε σήμα που ισούται με $-AT_s^{1/2}$ και $AT_s^{1/2}$ αντίστοιχα.

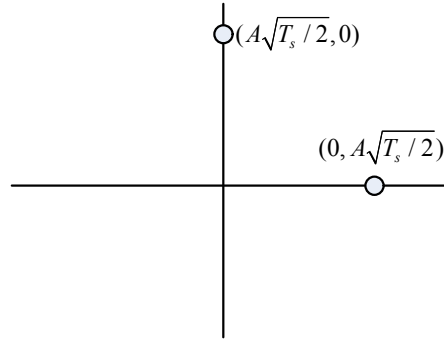
Στη δεύτερη περίπτωση του PPM μπορούμε να αναπαραστήσουμε τα δύο σήματα πάνω σε ένα διδιάστατο σύστημα συντεταγμένων στα σημεία που αντιστοιχούν στους συντελεστές αναλογίας στα εκάστοτε σήματα βάσης $p_1(t)$ και $p_2(t)$. Σύμφωνα με την (2.12) και (2.13) τα σημεία αυτά θα είναι τα $(A(T_s/2)^{1/2}, 0)$ και $(0, A(T_s/2)^{1/2})$ και η γεωμετρική αναπαράσταση των σημάτων $s_1(t)$ και $s_0(t)$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 3-3.

Βλέπουμε χρησιμοποιώντας κατάλληλα βασικά σήματα με μοναδιαία ενέργεια μπορούμε να αναπαραστήσουμε τα σήματα $s_1(t)$ και $s_0(t)$ ως σημεία στον μονοδιάστατο ή τον διδιάστατο χώρο ή ισοδύναμα με διανύσματα τα οποία έχουν αρχή το κέντρο του συστήματος συντεταγμένων ενώ το

άλλο άκρο του είναι το σημείο με το οποίο αναπαρίσταται στο χώρο. Στην περίπτωση του PPM τα διανύσματα αυτά είναι τα εξής:

$$\vec{s}_0 = (0, A\sqrt{T_s/2}) \quad (2.19)$$

$$\vec{s}_1 = (A\sqrt{T_s/2}, 0) \quad (2.20)$$



Σχήμα 3-3: Γεωμετρική αναπαράσταση των σημάτων $s_0(t)$ και $s_1(t)$ στην περίπτωση του PPM σε ένα δισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων.

Στην περίπτωση του PAM αυτά τα διανύσματα είναι μονοδιάστατα. Σύμφωνα με αυτά που είδαμε λοιπόν τα σήματα $s_0(t)$ και $s_1(t)$ που μεταδίδουμε μπορούνε να αντιστοιχηθούνε με τα διανύσματα $\vec{s}_0$ και $\vec{s}_1$. Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και με την τρίτη περίπτωση αναπαράστασης των σημάτων στο Σχήμα 3-1.

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η αναπαράσταση των σημάτων σε διανύσματα συχνά δεν είναι μοναδική, δηλαδή μπορούμε να επιλέξουμε και άλλα βασικά σήματα οπότε θα πάρουμε μία διαφορετική αναπαράσταση στο χώρο. Στην περίπτωση του PPM για παράδειγμα αν επιλέξουμε τα βασικά σήματα να είναι

$$p_1(t) = \begin{cases} \sqrt{2/T_s} & , 0 \leq t < T_s/2 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2.21)$$

$$p_2(t) = \begin{cases} -\sqrt{2/T_s} & , T_s/2 \leq t < T_s \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2.22)$$

τότε είναι φανερό ότι πάλι θα ισχύει

$$\langle p_1(t), p_1(t) \rangle = \langle p_2(t), p_2(t) \rangle = 1 \quad (2.23)$$

$$\langle p_1(t), p_2(t) \rangle = 0 \quad (2.24)$$

δηλαδή όντως τα νέα σήματα είναι μεταξύ τους κάθετα και έχουνε μέτρο ίσο με 1. Χρησιμοποιώντας τα νέα βασικά σήματα, τα διανύσματα αναπαράστασης για το PPM θα είναι

$$\vec{s}_0 = (0, A\sqrt{T_s/2}) \quad (2.25)$$

$$\vec{s}_1 = (-A\sqrt{T_s/2}, 0) \quad (2.26)$$

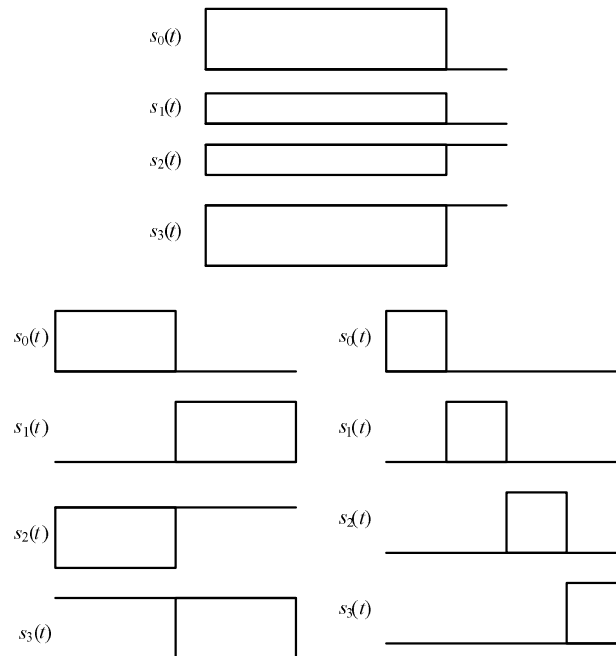
Και για τις δύο εναλλακτικές επιλογές βασικών σημάτων τα οποία θα αποκαλούμε και *σήματα βάσης*, τα αντίστοιχα διανύσματα τους έχουνε συντεταγμένες

$$\vec{p}_1 = (0, 1) \quad (2.27)$$

$$\vec{p}_2 = (1, 0) \quad (2.28)$$

3.3 Περισσότερα bits παρακαλώ!

Στην περίπτωση όπου αντιστοιχούμε ένα bit σε κάθε σήμα μετάδοσης είδαμε πως υπάρχουνε πάρα πολλοί τρόποι επιλογής κυματομορφών μετάδοσης $s_0(t)$ και $s_1(t)$ οι οποίοι αντιστοιχούν σε διανύσματα του μονοδιάστατου ή του δισδιάστατου χώρου. Στα προηγμένα τηλεπικοινωνιακά συστήματα τα bits συνήθως ομαδοποιούνται σε ομάδες των δύο, τριών ή περισσότερων bit πριν μεταδοθούν και σε κάθε πιθανό συνδυασμό ομάδας bit αντιστοιχούνε μία διαφορετική κυματομορφή.



Σχήμα 3-4: Εναλλακτικοί τρόποι διαμόρφωσης στην περίπτωση όπου τα bit μεταδίδονται σε ομάδες των 2.

Στο Σχήμα 3-4 δείχνουμε μερικούς εναλλακτικούς τρόπους επιλογής των κυματομορφών στην περίπτωση όπου ομαδοποιούμε τα bit προς μετάδοση σε ομάδες των δύο. Υπάρχουνε 4 διαφορετικοί συνδυασμοί των 2 bit που δύναται να μεταδοθούν: 00, 01, 10 και 11. Για κάθε ένα από τους συνδυασμούς αυτούς αντιστοιχούμε ένα διαφορετικό σήμα $s_0(t)$, $s_1(t)$, $s_2(t)$ και $s_3(t)$.

Για κάθε έναν από αυτούς τους τρόπους έχουμε την δυνατότητα να ψάξουμε πάλι για σήματα βάσης τα οποία θα μας επιτρέψουν να αναπαραστήσουμε τα σήματα μας με μορφή διανυσμάτων. Εδώ θα πρέπει να αναφέρουμε ότι παρά το γεγονός ότι στα προηγούμενα εντοπίσαμε τα σήματα βάσης «με το μάτι», εντούτοις υπάρχει και μία πιο συστηματική μέθοδος ανάδειξης σημάτων βάσης, η μέθοδος Gram-Schmidt. Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή:

α) Θεωρούμε το πρώτο σήμα $v_1(t)=s_1(t)$

β) Κατασκευάζουμε τα σήματα $v_\mu(t)$ χρησιμοποιώντας την σχέση:

$$v_\mu(t) = s_\mu(t) - \sum_{n=1}^{\mu-1} \frac{\langle s_\mu(t), v_n(t) \rangle}{\langle v_n(t), v_n(t) \rangle} v_n(t) \quad (2.29)$$

όπου στο άθροισμα συμμετέχουν μόνο τα μη μηδενικά $v_n(t)$.

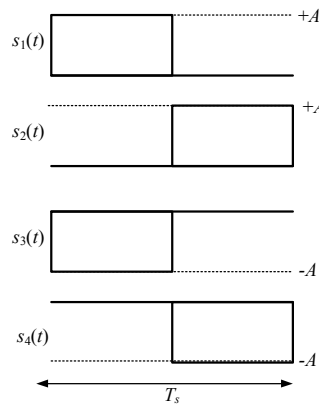
γ) Κανονικοποιούμε τα μη μηδενικά σήματα $v_\mu(t)$ σήματα έτσι ώστε να έχουν ενέργεια ίση με 1, δηλαδή μοναδιαίο μέτρο, δηλαδή ορίζουμε νέα σήματα $e_\mu(t)$ έτσι ώστε

$$e_\mu(t) = v_\mu(t) \left(\int_0^{T_s} v_\mu^2(t) dt \right)^{-1/2} \quad (2.30)$$

Τα $e_\mu(t)$ αποτελούν το σύνολο των σημάτων βάσης τα οποία παράγουν όλα τα σήμα $s_m(t)$ με την έννοια ότι κάθε σήμα $s_m(t)$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $e_\mu(t)$. Ας δούμε ένα παράδειγμα

Παράδειγμα 3.1

Να εφαρμόσετε τη διαδικασία Gram Schmidt στα σήματα $s_m(t)$ που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα. Επίσης να υπολογίσετε τα διανύσματα που αντιστοιχούν στα $s_m(t)$.



Σχήμα 3-5: Τα σήματα $s_\mu(t)$ για το Παράδειγμα 3.1.

Πρόκειται στην ουσία για την δεύτερη περίπτωση σημάτων στο Σχήμα 3-4. Ας υποθέσουμε πως το πλάτος των $s_0(t)$ και $s_1(t)$ είναι $+A$, τότε αυτά περιγράφονται από τις σχέσεις:

$$s_1(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t < T_s / 2 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}, \quad s_2(t) = \begin{cases} A & T_s / 2 \leq t < T \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2.31)$$

ενώ τα $s_2(t)$ και $s_3(t)$ περιγράφονται από τις σχέσεις:

$$s_3(t) = \begin{cases} -A & 0 \leq t < T_s / 2 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} = -s_1(t), \quad s_4(t) = \begin{cases} -A & T_s / 2 \leq t < T \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} = -s_2(t) \quad (2.32)$$

Ξεκινάμε τώρα την διαδικασία Gram-Schmidt. Έχουμε $v_1(t)=s_1(t)$ ενώ το $v_2(t)$ καθορίζεται από την σχέση (2.29) η οποία γράφεται:

$$v_2(t) = s_2(t) - \frac{\langle s_2(t), v_1(t) \rangle}{\langle v_1(t), v_1(t) \rangle} v_1(t) = s_2(t) - \frac{\langle s_2(t), s_1(t) \rangle}{\langle s_1(t), s_1(t) \rangle} s_1(t) \quad (2.33)$$

Τα εσωτερικά γινόμενα υπολογίζονται εύκολα:

$$\langle s_1(t), s_1(t) \rangle = \int_0^{T_s} s_1^2(t) dt = A^2 T_s / 2 \quad (2.34)$$

$$\langle s_2(t), s_1(t) \rangle = \int_0^{T_s} s_1(t) s_2(t) dt = 0 \quad (2.35)$$

οπότε

$$v_2(t) = s_2(t) \quad (2.36)$$

Προχωράμε στο επόμενο στάδιο ($\mu=3$) για το οποίο η (2.29) γράφεται:

$$v_3(t) = s_3(t) - \frac{\langle s_3(t), v_1(t) \rangle}{\langle v_1(t), v_1(t) \rangle} v_1(t) - \frac{\langle s_3(t), v_2(t) \rangle}{\langle v_2(t), v_2(t) \rangle} v_2(t) \quad (2.37)$$

Σύμφωνα με την (2.36) και εφόσον $v_1(t)=s_1(t)$ έπεται ότι:

$$v_3(t) = s_3(t) - \frac{\langle s_3(t), s_1(t) \rangle}{\langle s_1(t), s_1(t) \rangle} s_1(t) - \frac{\langle s_3(t), s_2(t) \rangle}{\langle s_2(t), s_2(t) \rangle} s_2(t) \quad (2.38)$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\langle s_3(t), s_1(t) \rangle = \int_0^{T_s} s_1(t) s_3(t) dt = -\int_0^{T_s} s_1^2(t) dt = -A^2 T_s / 2 \quad (2.39)$$

$$\langle s_3(t), s_2(t) \rangle = \int_0^{T_s} s_2(t) s_3(t) dt = 0 \quad (2.40)$$

οπότε

$$v_3(t) = s_3(t) + s_1(t) = 0 \quad (2.41)$$

Για $\mu=4$ έχουμε

$$v_4(t) = s_4(t) - \frac{\langle s_4(t), v_1(t) \rangle}{\langle v_1(t), v_1(t) \rangle} v_1(t) - \frac{\langle s_4(t), v_2(t) \rangle}{\langle v_2(t), v_2(t) \rangle} v_2(t) \quad (2.42)$$

Εφόσον $v_3(t)=0$ δεν συμπεριλάβαμε τον αντίστοιχο όρο στο άθροισμα. Με αυτά που έχουμε βρει μέχρι τώρα έχουμε:

$$v_4(t) = s_4(t) - \frac{\langle s_4(t), s_1(t) \rangle}{\langle s_1(t), s_1(t) \rangle} s_1(t) - \frac{\langle s_4(t), s_2(t) \rangle}{\langle s_2(t), s_2(t) \rangle} s_2(t) \quad (2.43)$$

ενώ:

$$\langle s_4(t), s_2(t) \rangle = \int_0^{T_s} s_2(t) s_4(t) dt = - \int_0^{T_s} s_2^2(t) dt = -A^2 T_s / 2 \quad (2.44)$$

$$\langle s_4(t), s_1(t) \rangle = \int_0^{T_s} s_4(t) s_1(t) dt = 0 \quad (2.45)$$

επομένως:

$$v_4(t) = s_4(t) + s_2(t) = 0 \quad (2.46)$$

Στη συνέχεια παίρνουμε τα μη μηδενικά $v_\mu(t)$ και τα κανονικοποιούμε. Έχουμε:

$$e_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{\langle s_1(t), s_1(t) \rangle}} = \begin{cases} \sqrt{2/T_s} & , 0 \leq t < T_s / 2 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2.47)$$

$$e_2(t) = \frac{s_2(t)}{\sqrt{\langle s_2(t), s_2(t) \rangle}} = \begin{cases} \sqrt{2/T_s} & , T_s / 2 \leq t < T \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2.48)$$

Επομένως έχουμε βρει τα σήματα βάσης $e_1(t)$ και $e_2(t)$ που παράγουν τα $s_1(t), \dots, s_4(t)$. Για να βρούμε τα αντίστοιχα διανύσματα γράφουμε το $s_1(t)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $e_1(t)$ και $e_2(t)$. Έχουμε:

$$s_1(t) = c_1 e_1(t) + c_2 e_2(t) \quad (2.49)$$

Αν πολλαπλασιάσουμε εσωτερικά με $e_1(t)$ και μετά με $e_2(t)$ την (2.49) θα έχουμε:

$$\langle s_1(t), e_1(t) \rangle = c_1 \langle e_1(t), e_1(t) \rangle + c_2 \langle e_2(t), e_1(t) \rangle \quad (2.50)$$

$$\langle s_1(t), e_2(t) \rangle = c_1 \langle e_2(t), e_1(t) \rangle + c_2 \langle e_2(t), e_2(t) \rangle \quad (2.51)$$

Δεδομένης της καθετότητας των $e_1(t)$ και $e_2(t)$ θα έχουμε $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ ενώ εφόσον τα $e_1(t)$ και $e_2(t)$ έχουν μοναδιαία ενέργεια $\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = 1$, οπότε από τις (2.50)-(2.51) προκύπτει ότι:

$$c_1 = \langle s_1(t), e_1(t) \rangle = \int_0^{T_s} s_1(t) e_1(t) dt = A \sqrt{\frac{2}{T_s}} \frac{T_s}{2} = A \sqrt{\frac{T_s}{2}} \quad (2.52)$$

$$c_2 = \langle s_2(t), e_1(t) \rangle = \int_0^{T_s} s_2(t) e_1(t) dt = 0 \quad (2.53)$$

Επομένως έχουμε:

$$\vec{s}_1 = (A\sqrt{T_s/2}, 0) \quad (2.54)$$

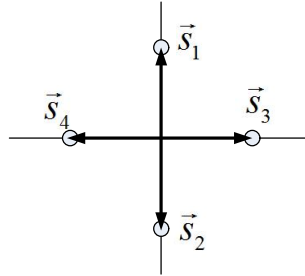
Με παρόμοιο τρόπο μπορεί κανείς να βρει:

$$\vec{s}_2 = (0, A\sqrt{T_s/2}) \quad (2.55)$$

$$\vec{s}_3 = (-A\sqrt{T_s/2}, 0) \quad (2.56)$$

$$\vec{s}_4 = (0, -A\sqrt{T_s/2}) \quad (2.57)$$

Η γεωμετρική αναπαράσταση των σημάτων στο διδιάστατο χώρο έχει ως εξής:



Σχήμα 3-6: Γεωμετρική αναπαράσταση των σημάτων $s_m(t)$ για το Παράδειγμα 3.1.

Πριν ολοκληρώσουμε το παράδειγμα έχει κάποια αξία να τονίσουμε γιατί ο χώρος στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι διδιάστατος: επειδή έχουμε βρει 2 μη μηδενικά σήματα $v_m(t)$ τα οποία συμμετέχουν στην κατασκευή των σημάτων βάσης $e_m(t)$. Αν είχαμε βρει τρία θα είχαμε τριδιάστατο χώρο, κ.ο.κ.

3.4 Θόρυβος, αυτός ο άγνωστος.

Θα αναρωτιέστε βέβαια ποια είναι η πρακτική αξία πίσω από τη γεωμετρική αναπαράσταση των σημάτων διαμόρφωσης της πληροφορίας. Η απάντηση βρίσκεται στο σχεδιασμό των δεκτών των τηλεπικοινωνιακών μας συστημάτων. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι έχουμε αποφασίσει τα σήματα διαμόρφωσης που θα χρησιμοποιήσουμε δηλαδή τα $s_m(t)$. Στον πομπό εκπέμπουμε ένα από αυτά έστω το $s_k(t)$ με την ελπίδα ότι θα φτάσει άθικτο στο δέκτη. Ωστόσο θόρυβος υπάρχει παντού και επομένως στο δέκτη το σήμα $r_k(t)$ που φτάνει είναι μία ενθόρυβη έκδοση του αρχικού σήματος, δηλαδή ισχύει

$$r_k(t) = s_k(t) + n(t) \quad (2.58)$$

όπου $n(t)$ είναι ένα τυχαίο σήμα που εκπροσωπεί το θόρυβο που εισάγεται από το τηλεπικοινωνιακό μας σύστημα. Στα μαθηματικά λέμε πως το $n(t)$ είναι ένα τυχαίο σήμα το οποίο δεν γνωρίζουμε ακριβώς, ωστόσο μπορούμε να κάνουμε κάποιες προβλέψεις για αυτό. Προτού δούμε πως η

γεωμετρική αναπαράσταση των σημάτων χρησιμοποιείται για τον σχεδιασμό των δεκτών θα πρέπει να πούμε ορισμένα πράγματα για το νέο μας φίλο.

Τι σημαίνει τυχαίο σήμα; Σημαίνει πως για κάθε χρονική στιγμή $t=t_i$ το $n=n(t_i)$ είναι μία τυχαία μεταβλητή. Μπορούμε επομένως να ορίσουμε την αναμενόμενη τιμή $E\{n(t_i)\}$ του $n(t_i)$. Για να καταλάβουμε λίγο καλύτερα τι σημαίνει η αναμενόμενη τιμή $E\{n(t_i)\}$ ας υποθέσουμε πως κάνουμε το παρακάτω πείραμα σκέψης. Ένας φοιτητής (δηλαδή εσείς) βρίσκεται στο εργαστήριο ηλεκτρονικής και καταγράφει την έξοδο ενός κυκλώματος δέκτη σε έναν ψηφιακό παλμογράφο. Ο ψηφιακός παλμογράφος είναι ένα πολύ χρήσιμο όργανο διότι μπορεί να μας επιστρέψει τα σήματα σε έναν υπολογιστή. Έτσι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μετρήσει την τιμή της τάσης που σχηματίζεται στην έξοδο του παλμογράφου την χρονική στιγμή $t=t_0=1\text{ms}$ όπου ο χρόνος μετρείται από τότε που ανάψαμε τον δέκτη. Απουσία σήματος ($s_m(t)=0$) ο παλμογράφος μετράει απλά το σήμα $n(t)$ την χρονική στιγμή t_0 . Την πρώτη φορά μετράμε την τιμή $n_0^{(1)}$. Στη συνέχεια κλείνουμε τον δέκτη και τον ξαναάνοιγουμε και μετράμε πάλι απουσία σήματος την τάση εξόδου $n(t)$ την χρονική στιγμή t_0 και βρίσκουμε την τιμή $n_0^{(2)}$. Επαναλαμβάνουμε το πείραμα πολλές φορές, N τον αριθμό και καταγράφουμε τις τιμές του θορύβου $n(t_0)$ οι οποίες στα διαδοχικά πειράματα είναι $n_0^{(v)}$. Η αναμενόμενη τιμή $E\{n(t_0)\}$ είναι το

$$m_n = E\{n(t_0)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_0^{(1)} + \dots + n_0^{(N)}}{N} \quad (2.59)$$

δηλαδή ο μέσος όρος των μετρήσεων που πραγματοποιούνται από έναν πολύ μεγάλο, θεωρητικά άπειρο αριθμό πειραμάτων. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αντιληφθούμε και την αναμενόμενη τιμή του τετραγώνου του $n(t_0)$ ως εξής

$$E\{n^2(t_0)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{[n_0^{(1)}]^2 + \dots + [n_0^{(N)}]^2}{N} \quad (2.60)$$

Επίσης μπορούμε να μετρήσουμε και τον αριθμό εμφανίσεων $N(x)$ του $n(t_0)$ μέσα σε ένα διάστημα $[x-\Delta x/2, x+\Delta x/2]$. Όταν το N γίνει πολύ μεγάλο θα πρέπει

$$P\left\{x - \frac{\Delta x}{2} \leq n(t_0) < x + \frac{\Delta x}{2}\right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(x)}{N} \quad (2.61)$$

ενώ όπως και στην περίπτωση των τυχαίων μεταβλητών ορίζουμε την πυκνότητα πιθανότητας του $n(t_0)$, $f_n(t_0, x)$ ως εξής:

$$f_n(t_0, x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} P\left\{x - \frac{\Delta x}{2} \leq n(t_0) < x + \frac{\Delta x}{2}\right\} \quad (2.62)$$

Παρατηρούμε ότι ένα τυχαίο σήμα μοιράζεται πολλά με τις τυχαίες τιμές. Όπως και για τις τελευταίες, ορίζουμε τις αναμενόμενες τιμές και μία πυκνότητα πιθανότητας. Το νέο στοιχείο είναι η ύπαρξη του χρόνου t_0 ως παράμετρος στις εξισώσεις. Αυτό σημαίνει ότι για παράδειγμα η πυκνότητα πιθανότητας $f_n(t_1, x)$ του $n(t)$ την χρονική στιγμή $t=t_1 > t_0$ ενδέχεται να είναι διαφορετική

από ότι η πυκνότητα πιθανότητας $f_n(t_0, x)$ την χρονική στιγμή $t=t_0$. Αυτό εξαρτάται από πολλούς παράγοντες όπως η φύση του ηλεκτρονικού κυκλώματος που υλοποιεί τον δέκτη ή ακόμα μπορεί να μεταβάλλεται η θερμοκρασία οπότε η ένταση του θορύβου να αυξομειώνεται με τον χρόνο, αλλοιώνοντας την στατιστική του συμπεριφορά. Ωστόσο στους θορύβους που θα συναντήσουμε παρακάτω πάντα θα θεωρούμε ότι η $f_n(t, x)$ δεν μεταβάλλεται με το t , δηλαδή η στατιστική του $n(t)$ παραμένει αναλλοίωτη.

Στα τυχαία σήματα υπάρχει και μία άλλη σημαντική παράμετρος: η συσχέτιση μεταξύ των δειγμάτων τους. Για παράδειγμα έστω ότι μετράμε το σήμα του θορύβου την χρονική στιγμή $t=t_0$ και το βρίσκουμε ίσο με $n(t_0)$, περιμένουμε λίγο και ξαναμετράμε την τιμή του $n(t_1)$ την χρονική στιγμή $t_1=t_0+\delta t$. Αν η χρονική απόσταση $\delta t=t_1-t_0$ είναι πολύ μικρή και το $n(t_0)$ είναι πολύ μεγάλο πόσο πιθανό είναι το $n(t_1)$ να είναι πολύ μικρό; Πόσο δηλαδή πιθανό είναι το σήμα το θορύβου να υπόκειται ξαφνικές και μεγάλες αλλαγές στην τιμή του; Η πληροφορία αυτή περιγράφεται από την συνδυασμένη πυκνότητα πιθανότητας του $n(t_0)$ και $n(t_1)$ η οποία ορίζεται ως:

$$f_n(t_0, t_1, x_0, x_1) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{1}{\Delta x \Delta y} P \left\{ x_0 - \frac{\Delta x}{2} \leq n(t_0) < x_0 + \frac{\Delta x}{2}, x_1 - \frac{\Delta y}{2} \leq n(t_1) < x_1 + \frac{\Delta y}{2} \right\} \quad (2.63)$$

Στην περίπτωση όπου τα $n(t_0)$ και $n(t_1)$ είναι ανεξάρτητα έπεται ότι

$$f_n(t_0, t_1, x_0, x_1) = f_n(t_0, x_0) f_n(t_1, x_1) \quad (2.64)$$

Θα δούμε ότι η αναμενόμενη τιμή $E\{n(t_1)n(t_0)\}$ έχει ιδιαίτερη σημασία στην ανάλυση των επιδόσεων των τηλεπικοινωνιακών συστημάτων και ονομάζεται συνάρτηση αυτοσυσχέτισης:

$$R_{nn}(t_1, t_0) = E\{n(t_1)n(t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_n(t_1, t_0, x, y) dx dy \quad (2.65)$$

Στην περίπτωση όπου τα $n(t_1)$ και $n(t_0)$ είναι ανεξάρτητα θα έχουμε:

$$R_{nn}(t_1, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_n(t_1, x) f_n(t_0, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(t_1, x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} y f_n(t_0, y) dy = E\{n(t_1)\} E\{n(t_0)\} \quad (2.66)$$

Φυσικά η πλήρης στατιστική του θορύβου καθορίζεται από την γνώση της πυκνότητας πιθανότητας λαμβάνοντας υπόψη πολλές χρονικές στιγμές, δηλαδή την

$$f_n(t_0, \dots, t_M, x_0, \dots, x_M) \quad (2.67)$$

Ο υπολογισμός της (2.67) είναι δύσκολος στην πράξη. Ωστόσο υπάρχει μία ειδική περίπτωση που εξετάζουμε παρακάτω και είναι γενικά χρήσιμη στις τηλεπικοινωνίες, ο Gaussian θόρυβος. Πριν δούμε μερικά παραδείγματα ας ορίσουμε την ενέργεια και την μέση ισχύ ενός τυχαίου σήματος.

Σε ένα χρονικό διάστημα $[\alpha, \beta]$ η αναμενόμενη ενέργεια $E_n(\alpha, \beta)$ και η αναμενόμενη μέση ισχύς $P_n(\alpha, \beta)$ ορίζονται ως εξής:

$$E_n(\alpha, \beta) = E \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} n^2(t) dt \right\} \quad (2.68)$$

$$P_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta - \alpha} E \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} n^2(t) dt \right\} \quad (2.69)$$

Συχνά όταν αναφερόμαστε στην αναμενόμενη ενέργεια και την αναμενόμενη μέση ισχύ δεν αναφέρουμε καθόλου τα άκρα του διαστήματος οπότε θεωρούμε πως το διάστημα στο οποίο υπολογίζουμε τα παραπάνω μεγέθη είναι το $(-\infty, +\infty)$ οπότε:

$$E_n = E \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} n^2(t) dt \right\} \quad (2.70)$$

$$P_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left\{ \int_{-T/2}^{+T/2} n^2(t) dt \right\} \quad (2.71)$$

Ας δούμε ένα παράδειγμα

Παράδειγμα 3.2

Δίνεται ένα τυχαίο σήμα $z(t) = \cos(2\pi f_0 t + \theta)$ όπου θ είναι μία ομοιόμορφα κατανομημένη μεταβλητή στο $[0, 2\pi]$. Να υπολογιστούν η μέση τιμή m_z της $z(t)$, η αναμενόμενη ισχύς της καθώς και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της.

Έχουμε:

$$m_z = E\{z(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t + \theta) d\theta = 0 \quad (2.72)$$

$$P_z = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} z^2(t) dt \right\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(2\pi f_0 t + \theta) dt \right\} \quad (2.73)$$

Λεδομένου ότι

$$E \left\{ \cos^2(2\pi f_0 t + \theta) \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(2\pi f_0 t + \theta) d\theta = \frac{1}{2} \quad (2.74)$$

οπότε

$$P_z = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2T} = \frac{1}{2} \quad (2.75)$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είδαμε ότι δίνεται από την σχέση:

$$R_{nn}(t_1, t_2) = E \{ n(t_1) n(t_2) \} = E \left\{ \cos(2\pi f_0 t_1 + \theta) \cos(2\pi f_0 t_2 + \theta) \right\} \quad (2.76)$$

Χρησιμοποιούμε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\frac{1}{2}\cos(p-q)-\frac{1}{2}\cos(p+q)=\cos p\cos q$ οπότε

$$R_{nn}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} E \{ \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2)) - \cos(2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\theta) \} = \frac{\cos(2\pi f_0(t_1 - t_2))}{2} \quad (2.77)$$

Ο δεύτερος όρος εντός της αναμενόμενης τιμής στο μεσαίο μέρος της (2.77) έχει μηδενική αναμενόμενη τιμή όπως εύκολα μπορούμε να δείξουμε.

Στο παραπάνω απλό παράδειγμα βλέπουμε ότι για το συγκεκριμένο τυχαίο σήμα η συνάρτηση συσχέτισης εξαρτάται απευθείας από τα t_1 και t_2 από τη διαφορά $t_1 - t_2$. Μάλιστα επειδή το συνημίτονο έχει την ιδιότητα $\cos\phi = \cos(-\phi) = \cos(|\phi|)$ προκύπτει ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης εξαρτάται από το $|t_1 - t_2|$. Τυχαία σήματα για τα οποία ισχύει:

$$R_{nn}(t_1, t_2) = R_{nn}(|t_1 - t_2|) \quad (2.78)$$

ενώ η αναμενόμενη τιμή τους

$$m_n = E\{n(t)\} \quad (2.79)$$

δεν εξαρτάται από το χρόνο ονομάζονται *στατικά με την ευρεία έννοια*. Υπάρχουν και στατικά σήματα με την στενή έννοια. Εξ' ορισμού, ένα σήμα στατικό με την στενή έννοια είναι ένα σήμα για το οποίο ισχύει

$$f_n(t_0 + \Delta t, \dots, t_M + \Delta t, x_0, \dots, x_M) = f_n(t_0, \dots, t_M, x_0, \dots, x_M) \quad (2.80)$$

δηλαδή η συνδυασμένη πυκνότητα πιθανότητας παραμένει αναλλοίωτη όταν στις χρονικές στιγμές προστεθεί ένας παράγοντας Δt .

3.5 Gaussian θόρυβος

Είπαμε πως η γνώση της πλήρους στατιστικής ενός τυχαίου σήματος όπως ο θόρυβος απαιτεί να ξέρουμε την συνδυασμένη πυκνότητα πιθανότητας (2.67) κάτι που γενικά είναι δύσκολο. Ωστόσο υπάρχει μία περίπτωση που συναντάται αρκετά συχνά στην ανάλυση τηλεπικοινωνιακών συστημάτων: Ο Gaussian θόρυβος. Ο Gaussian θόρυβος είναι ένα τυχαίο σήμα του οποίου τα δείγματα σε οποιοδήποτε χρονικές στιγμές $(t_1, \dots, t_N)$, δηλαδή τα $m_1 = n(t_1), \dots, m_N = n(t_N)$ έχουν συνδυασμένη Gaussian κατανομή, δηλαδή η συνδυασμένη πυκνότητα πιθανότητας δίνεται από την σχέση

$$f_n(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\mathbf{C})}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{m})' \mathbf{C}^{-1} (\vec{x} - \vec{m}) \right\} \quad (2.81)$$

όπου το διάνυσμα $\vec{x}$ είναι ένα διάνυσμα στήλη $1 \times N$ το οποίο περιέχει ως στοιχεία τις τιμές $(x_1, \dots, x_N)$ στις οποίες υπολογίζεται η πυκνότητα πιθανότητας, ενώ το διάνυσμα $\vec{m}$ είναι και αυτό ένα διάνυσμα στήλη $1 \times N$ το οποίο περιέχει τις αναμενόμενες τιμές $m = E\{n(t_i)\}$ των $n(t_i)$ ενώ ο πίνακας $\mathbf{C}$ είναι $N \times N$ και τα στοιχεία του C_{pq} καθορίζονται από την σχέση,

$$C_{pq} = E \{ (n(t_p) - m_p)(n(t_q) - m_q) \} \quad (2.82)$$

Στην ουσία τα στοιχεία του **C** καθορίζονται από την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του n . Ας δούμε ένα παράδειγμα

Παράδειγμα 3.3

Να υπολογίσετε την συνδυασμένη πυκνότητα πιθανότητας δύο δειγμάτων $n_1=n(t_1)$ και $n_2=n(t_2)$ ενός τυχαίου Gaussian σήματος που απέχουν χρονικά 1ms δεδομένου ότι έχουν μηδενική μέση τιμή και συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{nn}(t_1, t_2) = \exp(-|t_1 - t_2|/\tau)$ όπου $\tau=0.5\text{ms}$.

Για να καθορίσουμε την συνδυασμένη πυκνότητα πιθανότητας $f_n(x_1, x_2)$ των $n_1=n(t_1)$ και $n_2=n(t_2)$ θα πρέπει να υπολογίσουμε το διάνυσμα $\vec{m}$ και τον πίνακα **C**. Σύμφωνα με την εκφώνηση τα δείγματα του θορύβου έχουν μέση τιμή μηδέν, οπότε

$$m_1 = E\{n(t_1)\} = 0 \quad (2.83)$$

$$m_2 = E\{n(t_2)\} = 0 \quad (2.84)$$

και το διάνυσμα $\vec{m}$ δίνεται από την σχέση:

$$\vec{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

Στη συνέχεια θα πρέπει να υπολογίσουμε τα στοιχεία του 2x2 πίνακα **C** σύμφωνα με την (2.82). Θα έχουμε

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

όπου δεδομένου ότι οι χρονικές στιγμές t_1 και t_2 απέχουν $|t_1 - t_2| = 1\text{ms}$ θα έχουμε:

$$C_{11} = E\{n(t_1)n(t_1)\} = R_{nn}(t_1, t_1) = 1 \quad (2.87)$$

$$C_{12} = E\{n(t_1)n(t_2)\} = R_{nn}(t_1, t_2) = e^{-2} \quad (2.88)$$

$$C_{21} = E\{n(t_2)n(t_1)\} = R_{nn}(t_2, t_1) = e^{-2} \quad (2.89)$$

$$C_{22} = E\{n(t_2)n(t_2)\} = R_{nn}(t_2, t_2) = 1 \quad (2.90)$$

οπότε

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-2} \\ e^{-2} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

ενώ

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{1-e^{-4}} \begin{bmatrix} 1 & -e^{-2} \\ -e^{-2} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

η ορίζουσα της (2.91) είναι ίση με

$$\det(\mathbf{C}) = 1 - e^{-4} \quad (2.93)$$

ενώ η παράσταση εντός του εκθετικού στην (2.81) υπολογίζεται ως εξής:

$$(\bar{x} - \bar{m})^t \mathbf{C}^{-1} (\bar{x} - \bar{m}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \frac{1}{1-e^{-4}} \begin{bmatrix} 1 & -e^{-2} \\ -e^{-2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1-e^{-4}} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - e^{-2}x_2 \\ -e^{-2}x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2e^{-2}x_1x_2}{1-e^{-4}} \quad (2.94)$$

οπότε τελικά η πυκνότητα πιθανότητας θα είναι ίση με

$$f_n(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-e^{-4}}} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2e^{-2}x_1x_2}{2(1-e^{-4})}\right) \quad (2.95)$$

3.6 Ο θόρυβος στο πεδίο των συχνοτήτων

Θα εξετάσουμε τώρα την συμπεριφορά των τυχαίων σημάτων στο πεδίο των συχνοτήτων. Είναι προφανές πως κεντρικό σημείο στην συχνοτική μας ανάλυση θα παίξει ο μετασχηματισμός Fourier. Για να είμαστε σίγουροι πως ο μετασχηματισμός αυτός υπάρχει, καταρχήν μπορούμε να «παραθυρώσουμε» το σήμα $n(t)$ δημιουργώντας ένα νέο σήμα $n_T(t)$ το οποίο είναι ίσο με $n(t)$ για $|t| \leq T/2$ ενώ για $|t| > T/2$ είναι ίσο με μηδέν, δηλαδή:

$$n_T(t) = \begin{cases} n(t) & |t| \leq T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases} \quad (2.96)$$

Εφόσον το σήμα αυτό είναι πεπερασμένης διάρκειας είμαστε (σχεδόν) σίγουροι ότι υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier του $N_T(f)$ ο οποίος φυσικά δίνεται από την σχέση:

$$N_T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} n_T(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.97)$$

Η ποσότητα $|N_T(f)|^2$ όταν ολοκληρώνεται ως προς f μας δίνει σύμφωνα με το θεώρημα του Parseval την ενέργεια του σήματος $n_T(t)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |N_T(f)|^2 df = \int_{-T/2}^{T/2} |n_T(t)|^2 dt \quad (2.98)$$

Αν πάρουμε αναμενόμενες τιμές τότε το δεξιό μέρος της (2.98) γίνεται η αναμενόμενη ενέργεια του σήματος,

$$E_n(-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T) = E \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} |n_T(t)|^2 dt \right\} = E \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |N_T(f)|^2 df \right\} \quad (2.99)$$

ενώ η μέση ισχύς του σήματος $n_T(t)$ είναι η ενέργεια του σήματος διά την χρονική του διάρκεια η οποία σύμφωνα με την (2.99) γράφεται

$$P_n(-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T) = \frac{1}{T} E \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |N_T(f)|^2 df \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} E \left\{ \frac{|N_T(f)|^2}{T} \right\} df \quad (2.100)$$

Η μέση ισχύς στο $(-\infty, +\infty)$ λαμβάνεται στο όριο όπου $T \rightarrow \infty$ οπότε

$$P_n = \int_{-\infty}^{+\infty} E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|N_T(f)|^2}{T} \right\} df \quad (2.101)$$

Αν ορίσουμε την ποσότητα

$$S_n(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{|N_T(f)|^2}{T} \right\} \quad (2.102)$$

τότε η ισχύς γράφεται ως εξής:

$$P_n = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f) df \quad (2.103)$$

Καταλαβαίνουμε ότι η ποσότητα $S_n(f)$ όταν ολοκληρωθεί ισούται με την αναμενόμενη μέση ισχύ P_n του τυχαίου σήματος. Συχνότητες με μεγάλο $S_n(f)$ συμμετέχουν ισχυρά στον καθορισμό της P_n ενώ αντίθετα συχνότητες με μικρό $S_n(f)$ δεν καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό την P_n . Υπό μία έννοια επομένως η $S_n(f)$ καθορίζει το πόσο ισχυρές είναι οι φασματικές συνιστώσες του τυχαίου σήματος και ονομάζεται *φασματική πυκνότητα ισχύος* του τυχαίου σήματος $n(t)$.

Το θεώρημα Wiener-Khinchin μας δίνει ένα βασικό εργαλείο για τον υπολογισμό του $S_n(f)$ χωρίς να περνάμε από όλη την διαδικασία του να «παραθυρώνουμε» το $n(t)$ και μετά να υπολογίζουμε τα τις αναμενόμενες τιμές των περιέργων ορίων της (2.102). Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό αν υπολογίσουμε την μέση τιμή $\bar{R}_{nn}(\tau)$ της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης $R_{nn}(t+\tau, t)$ ως προς t ,

$$\bar{R}_{nn}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_{nn}(t+\tau, t) dt \quad (2.104)$$

τότε η φασματική πυκνότητα ισχύος καθορίζεται από την σχέση:

$$S_n(f) = F_\tau \{ \bar{R}_{nn}(\tau) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{R}_{nn}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2.105)$$

όπου $F_\tau\{\}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier ως προς τ . Φυσικά αν η $n(t)$ είναι στατική με την ευρεία έννοια θα έχουμε $R_{nn}(t+\tau, t) = R_{nn}(\tau)$ οπότε

$$\bar{R}_{nn}(\tau) = R_{nn}(\tau) \quad (2.106)$$

και

$$S_n(f) = F_\tau \{R_{nn}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{nn}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2.107)$$

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.4

Για το τυχαίο σήμα στο Παράδειγμα 3.2 να βρείτε την φασματική πυκνότητα ισχύος με δύο τρόπους: μία εφαρμόζοντας απευθείας τον ορισμό (2.102) και μία το θεώρημα Wiener-Khinchin.

Ξεκινάμε με τον πρώτο τρόπο. Ορίζουμε το σήμα $n_T(t)$ σύμφωνα με την (2.96) ως εξής:

$$n_T(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 t + \theta) & , |t| \leq \frac{1}{2}T \\ 0 & , |t| > \frac{1}{2}T \end{cases} \quad (2.108)$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier για το σήμα $n_T(t)$ ως εξής:

$$N_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f_0 t + \theta) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi(f+f_0)t + j\theta} dt + \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi(f-f_0)t - j\theta} dt \quad (2.109)$$

Τα εσωτερικά ολοκληρώματα της (2.109) υπολογίζονται ως εξής:

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi(f+f_0)t} dt = \frac{e^{j\pi(f+f_0)T} - e^{-j\pi(f+f_0)T}}{2\pi(f+f_0)} = T \text{sinc}(T(f+f_0)) \quad (2.110)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi(f-f_0)t} dt = \frac{e^{j\pi(f-f_0)T} - e^{-j\pi(f-f_0)T}}{2\pi(f-f_0)} = T \text{sinc}(T(f-f_0)) \quad (2.111)$$

οπότε

$$N_T(f) = T e^{j\theta} \text{sinc}(T(f+f_0)) + T e^{-j\theta} \text{sinc}(T(f-f_0)) = A e^{j\theta} + B e^{-j\theta} \quad (2.112)$$

όπου για ευκολία έχουμε ορίσει τις παραμέτρους

$$A = \frac{T \text{sinc}(T(f+f_0))}{2} \quad (2.113)$$

$$B = \frac{T \text{sinc}(T(f-f_0))}{2} \quad (2.114)$$

Από την (2.112) προκύπτει ότι

$$\frac{|N_T(f)|^2}{T} = \frac{A^2 + B^2 + 2AB \cos(2\theta)}{T} \quad (2.115)$$

Η αναμενόμενη τιμή της (2.115) υπολογίζεται ως εξής:

$$E \left\{ \frac{|N_T(f)|^2}{T} \right\} = \frac{A^2 + B^2}{T} + \frac{2AB}{T} E \{ \cos(2\theta) \} = \frac{A^2 + B^2}{T} \quad (2.116)$$

όπου στην τελευταία εξίσωση χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η αναμενόμενη τιμή του $\cos(2\theta)$ είναι μηδέν δεδομένου ότι το θ είναι ομοιόμορφα κατανεμμένο στο $[0, 2\pi]$. Αντικαθιστώντας τις τιμές των A και B βρίσκουμε:

$$E \left\{ \frac{|N_T(f)|^2}{T} \right\} = \frac{A^2 + B^2}{T} = \frac{T \text{sinc}^2(T(f + f_0)) + T \text{sinc}^2(T(f - f_0))}{4} \quad (2.117)$$

Στη συνέχεια θα πρέπει να υπολογίσουμε το όριο όταν $T \rightarrow \infty$ της (2.117) όπου εμφανίζονται όρια της μορφής

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T \text{sinc}^2(vT) \quad (2.118)$$

Γνωρίζουμε ότι το $\text{sinc}^2(v)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$f(u) = \begin{cases} -u+1 & , 0 \leq u \leq 1 \\ u+1 & , -1 \leq u \leq 0 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2.119)$$

Εφόσον το $\text{sinc}^2(v)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $f(u)$ έπεται ότι το $\text{sinc}^2(vT)$ θα είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $(1/T)f(u/T)$ ή ισοδύναμα (πολλαπλασιάζοντας με T) ότι το $T \text{sinc}^2(vT)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του $f(u/T)$. Στο όριο όπου $T \rightarrow \infty$ θα έπεται ότι $u/T \rightarrow 0$ για κάθε πεπερασμένο u και επομένως $f(u/T) \rightarrow 1$. Επομένως η (2.118) είναι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $f(u/T)=1$ που γνωρίζουμε ότι είναι ίσος με $\delta(v)$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T \text{sinc}^2(vT) = \delta(v) \quad (2.120)$$

Σύμφωνα με την (2.117) και την (2.120) θα ισχύει:

$$S_n(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{|N_T(f)|^2}{T} \right\} = \frac{1}{4} \{ \delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) \} \quad (2.121)$$

Δηλαδή όπως το περιμέναμε η φασματική πυκνότητα ισχύος είναι μη μηδενική για $f = \pm f_0$ που είναι και οι μόνες συχνότητες που περιέχει το σήμα $n(t)$.

Ας δούμε τώρα πόσο πιο απλός είναι ο υπολογισμός όταν χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Wiener-Khinchin. Δεδομένου σύμφωνα με όσα είδαμε στο Παράδειγμα 3.2, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι:

$$R_m(t + \tau, t) = \frac{\cos(2\pi f_0 \tau)}{2} = R_m(\tau) \quad (2.122)$$

και εξαρτάται μόνο από το τ θα έχουμε σύμφωνα με την (2.107) ότι η $S_n(f)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $R_{nn}(\tau)$ που δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός Fourier του $\cos(2\pi f_0 \tau)$ είναι $[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]/2$ υπολογίζεται εύκολα ως:

$$S_n(f) = \frac{1}{4} \{ \delta(f-f_0) + \delta(f+f_0) \} \quad (2.123)$$

3.7 Τι συμβαίνει όταν ο θόρυβος περνάει από ένα σύστημα;

Να ένα καλό ερώτημα η απάντηση του οποίου θα μας βοηθήσει σημαντικά στα παρακάτω. Τι συμβαίνει όταν ένα τυχαίο σήμα περνάει μέσα από ένα σύστημα όπως δείχνει και το Σχήμα 3-7; Μπορούμε να πούμε κάτι για την στατιστική του σήματος $u(t)$ στην έξοδο αν γνωρίζουμε την στατιστική του σήματος στην είσοδο;



Σχήμα 3-7: Ένα τυχαίο σήμα $n(t)$ το οποίο περνάει από ένα σύστημα και μετασχηματίζεται σε ένα νέο τυχαίο σήμα $u(t)$.

Για να απαντήσουμε το ερώτημα αυτό θα πρέπει να θυμόμαστε ότι στην περίπτωση που το σύστημα μας είναι γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο υπάρχει μία πολύ βασική σχέση μέσω συγκερασμού που συνδέει το $u(t)$ με το $n(t)$:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)n(\tau)d\tau = h(t) \otimes n(t) \quad (2.124)$$

όπου $\otimes$ είναι το σύμβολο που χρησιμοποιήσουμε για τον συγκερασμό και η συνάρτηση $h(t)$ είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος μας. Βάση της σχέσης (2.124) υπολογίζουμε διάφορες στατιστικές ιδιότητες του σήματος εξόδου. Για παράδειγμα αν υποθέσουμε πως η μέση τιμή $m_n = E\{n(t)\}$ του $n(t)$ δεν μεταβάλλεται χρονικά, θα έχουμε:

$$m_u = E\{u(t)\} = E\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)n(\tau)d\tau \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)E\{n(\tau)\}d\tau = m_n \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)d\tau \quad (2.125)$$

με μία αλλαγή μεταβλητής $\tau' = t - \tau$, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$m_u = m_n \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau')d\tau' \quad (2.126)$$

που δείχνει ότι η αναμενόμενη τιμή του σήματος εξόδου προκύπτει από το γινόμενο της αναμενόμενης τιμής του σήματος εισόδου με το ολοκλήρωμα της κρουστικής απόκρισης του συστήματος.

Συνεχίζουμε για να υπολογίσουμε και άλλες στατιστικές ιδιότητες του σήματος εξόδου. Για παράδειγμα αν η $n(t)$ είναι στατική με την ευρεία έννοια, έπεται ότι

$$R_{uu}(t_1, t_2) = E\{u(t_1)u(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1 - \tau_1)h(t_2 - \tau_2)E\{n(\tau_1)n(\tau_2)\}d\tau_1d\tau_2 \quad (2.127)$$

Αντικαθιστώντας το $E\{n(\tau_1)n(\tau_2)\}=R_{nn}(\tau_1-\tau_2)$ η (2.127) γράφεται ως εξής:

$$R_{uu}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1 - \tau_1)h(t_2 - \tau_2)R_{nn}(\tau_1 - \tau_2)d\tau_1d\tau_2 \quad (2.128)$$

Αν θέσουμε $\tau=t_1-t_2$, $t'_1=t_1-\tau$, $t'_2=t_2-\tau$, θα έχουμε

$$R_{uu}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau'_1)h(\tau'_2)R_{nn}(\tau + \tau'_2 - \tau'_1)d\tau'_1d\tau'_2 \quad (2.129)$$

και αν θέσουμε όπου τ'_2 το $-\tau'_2$ το ολοκλήρωμα εύκολα γράφεται και ως:

$$R_{uu}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau'_1)h(-\tau'_2)R_{nn}(\tau - \tau'_2 - \tau'_1)d\tau'_1d\tau'_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(-\tau'_2)R_{nn}(\tau - \tau'_2 - \tau'_1)d\tau'_2 \right) h(\tau'_1)d\tau'_1 \quad (2.130)$$

Ο συγκεκριασμός της $h(-t)$ με την $R_{nn}(t)$ δίνεται από μία σχέση ανάλογη με την (2.124), δηλαδή

$$c_1(t) = h(-t) \otimes R_{nn}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(-\tau'_2)R_{nn}(t - \tau'_2)d\tau'_2 \quad (2.131)$$

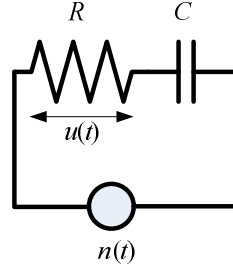
επομένως το εσωτερικό ολοκλήρωμα είναι ο συγκεκριασμός της $h(-t)$ με την $R_{nn}(t)$ υπολογισμένος στο $t=\tau-\tau'_1$ δηλαδή η $c_1(\tau-\tau'_1)$. Βασισμένοι σε αυτό το γεγονός γράφουμε την (2.130) ως:

$$R_{uu}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} c_1(\tau - \tau'_1)h(\tau'_1)d\tau'_1 = c_1(\tau) \otimes h(\tau) = R_{nn}(\tau) \otimes h(-\tau) \otimes h(\tau) \quad (2.132)$$

Η (2.132) υποδεικνύει ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της εξόδου εξαρτάται μόνο από το $\tau=t_1-t_2$ και καθορίζεται από το διπλό συγκεκριασμό της R_{nn} με την $h(-\tau)$ και την $h(\tau)$. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.5

Ένα τυχαίο σήμα τάσης το οποίο είναι στατικό με την ευρεία έννοια έχει φασματική πυκνότητα ισχύος $S_n(f)=N_0/2$ όπου N_0 είναι μία σταθερά και μηδενική μέση τιμή. Να βρεθούν α) η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του και β) η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος στην έξοδο του κυκλώματος όταν το σήμα διεγείρει ένα κύκλωμα RC και η τάση εξόδου μετρείται στα άκρα της αντίστασης όπως δείχνει και το παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 3-8: Το κύκλωμα για το Παράδειγμα 3.5.

Για να βρούμε την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος $n(t)$ απλά χρησιμοποιούμε το θεώρημα Wiener-Khinchin, σύμφωνα με το οποίο το $R_{nn}(\tau)$ θα προκύπτει από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της φασματικής πυκνότητας ισχύος. Δεδομένου ότι $S_n(f) = N_0/2$ προκύπτει ότι $R_{nn}(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau)$. Δεδομένου ότι για $\tau \neq 0$ ισχύει $\delta(\tau) = 0$, θα ισχύει και ότι $R_{nn}(\tau) = 0$ δηλαδή $E\{n(t+\tau)n(t)\} = 0$ οπότε τα δείγματα $n(t)$ και $n(t+\tau)$ για $\tau \neq 0$ είναι ανεξάρτητα με την ευρεία έννοια. Ακόμα πιο ενδιαφέρον είναι ότι $R_{nn}(\tau) \rightarrow \infty$ όταν $\tau \rightarrow 0$ αλλά με αυτό το φαινόμενο θα ασχοληθούμε σε παρακάτω ενότητα.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{uu}(\tau)$ του σήματος $u(t)$ στην έξοδο η οποία όπως είδαμε δίνεται από την (2.132). Για να εφαρμόσουμε την σχέση θα πρέπει να βρούμε την κρουστική απόκριση του συστήματος $h(t)$. Ελπίζω να θυμάστε από την Ηλεκτρονική ότι η συνάρτηση μεταφοράς $H(f)$ που συνδέει την τάση εισόδου με την τάση πάνω στην αντίσταση R είναι:

$$H(f) = \frac{j2\pi fRC}{1 + j2\pi fRC} = 1 - \frac{1}{1 + j2\pi fRC} \quad (2.133)$$

Δεδομένου ότι η κρουστική απόκριση $h(t)$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης μεταφοράς $H(f)$ του συστήματος και ότι το $1/(1+j2\pi fa)$ όπου a μία σταθερά¹⁵ έχει αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier ίσο $\exp(-at)U(t)$ όπου $U(t)=1$ για $t \geq 0$ και $U(t)=0$ για $t < 0$ έπεται ότι:

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-t/RC} U(t) \quad (2.134)$$

Θα πρέπει τώρα να υπολογίσουμε τον διπλό συγκερασμό της (2.132). Εφόσον $R_{nn}(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau)$ προκύπτει ότι

$$R_{nn}(\tau) \otimes h(-\tau) = \frac{N_0}{2} h(-\tau) = \frac{N_0}{2} \left\{ \delta(-\tau) - \frac{1}{RC} e^{\tau/RC} U(-\tau) \right\} = \frac{N_0}{2} \left\{ \delta(\tau) - \frac{1}{RC} e^{\tau/RC} U(-\tau) \right\} \quad (2.135)$$

οπότε

$$R_{nn}(\tau) \otimes h(-\tau) \otimes h(\tau) = \frac{N_0}{2} \left(\delta(\tau) - \frac{1}{RC} e^{\tau/RC} U(-\tau) \right) \otimes \left(\delta(\tau) - \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} U(\tau) \right) \quad (2.136)$$

¹⁵ Στην δική μας περίπτωση $a=RC$.

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του συγκεκριασμού θα έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\delta(\tau) - \frac{1}{RC} e^{\tau/RC} U(-\tau) \right) \otimes \left(\delta(\tau) - \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} U(\tau) \right) &= \delta(\tau) \otimes \delta(\tau) - \frac{1}{RC} e^{\tau/RC} U(-\tau) \otimes \delta(\tau) \\ &- \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} U(\tau) \otimes \delta(\tau) + \frac{1}{(RC)^2} e^{\tau/RC} U(-\tau) \otimes e^{-\tau/RC} U(\tau) \end{aligned} \quad (2.137)$$

Οι ιδιότητες της συνάρτησης δ υποδεικνύουν ότι:

$$\delta(\tau) \otimes \delta(\tau) = \delta(\tau) \quad (2.138)$$

$$e^{\tau/RC} U(-\tau) \otimes \delta(\tau) = e^{\tau/RC} U(-\tau) \quad (2.139)$$

$$e^{-\tau/RC} U(\tau) \otimes \delta(\tau) = e^{-\tau/RC} U(\tau) \quad (2.140)$$

Για τον υπολογισμό του τέταρτου συγκεκριασμού στο τελευταίο μέρος της (2.137) χρησιμοποιούμε το ολοκλήρωμα του συγκεκριασμού, δηλαδή

$$e^{\tau/RC} U(-\tau) \otimes e^{-\tau/RC} U(\tau) = e^{-\tau/RC} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\tau_1/RC} U(-\tau_1) U(\tau - \tau_1) d\tau_1 \quad (2.141)$$

Για να υπολογίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $U(-\tau_1)=0$ για $\tau_1>0$, ενώ $U(\tau-\tau_1)=0$ για $\tau_1>\tau$. Οπότε για $\tau \geq 0$ θα έχουμε:

$$e^{-\tau/RC} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\tau_1/RC} U(-\tau_1) U(\tau - \tau_1) d\tau_1 = e^{-\tau/RC} \int_{-\infty}^0 e^{2\tau_1/RC} d\tau_1 = \frac{RC}{2} e^{-\tau/RC} \quad (2.142)$$

ενώ για $\tau < 0$ θα έχουμε

$$e^{-\tau/RC} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\tau_1/RC} U(-\tau_1) U(\tau - \tau_1) d\tau_1 = e^{-\tau/RC} \int_{-\infty}^{\tau} e^{2\tau_1/RC} d\tau_1 = \frac{RC}{2} e^{\tau/RC} \quad (2.143)$$

δηλαδή τελικά:

$$e^{\tau/RC} U(-\tau) \otimes e^{-\tau/RC} U(\tau) = \frac{RC}{2} e^{-|\tau|/RC} \quad (2.144)$$

και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης θα γραφτεί:

$$R_{uu}(\tau) = \frac{N_0}{2} \left\{ \delta(\tau) - \frac{1}{RC} e^{\tau/RC} U(-\tau) - \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} U(\tau) + \frac{1}{2} \frac{1}{RC} e^{-|\tau|/RC} \right\} \quad (2.145)$$

Αν $\tau > 0$ θα έχουμε $U(-\tau)=0$ και $U(\tau)=1$ οπότε

$$R_{uu}(\tau) = \frac{N_0}{2} \left\{ \delta(\tau) - \frac{1}{2RC} e^{-\tau/RC} \right\} \quad (2.146)$$

Αν $\tau \leq 0$ θα έχουμε $U(-\tau)=1$ και $U(\tau)=0$ οπότε

$$R_{uu}(\tau) = \frac{N_0}{2} \left\{ \delta(\tau) - \frac{1}{2RC} e^{\tau/RC} \right\} \quad (2.147)$$

Τελικά

$$R_{uu}(\tau) = \frac{N_0}{2} \left\{ \delta(\tau) - \frac{1}{2RC} e^{-|\tau|/RC} \right\} \quad (2.148)$$

Τα φασματικά χαρακτηριστικά του θορύβου είναι ακόμα πιο απλό να υπολογιστούν. Αν πάλι υποθέσουμε ότι το $n(t)$ οπότε και το $u(t)$ είναι στατικά τυχαία σήματα με την ευρεία έννοια, θα έχουμε:

$$S_u(f) = F \{ R_{nn}(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau) \} = S_n(f) |H(f)|^2 \quad (2.149)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός Fourier $F\{g(\tau) \otimes f(\tau)\}$ του συγκεκριασμού $g(\tau) \otimes f(\tau)$ δύο χρονικών συναρτήσεων $g(\tau)$ και $f(\tau)$ είναι το γινόμενο των επιμέρους μετασχηματισμών Fourier $F\{g(\tau) \otimes f(\tau)\} = F\{g(\tau)\} F\{f(\tau)\} = G(f) F(f)$. Επίσης χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι αν $H(f) = F\{h(\tau)\}$ τότε $H^*(f) = F\{h(-\tau)\}$ όπου με αστερίσκο υποδηλώνουμε το μιγαδικό συζυγές.

Παράδειγμα 3.6

Να βρείτε την φασματική πυκνότητα ισχύος $S_u(f)$ του σήματος εξόδου $u(t)$ στο Παράδειγμα 3.5.

Απλά εφαρμόζουμε την (2.149) οπότε θα έχουμε:

$$S_u(f) = S_n(f) |H(f)|^2 = \frac{(2\pi RCf)^2}{1 + (2\pi RCf)^2} \frac{N_0}{2} \quad (2.150)$$

Έχει και κάποιο ενδιαφέρον να συγκρίνουμε την (2.150) με το αποτέλεσμα που βρήκαμε στο Παράδειγμα 3.5. Η $S_u(f)$ γράφεται:

$$S_u(f) = \left\{ 1 - \frac{1}{1 + (2\pi RCf)^2} \right\} \frac{N_0}{2} \quad (2.151)$$

Δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός Fourier του $2a/(a^2 + (2\pi f)^2)$ είναι το $\exp(-a|\tau|)$ θα έχουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του $1/(1 + (2\pi af)^2) = (1/a^2)/(1/a^2 + (2\pi f)^2)$ θα είναι $(1/(2a)) \exp(-|\tau|/a)$ οπότε

$$R_{uu}(\tau) = \frac{N_0}{2} F^{-1} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + (2\pi RCf)^2} \right\} = \frac{N_0}{2} \left(\delta(\tau) - \frac{1}{2RC} e^{-|\tau|/RC} \right) \quad (2.152)$$

δηλαδή η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης που βρήκαμε στο Παράδειγμα 3.5.

Μέχρι τώρα δεν έχουμε σχολιάσει καθόλου την πυκνότητα πιθανότητας του $u(t)$ ή ακόμα και την συνδυασμένη πυκνότητα πιθανότητας των δειγμάτων του $u(t_1), \dots, u(t_N)$. Αν και στη γενική περίπτωση το πρόβλημα του υπολογισμού της συνδυασμένης πυκνότητας πιθανότητας εξόδου είναι δύσκολη υπόθεση, εντούτοις στην ειδική περίπτωση όπου ο θόρυβος εισόδου είναι Gaussian, ο

υπολογισμός αυτός είναι εύκολη υπόθεση! Μάλιστα προκύπτει ότι και ο θόρυβος εξόδου $u(t)$ είναι Gaussian και δεδομένου πως μπορούμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{uu}(\tau)$ σύμφωνα με την (2.132) είμαστε σε θέση να καθορίσουμε επακριβώς την συνδυασμένη πυκνότητα πιθανότητας των δειγμάτων της $u(t)$ όπως κάναμε και στο Παράδειγμα 3.3.

Το μεγάλο ερώτημα είναι φυσικά γιατί όταν ο θόρυβος στην είσοδο είναι Gaussian τότε και ο θόρυβος εξόδου είναι Gaussian. Η απάντηση δεν είναι και τόσο πολύπλοκη. Σύμφωνα με την (2.124), τα δείγματα της εξόδου μπορούν να γραφτούν προσεγγιστικά

$$u(t_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_i - \tau) n(\tau) d\tau \cong \Delta t \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(t_i - t_m) n(t_m) \quad (2.153)$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι τα διαδοχικά δείγματα t_m που θεωρούμε απέχουν Δt . Η (2.153) προκύπτει και πάλι από το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα είναι ένα άθροισμα και υποδεικνύει ότι το $u(t_i)$ είναι γραμμικός συνδυασμός Gaussian μεταβλητών δηλαδή των $n(t_m)$ οπότε και αυτά θα είναι Gaussian.

3.8 Ο καλύτερος δέκτης

Τα ευρήματα των προηγούμενων παραγράφων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να σχεδιάσουμε τον δέκτη του συστήματος. Ήδη από την παράγραφο 3.4 είδαμε ότι το σήμα $r_k(t)$ που φτάνει στο δέκτη είναι μία ενθόρυβη έκδοση του αρχικού σήματος, δηλαδή ισχύει

$$r_k(t) = s_k(t) + n(t) \quad (2.154)$$

όπου $n(t)$ είναι ένα τυχαίο σήμα που εκπροσωπεί το θόρυβο που εισάγεται από το τηλεπικοινωνιακό μας σύστημα. Ο δέκτης δεν μπορεί απευθείας να ξεχωρίσει το $s_k(t)$ και το $n(t)$: Απλά λαμβάνει το άθροισμα των σημάτων και με κάποιο τρόπο θα πρέπει να αποφασίσει με ποιο από τα $s_m(t)$ μοιάζει περισσότερο το σήμα $r_k(t)$ που έλαβε.

Είναι ενδιαφέρον να δούμε την όλη διαδικασία γεωμετρικά. Ας θεωρήσουμε την γεωμετρική αναπαράσταση των σημάτων διαμόρφωσης $s_m(t)$ στο Παράδειγμα 3.1. Απουσία θορύβου ο δέκτης θα λάβει κάποιο από τα τέσσερα σήματα $s_k(t)$ στο οποίο αντιστοιχεί το διάνυσμα $\vec{s}_k$. Παρουσία θορύβου ο δέκτης λαμβάνει το σήμα $r_k(t)$ στο οποίο αντιστοιχεί ένα διάνυσμα $\vec{r}_k$ του οποίου οι συντεταγμένες (r_{k1}, r_{k2}) υπολογίζονται γράφοντας το $r_k(t)$ ως

$$r_k(t) = r_{k1} p_1(t) + r_{k2} p_2(t) \quad (2.155)$$

όπου $p_1(t)$ και $p_2(t)$ είναι οι συναρτήσεις βάσης που υπολογίσαμε στο Παράδειγμα 3.1. Από την (2.155) εύκολα προκύπτει ότι

$$r_{k1} = \langle r_k(t), p_1(t) \rangle \quad (2.156)$$

$$r_{k2} = \langle r_k(t), p_2(t) \rangle \quad (2.157)$$

και το διάνυσμα που αντιστοιχεί στο $r_k(t)$ είναι το

$$\vec{r}_k = \begin{bmatrix} r_{k1} \\ r_{k2} \end{bmatrix} \quad (2.158)$$

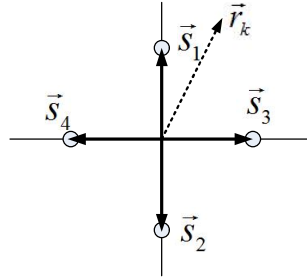
Υπάρχει βέβαια μία μικρή αλλά σημαντική λεπτομέρεια: η (2.155) υποθέτει ότι το $r_k(t)$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων βάσης $p_1(t)$ και $p_2(t)$ κάτι που δεν ισχύει γενικά εφόσον το $r_k(t)$ προκύπτει από το άθροισμα του $s_k(t)$, το οποίο είναι γραμμικός συνδυασμός των $p_1(t)$ και $p_2(t)$, με το $n(t)$ το οποίο είναι τυχαίο και επομένως δεν είναι απαραίτητα γραμμικός συνδυασμός των $p_1(t)$ και $p_2(t)$. Πιο σωστά λοιπόν το διάνυσμα $\vec{r}_k$ προκύπτει από την προβολή του σήματος $r_k(t)$ στο χώρο που ορίζεται από τον γραμμικό συνδυασμό των $p_1(t)$ και $p_2(t)$ και ενδεχομένως να υπάρχει και μία συνιστώσα $\Delta r_k(t)$ του σήματος $r_k(t)$ η οποία να μην ανήκει στο χώρο αυτό δηλαδή

$$r_k(t) = r_{k1}p_1(t) + r_{k2}p_2(t) + \Delta r_k(t) \quad (2.159)$$

όπου η $\Delta r_k(t)$ θα είναι «κάθετη» στις συναρτήσεις βάσεις $p_1(t)$ και $p_2(t)$, δηλαδή:

$$\langle \Delta r_k(t), p_1(t) \rangle = \langle \Delta r_k(t), p_2(t) \rangle = 0 \quad (2.160)$$

η (2.160) προκύπτει εύκολα από την (2.159) και τις (2.156)-(2.157). Σε κάθε περίπτωση ο δέκτης μπορεί πάντα να υπολογίζει το $\vec{r}_k$ χρησιμοποιώντας τις (2.156)-(2.157).



Σχήμα 3-9: Ένα παράδειγμα διανύσματος λήψης και η σχέση του με τα διανύσματα εκπομπής.

Ας υποθέσουμε τώρα πως το διάνυσμα $\vec{r}_k$ που υπολογίζει ο δέκτης εικονίζεται στο Σχήμα 3-9. Στη συνέχεια θα πρέπει να αποφασίσει με ποιο αρχικό διάνυσμα $\vec{s}_m$ μοιάζει περισσότερο το $\vec{r}_k$. Προφανώς αυτό που μπορεί να κάνει είναι να συγκρίνει το $\vec{r}_k$ με κάθε ένα από τα $\vec{s}_m$ και να επιλέξει αυτό που διαφέρει λιγότερο σε σχέση με τα άλλα. Στην ουσία δηλαδή ο δέκτης υπολογίζει τις αποστάσεις $d_m = |\vec{s}_m - \vec{r}_k|$ και επιλέγει το $\vec{s}_m$ με την μικρότερη απόσταση από το $\vec{r}_k$.

Αυτή η διαισθητική διαδικασία μπορούμε να δείξουμε ότι είναι βέλτιστη στην περίπτωση όπου το $n(t)$ είναι ένας Gaussian θόρυβος ο οποίος έχει μηδενική μέση τιμή και σταθερή φασματική πυκνότητα $S_n(f) = N_0/2$ στο διάστημα των συχνοτήτων που μας ενδιαφέρει. Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε

$$r_{k1} = \langle r_k(t), p_1(t) \rangle = \langle s_k(t) + n(t), p_1(t) \rangle = \langle s_k(t), p_1(t) \rangle + \langle n(t), p_1(t) \rangle = s_{k1} + n_1 \quad (2.161)$$

$$r_{k2} = \langle r_k(t), p_2(t) \rangle = \langle s_k(t) + n(t), p_2(t) \rangle = \langle s_k(t), p_2(t) \rangle + \langle n(t), p_2(t) \rangle = s_{k2} + n_2 \quad (2.162)$$

όπου s_{k1} και s_{k2} είναι οι συνιστώσες του διανύσματος που αντιστοιχεί στο σήμα εκπομπής και n_1, n_2 είναι τυχαίες μεταβλητές οι οποίες αντανakλούν την επίδραση του θορύβου στις συντεταγμένες του διανύσματος που αντιστοιχούν στο σήμα λήψης $r_k(t)$. Τα n_1 και n_2 καθορίζονται από τις σχέσεις:

$$n_1 = \langle n(t), p_1(t) \rangle = \int_0^T n(t) p_1(t) dt \quad (2.163)$$

$$n_2 = \langle n(t), p_2(t) \rangle = \int_0^T n(t) p_2(t) dt \quad (2.164)$$

Θα δείξουμε τώρα ότι τα n_1 και n_2 είναι Gaussian τυχαίες μεταβλητές οι οποίες είναι και ανεξάρτητες. Πράγματι εφόσον ισχύει η (2.163) και η (2.164) θα έχουμε

$$n_1 \cong \Delta t \sum_{m=1}^M n(t_m) p_1(t_m) \quad (2.165)$$

$$n_2 \cong \Delta t \sum_{m=1}^M n(t_m) p_2(t_m) \quad (2.166)$$

όπου έχουμε χωρίσει το διάστημα ολοκλήρωσης $[0, T]$ σε ένα πολύ μεγάλο αριθμό διαστημάτων $[t_m, t_{m+1}]$ με μήκος $\Delta t = t_{m+1} - t_m$. Η (2.165) και η (2.166) υποδηλώνουν ότι τα n_1 και n_2 είναι γραμμικός συνδυασμός Gaussian μεταβλητών $n(t_m)$ και επομένως και αυτές Gaussian. Για να υπολογίσουμε την συσχέτιση των δύο μεταβλητών καταρχήν σημειώνουμε ότι:

$$R_{nn}(\tau) = E\{n(t)n(t+\tau)\} = F^{-1}\{S_n(f)\} = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \quad (2.167)$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την συμμεταβολή ρ_{12} των n_1 και n_2 η οποία δίνεται από την σχέση:

$$\rho_{12} = E\{n_1 n_2\} = E\left\{\int_0^T n(t_1) p_1(t_1) dt_1 \int_0^T n(t_2) p_2(t_2) dt_2\right\} = \int_0^T p_1(t_1) \int_0^T p_2(t_2) E\{n(t_1)n(t_2)\} dt_1 dt_2 \quad (2.168)$$

Αντικαθιστώντας στην (2.168) τη σχέση $E\{n(t_1)n(t_2)\} = (N_0/2)\delta(t_1 - t_2)$ θα έχουμε

$$\rho_{12} = E\{n_1 n_2\} = \frac{N_0}{2} \int_0^T p_1(t_1) \int_0^T p_2(t_2) \delta(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 = \frac{N_0}{2} \int_0^T p_1(t_1) p_2(t_1) dt_1 = 0 \quad (2.169)$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή οι $p_1(t)$ και $p_2(t)$ είναι κάθετες μεταξύ τους. Στη συνέχεια υπολογίζουμε με τον ίδιο τρόπο τα $\sigma_1^2 = E\{n_1^2\}$ και $\sigma_2^2 = E\{n_2^2\}$ οι οποίες καθορίζονται από τις σχέσεις:

$$\sigma_1^2 = E\{n_1^2\} = \frac{N_0}{2} \int_0^T p_1(t_1) \int_0^T p_1(t_2) E\{n(t_1)n(t_2)\} dt_1 dt_2 = \frac{N_0}{2} \int_0^T p_1^2(t_1) dt_1 = \frac{N_0}{2} \quad (2.170)$$

$$\sigma_2^2 = E\{n_2^2\} = \frac{N_0}{2} \int_0^T p_2(t_1) \int_0^T p_2(t_2) E\{n(t_1)n(t_2)\} dt_1 dt_2 = \frac{N_0}{2} \int_0^T p_2^2(t_1) dt_1 = \frac{N_0}{2} \quad (2.171)$$

Με ακόμα πιο εύκολο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η αναμενόμενη τιμή των $m_1=E\{n_1\}$ και $m_2=E\{n_2\}$ είναι μηδέν. Επομένως μάθαμε τα εξής για τις n_1 και n_2 :

- Είναι Gaussian τυχαίες μεταβλητές
- Οι μέσες τιμές τους $m_1=E\{n_1\}$ και $m_2=E\{n_2\}$ είναι μηδέν.
- Ο πίνακας συμμεταβολής $\mathbf{C}$ δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} E\{n_1^2\} & E\{n_1 n_2\} \\ E\{n_1 n_2\} & E\{n_2^2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} N_0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} N_0 \end{bmatrix} \quad (2.172)$$

Η συνδυασμένη πυκνότητα πιθανότητας θα δίνεται από την σχέση:

$$f_n(n_1, n_2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\mathbf{C})}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{n} - \vec{m})^t \mathbf{C}^{-1} (\vec{n} - \vec{m}) \right\} \quad (2.173)$$

όπου

$$\vec{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.174)$$

και $\det(\mathbf{C})=N_0^2/4$ ενώ:

$$(\vec{n} - \vec{m})^t \mathbf{C}^{-1} (\vec{n} - \vec{m}) = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2N_0^{-2} & 0 \\ 0 & 2N_0^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \frac{2(n_1^2 + n_2^2)}{N_0^2} \quad (2.175)$$

οπότε

$$f_n(n_1, n_2) = \frac{1}{\pi N_0} \exp \left\{ -\frac{n_1^2 + n_2^2}{N_0} \right\} \quad (2.176)$$

Η (2.176) δίνει την συνδυασμένη πυκνότητα πιθανότητας των n_1 και n_2 . Αν υποθέσουμε ότι ο δέκτης λαμβάνει το σήμα $r_k(t)$ ή αντιστοίχα το διάνυσμα $\vec{r}_k$ θα πρέπει με κάποιο τρόπο να αποφασίσει τι είναι πιο πιθανό να έχουμε εκπέμψει. Για το σκοπό αυτό θα μπορούσε να υπολογίσει τις πιθανότητες που έχει κανείς να έχει εκπέμψει το $s_m(t)$ δεδομένου ότι έχει το $r_k(t)$ τις οποίες συμβολίζουμε με τις δεσμευμένες πιθανότητες $P(\vec{s}_m | \vec{r}_k)$. Λογικά ψάχνουμε την μέγιστη δεσμευμένη πιθανότητα $P(\vec{s}_m | \vec{r}_k)$ και αν την βρούμε θα έχουμε το διάνυσμα του σήματος $\vec{s}_m$ το οποίο είναι πιο πιθανό να έχει εκπέμψει ο δέκτης. Για να υπολογίσουμε την $P(\vec{s}_m | \vec{r}_k)$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του Bayes, σύμφωνα με τον οποίο

$$P(\vec{s}_m | \vec{r}_k) = \frac{f_n(\vec{r}_k | \vec{s}_m) P(\vec{s}_m)}{f_n(\vec{r}_k)} \quad (2.177)$$

όπου:

- $f_n(\vec{r}_k | \vec{s}_m)$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας του $\vec{r}_k$ δεδομένου ότι έχουμε εκπέμψει το $\vec{s}_m$.
- $P(\vec{s}_m)$ είναι η πιθανότητα να εκπέμψουμε το $\vec{s}_m$.
- $f_n(\vec{r}_k)$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας του $\vec{r}_k$.

Αν θεωρήσουμε πως όλα τα $\vec{s}_m$ εκπέμπονται με την ίδια πιθανότητα, δηλαδή $P(\vec{s}_m)=1/4$, τότε εφόσον το $f_n(\vec{r}_k)$ είναι κοινό στον παρανομαστή της έκφρασης για κάθε $P(\vec{s}_m | \vec{r}_k)$ στην (2.177) έπεται ότι το μέγιστο $P(\vec{s}_m | \vec{r}_k)$ αντιστοιχεί στο μέγιστο $f_n(\vec{r}_k | \vec{s}_m)$. Η $f_n(\vec{r}_k | \vec{s}_m)$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας του $\vec{r}_k$ δεδομένου ότι έχουμε εκπέμψει το $\vec{s}_m$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$$r_k(t) = s_m(t) + n(t) \quad (2.178)$$

οπότε

$$\begin{bmatrix} r_{k1} \\ r_{k2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{m1} \\ s_{m2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \quad (2.179)$$

που συνεπάγεται ότι

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{k1} \\ r_{k2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{m1} \\ s_{m2} \end{bmatrix} \quad (2.180)$$

και

$$f_n(\vec{r}_k | \vec{s}_m) = \frac{1}{\pi N_0} \exp \left\{ -\frac{(r_{k1} - s_{m1})^2 + (r_{k2} - s_{m2})^2}{N_0} \right\} \quad (2.181)$$

η (2.181) μεγιστοποιείται όταν ελαχιστοποιείται η

$$(r_{k1} - s_{m1})^2 + (r_{k2} - s_{m2})^2 = |\vec{s}_m - \vec{r}_k|^2 = d_m^2 \quad (2.182)$$

δηλαδή ο δέκτης ο οποίος συγκρίνει τις αποστάσεις $d_m = |\vec{s}_m - \vec{r}_k|$ των άκρων του διανύσματος $\vec{r}_k$ με τα άκρα όλων των διανυσμάτων $\vec{s}_m$ και επιλέγει το $\vec{s}_m$ που αντιστοιχεί στο ελάχιστο d_m είναι βέλτιστος με την έννοια ότι επιλέγει το $\vec{s}_m$ που μεγιστοποιεί την πιθανότητα $P(\vec{s}_m | \vec{r}_k)$ η οποία είναι η πιθανότητα του να έχουμε εκπέμψει το $\vec{s}_m$ δεδομένου ότι λάβαμε το $\vec{r}_k$. Με άλλα λόγια ο δέκτης επιλέγει το πλέον πιθανό διάνυσμα εκπομπής!

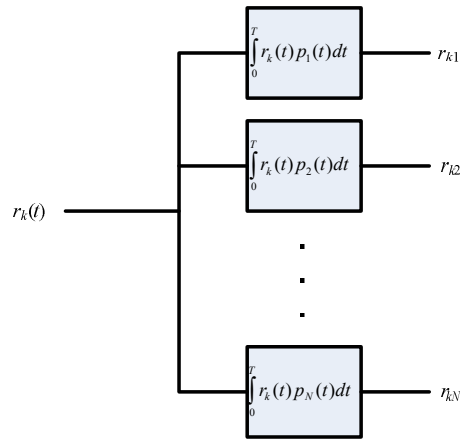
Συνοψίζουμε τις βασικές υποθέσεις που κάναμε για να οδηγηθούμε στο παραπάνω συμπέρασμα:

α) ο θόρυβος $n(t)$ είναι Gaussian

β) ο θόρυβος $n(t)$ έχει σταθερή φασματική πυκνότητα ισχύος $S_n(f)=N_0/2$

γ) τα σήματα $s_m(t)$ εκπέμπονται με την ίδια πιθανότητα $P(\vec{s}_m)$.

Ο θόρυβος που έχει τις ιδιότητες (α) και (β) ενώ προστίθεται στο σήμα σύμφωνα π.χ. με την (2.154) ονομάζεται λευκός προσθετικός *Gaussian* θόρυβος (additive white Gaussian noise – AWGN) επειδή όπως και το χρώμα άσπρο περιέχει όλες τις συχνότητες (όλα τα χρώματα) του φάσματος. Επίσης στην θεωρία των τηλεπικοινωνιών, ο δέκτης με το οποίο επιλέγουμε την μέγιστη $P(\vec{s}_m | \vec{r}_k)$ ονομάζεται δέκτης μέγιστης πιθανότητας a posteriori (maximum a posteriori probability - MAP). Επίσης ένας δέκτης που μεγιστοποιεί την $f_n(\vec{r}_k | \vec{s}_m)$ ονομάζεται δέκτης μέγιστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood - ML). Αν ισχύουν οι (α)-(γ) δείξαμε ότι ο δέκτης MAP ταυτίζεται με τον δέκτη ML και στην ουσία ανάγεται στην επιλογή του διανύσματος με την μικρότερη $\vec{s}_m$. Αν και αυτό το δείξαμε για την ειδική περίπτωση της διαμόρφωσης στο Παράδειγμα 3.1, ισχύει για κάθε είδος διαμόρφωσης της οποίας τα σήματα μετάδοσης μπορούν να εκφραστούν ως γραμμικός συνδυασμός N το πλήθος συναρτήσεων βάσης $p_1(t), \dots, p_N(t)$.



Σχήμα 3-10: Υπολογισμός των συνιστωσών του διανύσματος που αντιστοιχεί στο σήμα $r_k(t)$.

Στο **Error! Reference source not found.** δείχνουμε την βασική ιδέα πίσω από ένα κύκλωμα που υπολογίζει τις συνιστώσες του διανύσματος λήψης $\vec{r}_k$ που αντιστοιχεί στο σήμα λήψης $r_k(t)$. Στην ουσία περνάμε το σήμα $r_k(t)$ από ένα σύνολο ολοκληρωτών που υπολογίζουν τα εσωτερικά γινόμενα $r_{ki} = \langle r_k(t), p_i(t) \rangle$. Αν αναρωτιέστε πως υλοποιείται πρακτικά μία τέτοια ολοκλήρωση θεωρείστε ένα φίλτρο με κρουστική απόκριση

$$h_i(t) = \begin{cases} p_i(T-t) & , 0 \leq t < T \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2.183)$$

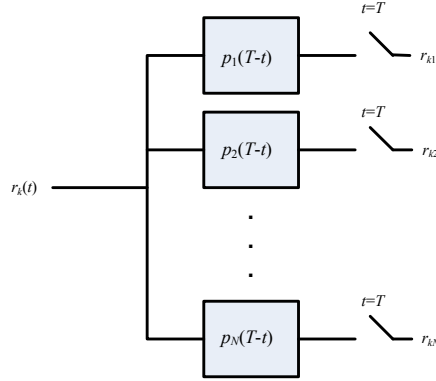
Τότε η έξοδος $y_i(t)$ του φίλτρου θα καθορίζεται από το γνωστό ολοκλήρωμα συγκερασμού

$$y_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_i(t-\tau) r_k(\tau) d\tau \quad (2.184)$$

Αν θεωρήσουμε την έξοδο την χρονική στιγμή $t=T$, θα έχουμε:

$$y_i(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_i(T-\tau) r_k(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} p_i(\tau) r_k(\tau) d\tau = \int_0^T p_i(\tau) r_k(\tau) d\tau = \langle r_k(t), p_i(t) \rangle \quad (2.185)$$

Επομένως ο ολοκληρωτής που θέλουμε να υλοποιήσουμε, στην ουσία είναι ένα φίλτρο με κρουστική απόκριση όπως καθορίζεται από την (2.183) αρκεί να δειγματοληπτήσουμε την έξοδο του την χρονική στιγμή $t=T$ όπως δείχνει και το Σχήμα 3-11.



Σχήμα 3-11: Υπολογισμός των συνιστωσών του διανύσματος που αντιστοιχεί στο σήμα $r_k(t)$ μέσω κατάλληλων φίλτρων και δειγματοληψίας.

Ο δέκτης που εικονίζεται στο Σχήμα 3-11 ονομάζεται δέκτης προσαρμοσμένου φίλτρου με την έννοια ότι τα φίλτρα που χρησιμοποιούνται είναι προσαρμοσμένα στις συναρτήσεις βάσης της διαμόρφωσης. Θα δείξουμε τώρα πως ο δέκτης αυτός έχει μία πολύ επιθυμητή ιδιότητα: μεγιστοποιεί το πηλίκο σήμα προς θόρυβο στις εξόδους του. Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, ας θεωρήσουμε μία έξοδο του ενός φίλτρου την χρονική στιγμή $t=T$, το οποίο δεν είναι κατ' ανάγκην προσαρμοσμένο στις συναρτήσεις βάσης $p_i(t)$, δηλαδή:

$$y_i(T) = \int_0^T h_i(T-\tau) r_k(\tau) d\tau = \int_0^T h_i(T-\tau) s_k(\tau) d\tau + \int_0^T h_i(T-\tau) n(\tau) d\tau = z_i(T) + w_i(T) \quad (2.186)$$

Το $s_k(t)$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων βάσης $p_m(t)$, δηλαδή

$$s_k(t) = \sum_{m=1}^M c_m p_m(t) \quad (2.187)$$

και επομένως η (2.186) θα μας δώσει:

$$y_i(T) = \int_0^T h_i(T-\tau) r_k(\tau) d\tau = z_i(T) + v_i(T) + w_i(T) \quad (2.188)$$

όπου

$$z_i(T) = c_i \int_0^T h_i(T-\tau) p_i(\tau) d\tau \quad (2.189)$$

$$w_i(T) = \int_0^T h_i(T-\tau) n(\tau) d\tau \quad (2.190)$$

$$v_i(T) = \sum_{m \neq i}^M c_m \int_0^T h_i(T-\tau) p_m(\tau) d\tau \quad (2.191)$$

Ιδανικά θα θέλαμε απουσία του θορύβου, η ισοσκή έξοδος του δέκτη, δηλαδή η $y_i(T)$ να περιέχει πληροφορία που αφορά μόνο το c_i οπότε θα πρέπει με κάποιο τρόπο να έχουμε:

$$v_i(T) = 0 \quad (2.192)$$

Αν ισχύει αυτό λογικά θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την ισχύ του $z_i(T)$ και να ελαχιστοποιήσουμε την ισχύ του θορύβου. Αν ορίσουμε το πηλίκο σήμα-προς-θόρυβο ως:

$$\left(\frac{S}{N} \right) = \frac{z_i^2(T)}{E\{w_i^2(T)\}} \quad (2.193)$$

τότε

$$E\{w_i^2(T)\} = E\left\{\left(\int_0^T h_i(T-\tau)n(\tau)d\tau\right)^2\right\} = \int_0^T \int_0^T h_i(T-\tau_1)h_i(T-\tau_2)E\{n(\tau_1)n(\tau_2)\}d\tau_1d\tau_2 \quad (2.194)$$

Αν υποθέσουμε ότι το $n(t)$ είναι AWGN τότε θα έχουμε:

$$R_{nn}(\tau_1 - \tau_2) = E\{n(\tau_1)n(\tau_2)\} = \frac{N_0}{2} \delta(\tau_1 - \tau_2) \quad (2.195)$$

Αν αντικαταστήσουμε την (2.195) στην (2.194) προκύπτει ότι:

$$E\{w_i^2(T)\} = \frac{N_0}{2} \int_0^T \int_0^T h_i(T-\tau_1)h_i(T-\tau_2)\delta(\tau_1 - \tau_2)d\tau_1d\tau_2 = \frac{N_0}{2} \int_0^T h_i^2(T-\tau_1)d\tau_1 = \frac{N_0}{2} \int_0^T h_i^2(\tau_1)d\tau_1 \quad (2.196)$$

Το πηλίκο σήμα-προς-θόρυβο γράφεται ως εξής:

$$\left(\frac{S}{N} \right) = \frac{z_i^2(T)}{E\{w_i^2(T)\}} = \frac{c_i^2 \left(\int_0^T h_i(T-\tau)p_i(\tau)d\tau \right)^2}{\frac{N_0}{2} \int_0^T h_i^2(\tau_1)d\tau_1} \quad (2.197)$$

Ποια είναι η μέγιστη τιμή του S/N που μπορούμε να πετύχουμε; Σύμφωνα με την ανισότητα Cauchy-Schwartz, θα ισχύει

$$\left(\int_0^T h_i(T-\tau)p_i(\tau)d\tau \right)^2 \leq \int_0^T h_i^2(T-\tau)d\tau \int_0^T p_i^2(\tau)d\tau = \int_0^T h_i^2(\tau)d\tau \int_0^T p_i^2(\tau)d\tau = \int_0^T h_i^2(\tau)d\tau \quad (2.198)$$

και η ισότητα ισχύει όταν $h_i(T-t) = Kp_i(t)$ όπου K είναι μία σταθερά. Στην περίπτωση αυτή θα ισχύει:

$$\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{z_i^2(T)}{E\{w_i^2(T)\}} = \frac{c_i^2 \int_0^T h_i^2(\tau) d\tau}{\frac{N_0}{2} \int_0^T h_i^2(\tau_1) d\tau_1} = \frac{2c_i^2}{N_0} \quad (2.199)$$

Επομένως η μεγιστοποίηση του πηλίκου (S/N) στην έξοδο του φίλτρου μας ωθεί στην επιλογή της κρουστικής του απόκρισης σύμφωνα με την σχέση $h_i(T-t)=Kp_i(t)$ και εφόσον το K δεν παίζει κάποιο ρόλο στον υπολογισμό του μέγιστου (S/N) μπορούμε να επιλέξουμε $K=1$ οπότε οδηγούμαστε στην επιλογή $h_i(T-t)=p_i(t)$ ή ισοδύναμα:

$$h_i(t) = p_i(T-t) \quad (2.200)$$

δηλαδή τη συνθήκη του προσαρμοσμένου φίλτρου. Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε

$$v_i(T) = \sum_{m \neq i}^M c_m \int_0^T h_i(T-\tau) p_m(\tau) d\tau = \sum_{m \neq i}^M c_m \int_0^T p_i(\tau) p_m(\tau) d\tau = 0 \quad (2.201)$$

εφόσον για τις συναρτήσεις βάσης ισχύει:

$$\int_0^T p_i(\tau) p_m(\tau) d\tau = 0 \quad (2.202)$$

Επομένως η επιλογή της κρουστικής απόκρισης των φίλτρων βάσει της (2.200) θα οδηγήσει:

α) στο μηδενισμό του $v_i(T)$ που, όπως σχολιάσαμε και προηγουμένως, αφορά την συνεισφορά των συνιστωσών του σήματος εκπομπής $s_k(t)$ που είναι κάθετες στη συνάρτηση βάσης $p_i(t)$. Αν είχαμε $v_i(T) \neq 0$ τότε απουσία θορύβου η έξοδος του $i^{\text{οστού}}$ φίλτρου θα περιέχει και όρους που εξαρτώνται από τον συντελεστή c_i που προσπαθούμε να υπολογίσουμε και επομένως ο δέκτης δεν θα λειτουργούσε σωστά.

β) στην μεγιστοποίηση του πηλίκου (S/N) με αποτέλεσμα ο δέκτης προσαρμοσμένου φίλτρου στην ουσία να οδηγεί και στον ελάχιστο δυνατό θόρυβο.

Παράδειγμα 3.7

Να σχεδιαστεί ο βέλτιστος δέκτης για ένα σήμα PAM για το οποίο τα σήματα εκπομπής είναι $s_m(t)=A_m s(t)$, $1 \leq m \leq M$ όπου $A_m=(2m-M-1)$ και $s(t)=1$ για $0 \leq t < T$ ενώ $s(t)=0$ διαφορετικά.

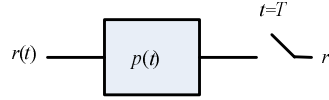
Θα πρέπει να βρούμε τις συναρτήσεις βάσης του σήματος ώστε να ξέρουμε πως πρέπει να προσαρμόσουμε τις κρουστικές αποκρίσεις του σήματος. Θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε την διαδικασία Gram-Schmidt αλλά είναι φανερό ότι όλα τα $s_m(t)$ παράγονται από μία και μόνο συνάρτηση βάσης (άλλωστε το γεγονός αυτό το έχουμε δει στην περίπτωση του PAM με δύο στάθμες στην παράγραφο 3.1):

$$p(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{T} & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2.203)$$

Τα σήματα $s_m(t)$ γράφονται:

$$s_m = A_m \sqrt{T} p(t) \quad (2.204)$$

Εφόσον έχουμε μία μόνο συνάρτηση βάσης ο προσαρμοσμένος δέκτης στο Σχήμα 3-11 θα έχει μόνο έναν κλάδο όπως δείχνει και το παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 3-12: Υπολογισμός των συνιστωσών του διανύσματος που αντιστοιχεί στο σήμα $r_k(t)$ μέσω κατάλληλων φίλτρων και δειγματοληψίας

Παρατηρείστε ότι αντί του $p(T-t)$ έχουμε γράψει το $p(t)$ ως κρουστική απόκριση του φίλτρου. Αυτό συμβαίνει ότι για την συνάρτηση βάσης (2.203) ισχύει $p(T-t)=p(t)$.

Παράδειγμα 3.8

Να σχεδιαστεί ο βέλτιστος δέκτης για την διαμόρφωση PPM που περιγράφεται στο Σχήμα 3-4.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε 4 διαφορετικά σήματα εκπομπής $s_m(t)$, $1 \leq m \leq M$ όπου $M=4$. Για να βρούμε τις συναρτήσεις βάσης εφαρμόζουμε στην γενική περίπτωση την διαδικασία Gram-Schmidt ωστόσο είναι φανερό ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση και τα 4 σήματα παράγονται από τις εξής συναρτήσεις βάσης:

$$p_m(t) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{T_s}} & , (m-1)T_s \leq t \leq mT_s \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2.205)$$

Χρησιμοποιώντας τις εν λόγω συναρτήσεις βάσης τα σήματα εκπομπής γράφονται:

$$s_m(t) = \frac{A\sqrt{T_s}}{2} p_m(t) \quad (2.206)$$

όπου A είναι το πλάτος των $s_m(t)$.

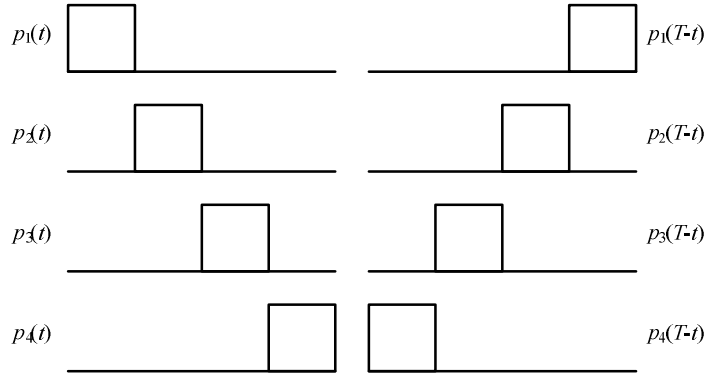
Στο Σχήμα 3-13 φαίνονται οι συναρτήσεις βάσεις $p_m(t)$ καθώς και οι κρουστικές αποκρίσεις των φίλτρων του βέλτιστου δέκτη. Παράλληλα στο Σχήμα 3-14 φαίνεται ο βέλτιστος δέκτης στην περίπτωση της PPM διαμόρφωσης που θεωρήσαμε. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι:

$$r_1 = y_1(T) = \int_0^T h_1(T-t)r(t)dt = \int_0^T p_1(t)r(t)dt = \frac{2}{\sqrt{T}} \int_0^{T/4} r(t)dt \quad (2.207)$$

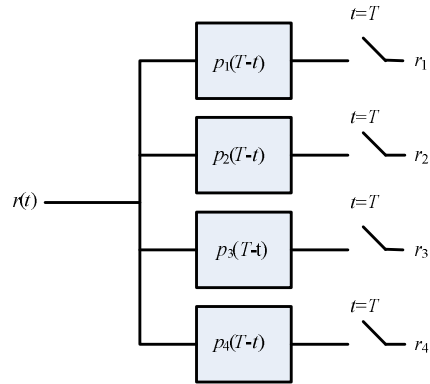
$$r_2 = y_2(T) = \int_0^T h_2(T-t)r(t)dt = \int_0^T p_2(t)r(t)dt = \frac{2}{\sqrt{T}} \int_{T/4}^{T/2} r(t)dt \quad (2.208)$$

$$r_3 = y_3(T) = \int_0^T h_3(T-t)r(t)dt = \int_0^T p_3(t)r(t)dt = \frac{2}{\sqrt{T}} \int_{T/2}^{3T/4} r(t)dt \quad (2.209)$$

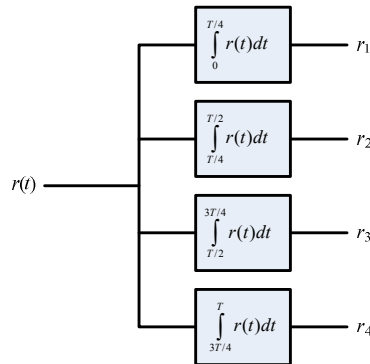
$$r_4 = y_4(T) = \int_0^T h_4(T-t)r(t)dt = \int_0^T p_4(t)r(t)dt = \frac{2}{\sqrt{T}} \int_{3T/4}^T r(t)dt \quad (2.210)$$



Σχήμα 3-13: Οι συναρτήσεις βάσης και οι κρουστικές αποκρίσεις του βέλτιστου δέκτη.



Σχήμα 3-14: Ο βέλτιστος δέκτης στην περίπτωση του σήματος PPM στο Σχήμα 3-4.



Σχήμα 3-15: Ο βέλτιστος δέκτης στην περίπτωση του σήματος PPM στο Σχήμα 3-4 με χρήση ολοκληρωτών.

Σύμφωνα με τις (2.207)-(2.210) ο δέκτης στο Σχήμα 3-14 μπορεί να υλοποιηθεί και με 4 ολοκληρωτές όπως δείχνει και το Σχήμα 3-15.

3.9 Η περίπτωση του PAM

3.9.1 Μερικές πρώτες σκέψεις

Τώρα που μάθαμε κάποια πράγματα για τα σήματα που μεταφέρουν την πληροφορία και για το θόρυβο θα προχωρήσουμε να υπολογίσουμε τις επιδόσεις ενός σήματος PAM. Όπως είδαμε και προηγουμένως στην παράγραφο 3.2 αλλά και στο Παράδειγμα 3.7, η διαμόρφωση PAM στην ουσία συνίσταται στον πολλαπλασιασμό ενός βασικού σήματος $s(t)$ (π.χ. έναν ορθογώνιο παλμό) με ένα πλάτος A_m διαφορετικό για κάθε συνδυασμό bit που θέλουμε να μεταδώσουμε. Στο Παράδειγμα 3.7 επιλέξαμε τα πλάτη να είναι ίσα με:

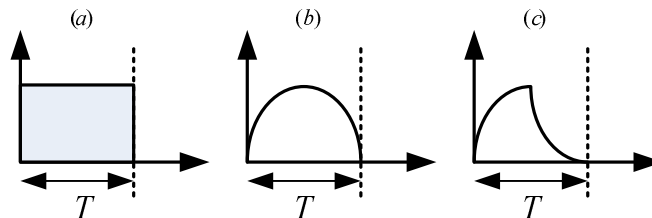
$$A_m = 2m - M - 1 \quad (2.211)$$

όπου $1 \leq m \leq M$ και M είναι το πλήθος των διαφορετικών πλατών A_m και είναι ίσο με μία δύναμη του 2, δηλαδή $M=2^n$. Στην ουσία ομαδοποιούμε τα bit προς μετάδοση σε ομάδες των n bit και κάθε πιθανή ομάδα από αυτά τα bit αντιστοιχείται σε ένα διαφορετικό πλάτος, π.χ. αν $n=3$ ($M=8$), τότε ο συνδυασμός 000 μπορεί να αντιστοιχηθεί στο $A_m = -M+1 = -7$ ($m=1$), ο συνδυασμός 001 στο $A_m = -M+3 = -5$ ($m=2$) κ.ο.κ. Από εδώ και στο εξής τα A_m θα τα αποκαλούμε πλάτη συμβόλων. Το T είναι η διάρκεια του συμβόλου και εφόσον κάθε σύμβολο αντιστοιχεί σε n bit, η διάρκεια του bit T_b θα είναι $T_b = T/n = T/\log_2 M$.

Οι κυματομορφές εκπομπής όπως έχουμε δει και στα προηγούμενα καθορίζονται από την:

$$s_m(t) = A_m s(t) \quad (2.212)$$

Το $s(t)$ δεν χρειάζεται να είναι ορθογώνιος παλμός, οποιοσδήποτε παλμός με διάρκεια T μας κάνει. Στο Σχήμα 3-16 δείχνουμε μερικές διαφορετικές επιλογές για τον παλμό $s(t)$ που μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Η (a) αντιστοιχεί σε ένα ορθογώνιο παλμό, η (b) σε ένα συμμετρικό παλμό με σχήμα καμπάνας ενώ η (c) σε ένα πριονωτό παλμό ο οποίος προκύπτει από ένα κύκλωμα RC. Το τι είδους παλμός θα χρησιμοποιηθεί εξαρτάται σε πολύ μεγάλο βαθμό από την υλοποίηση του πομπού ως κύκλωμα. Ο ιδανικός ορθογώνιος παλμός περιέχει ασυνέχειες στα άκρα του και επομένως ούτως ή άλλως μόνο προσεγγίσεις του υλοποιούνται σε πρακτικά κυκλώματα.



Σχήμα 3-16: Μερικές διαφορετικές επιλογές για τον παλμό $s(t)$

Αν υποθέσουμε ότι τα σύμβολα στα οποία αντιστοιχούν τα A_m εκπέμπονται με την ίδια πιθανότητα τότε μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την αναμενόμενη ενέργεια ε_{av} του σήματος PAM στη διάρκεια $[0, T]$. Κατά τα γνωστά, θα έχουμε:

$$\varepsilon_{av} = E \left\{ \int_0^T s_m^2(t) dt \right\} = E \left\{ A_m \int_0^T s^2(t) dt \right\} = E \left\{ A_m^2 \right\} \int_0^T s^2(t) dt = \varepsilon_s E \left\{ A_m^2 \right\} \quad (2.213)$$

όπου με ε_s συμβολίζουμε την ενέργεια του $s(t)$ στο $[0, T]$ δηλαδή:

$$\varepsilon_s = \int_0^T s^2(t) dt \quad (2.214)$$

ενώ η αναμενόμενη τιμή του πλάτους των συμβόλων $E\{A_m^2\}$ υπολογίζεται εύκολα:

$$E \left\{ A_m^2 \right\} = \sum_{k=1}^M A_k^2 P(A_k) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M A_k^2 = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (2k - M - 1)^2 \quad (2.215)$$

Δεδομένου ότι $(2k-M-1)^2 = 4k^2 - 4k(M-1) + (M-1)^2$, το άθροισμα στην (2.215) γράφεται:

$$\sum_{k=1}^M (2k - M - 1)^2 = 4 \sum_{k=1}^M k^2 - 4(M-1) \sum_{k=1}^M k + (M-1)^2 M \quad (2.216)$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\sum_{k=1}^M k^2 = \frac{M(M+1)(2M+1)}{6} \quad (2.217)$$

$$\sum_{k=1}^M k = \frac{M(M+1)}{2} \quad (2.218)$$

οπότε το άθροισμα (2.216) υπολογίζεται ως εξής:

$$E \left\{ A_m^2 \right\} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (2k - M - 1)^2 = \frac{M^2 - 1}{3} \quad (2.219)$$

και τελικά θα έχουμε:

$$\varepsilon_{av} = \varepsilon_s \frac{M^2 - 1}{3} \quad (2.220)$$

Η μέση αναμενόμενη ισχύς του σήματος θα είναι

$$P_{av} = \frac{\varepsilon_{av}}{T} = \varepsilon_s \frac{M^2 - 1}{3T} \quad (2.221)$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\varepsilon_s = \frac{3P_{av}T}{M^2 - 1} \quad (2.222)$$

Επίσης είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι

$$E\{A_m\} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M A_k = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (2k - M - 1) = 0 \quad (2.223)$$

δηλαδή ότι έχουμε επιλέξει τα πλάτη A_m ώστε η αναμενόμενη τους τιμή να είναι ίση με μηδέν.

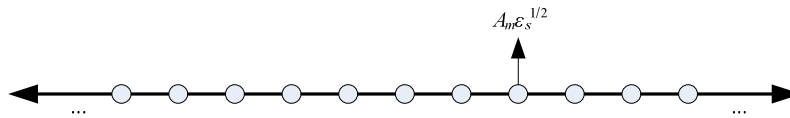
Το PAM είναι μονοδιάστατο όπως είδαμε και στο Παράδειγμα 3.7 και η συνάρτηση βάσης που παράγει όλα τα σήματα είναι η

$$p(t) = \frac{s(t)}{\sqrt{\varepsilon_s}} \quad (2.224)$$

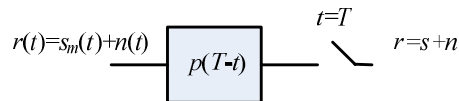
Είναι σχετικά απλό να δείξει κανείς ότι στην περίπτωση όπου το $s(t)$ είναι ορθογώνιος παλμός τότε η (2.224) συμπίπτει με την (2.203). Σε κάθε περίπτωση οι κυματομορφές του PAM, γράφονται

$$s_m(t) = A_m \sqrt{\varepsilon_s} p(t) \quad (2.225)$$

και επομένως τα μονοδιάστατα διανύσματα $\vec{s}_m$ θα έχουν συντεταγμένες $A_m/\varepsilon_s^{1/2}$. Η γεωμετρική αναπαράσταση της διαμόρφωσης PAM απεικονίζεται στο Σχήμα 3-17 ενώ ο βέλτιστος δέκτης είναι μία γενίκευση του δέκτη στο Σχήμα 3-12 ώστε να συμπεριλαμβάνεται και η περίπτωση όπου το $p(t)$ δεν είναι ορθογώνιος παλμός. Ο δέκτης αυτός φαίνεται στο Σχήμα 3-18.



Σχήμα 3-17: Γεωμετρική αναπαράσταση της διαμόρφωσης PAM.



Σχήμα 3-18: Ο βέλτιστος δέκτης του PAM στην γενικότερη περίπτωση όπου το $p(t)$ μπορεί να μην είναι ορθογώνιος παλμός.

Στο δέκτη στο Σχήμα 3-18, η έξοδος θα καθορίζεται από την σχέση:

$$r = \int_0^T [s_m(t) + n(t)] p(t) dt = s + n \quad (2.226)$$

όπου

$$s = \int_0^T s_m(t) p(t) dt = A_m \sqrt{\varepsilon_s} \int_0^T p^2(t) dt = A_m \sqrt{\varepsilon_s} \quad (2.227)$$

$$n = \int_0^T n(t)p(t)dt \quad (2.228)$$

3.9.2 Επιδόσεις ως προς την πιθανότητα σφάλματος

Αν υποθέσουμε ότι ο θόρυβος είναι AWGN με μηδενική μέση τιμή, τότε:

$$E\{n_1\} = \int_0^T E\{n(t)\} p(t)dt = 0 \quad (2.229)$$

και κατ' αναλογία με την (2.196),

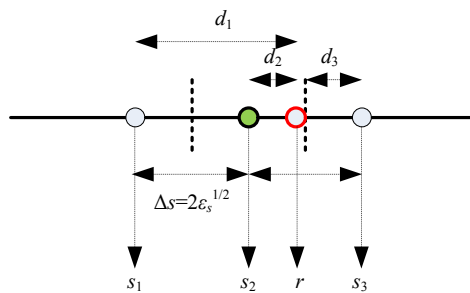
$$E\{n_1^2\} = \int_0^T \int_0^T E\{n(t_1)n(t_2)\} p(t_1)p(t_2)dt_1dt_2 = \frac{N_0}{2} \quad (2.230)$$

Η n_1 είναι συνεπώς μία Gaussian τυχαία μεταβλητή με μηδενική αναμενόμενη τιμή και διακύμανση που καθορίζεται από την (2.230).

Θα προσπαθήσουμε τώρα να υπολογίσουμε την πιθανότητα να έχουμε λανθασμένη αποκωδικοποίηση συμβόλου. Είδαμε πως ο δέκτης συγκρίνει τις αποστάσεις

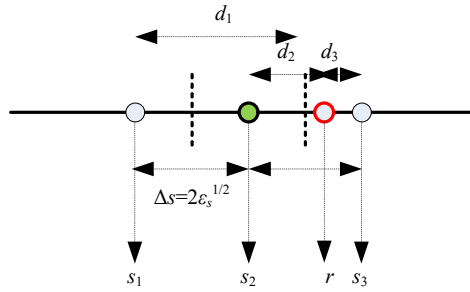
$$d_k = |\vec{s}_k - \vec{r}_1| = |A_k \sqrt{\varepsilon_s} - r_1| \quad (2.231)$$

και επιλέγει το σύμβολο με την μικρότερη απόσταση. Στο Σχήμα 3-19 απεικονίζουμε μία περίπτωση όπου έχουμε εκπέμψει το διάνυσμα¹⁶ $s=s_2$ του οποίου η θέση πάνω στην ευθεία φαίνεται με πράσινο χρώμα, ενώ εξαιτίας του θορύβου λάβαμε το σήμα το οποίο αντιστοιχεί στο $r=s_2+n$ του οποίου η θέση πάνω στην ευθεία φαίνεται με κόκκινο χρώμα. Στην περίπτωση αυτή ο δέκτης θα υπολογίσει τις αποστάσεις d_1 , d_2 , d_3 και όπως φαίνεται και στο σχήμα θα βρει $d_2 < d_3$ και $d_2 < d_1$ ενώ είναι φανερό ότι και με άλλα σύμβολα που ενδεχομένως να βρίσκονται δεξιά ή αριστερά των s_1 και s_3 η απόσταση του r από αυτά θα ήτανε πάλι μεγαλύτερη από αυτά. Εφόσον η απόσταση d_2 είναι η ελάχιστη ο δέκτης οδηγείται στην σωστή επιλογή συμβόλου: αυτό που αντιστοιχεί στο s_2 .



Σχήμα 3-19: Παράδειγμα υπολογισμού των αποστάσεων d_i .

¹⁶ Βέβαια εφόσον τα διανύσματα είναι μονοδιάστατα στην ουσία πρόκειται για αριθμούς. Για το λόγο αυτό συχνά δεν γράφουμε στην περίπτωση του PAM $\vec{s}_m$ αλλά s_m .

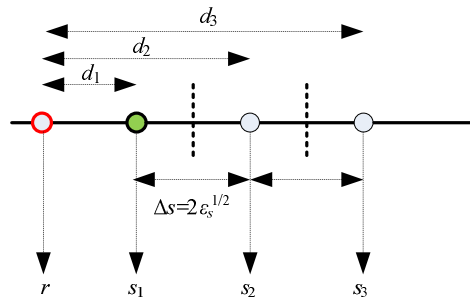


Σχήμα 3-20: Εναλλακτικό παράδειγμα υπολογισμού των αποστάσεων d_i .

Στο Σχήμα 3-20 δείχνουμε μία διαφορετική περίπτωση όπου πάλι έχουμε εκπέμψει το $s=s_2$ αλλά ο θόρυβος έχει «πετάξει» το r πιο κοντά στο s_3 από ότι στο s_2 . Στην περίπτωση αυτή η απόσταση d_3 είναι τώρα μικρότερη από την d_2 αλλά και από τις άλλες αποστάσεις των γειτονικών συμβόλων όπως μπορούμε να δούμε και από το σχήμα. Επομένως ο δέκτης τώρα θα οδηγηθεί στο s_3 και θα κάνει σφάλμα στην αποκωδικοποίηση δεδομένου ότι έχουμε εκπέμψει το s_2 . Από την προηγούμενη συζήτηση, καθίσταται φανερό ότι σφάλμα στην αποκωδικοποίηση λαμβάνει χώρα ότι η θέση του r πάνω στην ευθεία είναι τέτοια ώστε η απόσταση d_2 να μην είναι η ελάχιστη: το r θα πρέπει να βρεθεί εγγύτερα στο s_3 ή στο s_1 , δηλαδή η απόσταση $d_2=|r-s_2|$ που χωρίζει το r με το s_2 να είναι μεγαλύτερη από $\Delta s/2$ όπου $\Delta s=2\epsilon_s$ είναι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών συμβόλων. Άρα θα έχουμε

$$P(e|s_2) = P(d_2 > \Delta s / 2) = P(|n| > \Delta s / 2) \quad (2.232)$$

όπου με $P(e|s_2)$ συμβολίζουμε την πιθανότητα να γίνει εσφαλμένη αποκωδικοποίηση στο δέκτη δεδομένου ότι έχουμε εκπέμψει το s_2 . Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι η διαφορά της εξόδου του δέκτη r από το s_2 θα είναι ίση με n , άρα θα ισχύει $|r-s_2|=|n|$. Η (2.232) ισχύει για κάθε εσωτερικό σύμβολο, δηλαδή για κάθε s_m με $2 \leq m \leq M-1$.



Σχήμα 3-21: Η περίπτωση κατά την οποία έχουμε εκπέμψει το σύμβολο $s=s_1$.

Όταν εκπέμπουμε το $s=s_1$ τότε όπως δείχνει το Σχήμα 3-21 τα πράγματα είναι πιο ευνοϊκά. Αν ο θόρυβος μας ρίξει αριστερότερα από το s_1 τότε όπου και να βρεθεί το r , το d_1 θα είναι πάντα η ελάχιστη απόσταση. Η μόνη περίπτωση να έχουμε σφάλμα είναι να βρεθούμε δεξιότερα από το s_1 και να βρεθούμε εγγύτερα σε κάποιο άλλο σύμβολο από ότι στο s_1 . Επομένως:

$$P(e | s_1) = P(n > \Delta s / 2) \quad (2.233)$$

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι όταν εκπέμπουμε το $s=s_M$ τότε

$$P(e | s_M) = P(n < -\Delta s / 2) \quad (2.234)$$

Για να υπολογίσουμε τις παραπάνω πιθανότητες χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η n είναι μία Gaussian τυχαία διαδικασία με μηδενική μέση τιμή και διακύμανση ίση με $N_0/2$, οπότε η πυκνότητα πιθανότητας του n θα είναι:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{n^2}{N_0}\right) \quad (2.235)$$

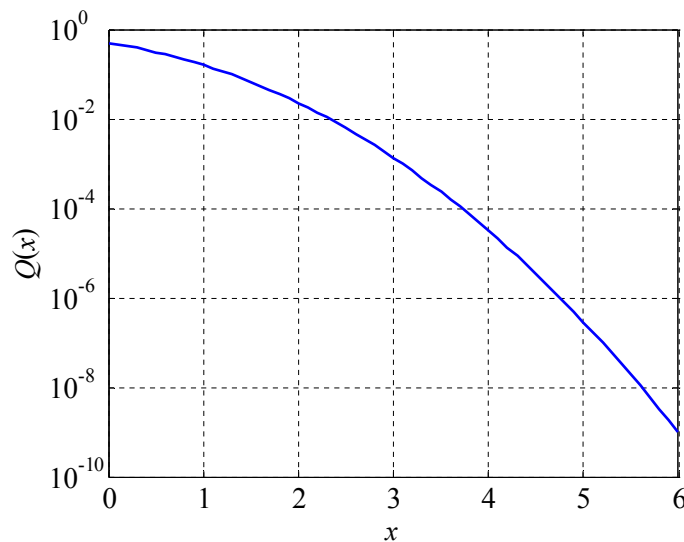
από όπου και προκύπτει ότι:

$$P(n > \Delta s / 2) = \int_{\Delta s / 2}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{\Delta s / 2}^{+\infty} e^{-x^2 / N_0} dx \quad (2.236)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό υπολογίζεται βάσει της (1.44) αν θέσουμε $2\sigma^2 = N_0$ οπότε:

$$P(n > \Delta s / 2) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\Delta s}{2\sqrt{N_0}}\right) \right\} \quad (2.237)$$

Η συνάρτηση $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{erf}(x/\sqrt{2})$ ονομάζεται στην βιβλιογραφία συνάρτηση Q , και συμβολίζεται με $Q(x)$ και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 3-22: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $Q(x)$.

Σύμφωνα με τον ορισμό της συνάρτησης $Q(x)$,

$$P(e | s_1) = P(n > \Delta s / 2) = Q\left(\frac{\Delta s}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_s}{N_0}}\right) \quad (2.238)$$

Εφόσον η συνάρτηση $f(n)$ στην (2.235) είναι συμμετρική έπεται ότι

$$P(e | s_M) = P(n < -\Delta s / 2) = \int_{-\infty}^{-\Delta s/2} f(x)dx = \int_{+\infty}^{\Delta s/2} f(x)dx = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_s}{N_0}}\right) \quad (2.239)$$

ενώ

$$P(e | s_i) = P(|n| > \Delta s / 2) = P(\{n > \Delta s / 2\} \cup \{n < -\Delta s / 2\}) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_s}{N_0}}\right) \quad (2.240)$$

όπου $2 \leq M-1$ ενώ με $P(A \cup B)$ συμβολίζουμε την πιθανότητα να συμβεί είτε το ενδεχόμενο A είτε το B . Αν $A = \{n > \Delta s / 2\}$ και $B = \{n < -\Delta s / 2\}$ τότε εφόσον τα δύο ενδεχόμενα είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα έπεται ότι $P(\{n > \Delta s / 2\} \cup \{n < -\Delta s / 2\}) = P(n > \Delta s / 2) + P(n < -\Delta s / 2)$ από όπου προκύπτει και η (2.240). Για να υπολογίσουμε την συνολική πιθανότητα σφάλματος $P(e)$ χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι

$$P(e) = \sum_{m=1}^M P(e | s_m) P(s_m) = 2 \frac{M-1}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_s}{N_0}}\right) \quad (2.241)$$

Η (2.241) αποτελεί την μαθηματική έκφραση της πιθανότητας σφάλματος για την διαμόρφωση PAM με M διαφορετικά πλάτη A_m . Στην βιβλιογραφία το M ονομάζεται ο αριθμός των επιπέδων του PAM που χρησιμοποιούμε για την μετάδοση της πληροφορίας, ενώ κάνουμε λόγο για διαμόρφωση PAM M επιπέδων.

Κάθε φορά που συμβαίνει σφάλμα σε ένα σύμβολο, έπεται ότι τουλάχιστον 1 bit πληροφορίας δεν έχει μεταδοθεί σωστά. Αν υποθέσουμε ότι τα σφάλματα στα bit συμβαίνουν ανεξάρτητα¹⁷ τότε έπεται πως η πιθανότητα P_c να μην συμβεί κανένα σφάλμα σε ν διαδοχικά bit, οπότε και το σύμβολο να μεταδοθεί σωστά θα ισούται με:

$$P_c = (1 - P_b)^\nu \cong 1 - \nu P_b \quad (2.242)$$

όπου με P_b έχουμε συμβολίσει την πιθανότητα να γίνει σφάλμα σε ένα bit και παράλληλα έχουμε υποθέσει ότι $P_b \ll 1$ οπότε ισχύει η προσέγγιση της (2.242). Εφόσον $P(e) = 1 - P_c$ έπεται ότι:

$$P_b \cong \frac{P(e)}{\nu} = \frac{P(e)}{\log_2 M} = \frac{2(M-1)}{M \log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_s}{N_0}}\right) \quad (2.243)$$

Στην (2.243) μπορούμε να αντικαταστήσουμε την αναμενόμενη μέση ισχύ του σήματος P_{av} από την (2.222) για να λάβουμε:

¹⁷ όπως λένε και οι φίλοι μας οι Αγγλοσάξονες, "this is a big if". Κάνουμε μία υπόθεση εδώ η οποία είναι επισφαλής αλλά ωστόσο περιγράφει ως ένα σημείο την κατάσταση.

$$P_b \cong \frac{P(e)}{\nu} = \frac{P(e)}{\log_2 M} = \frac{2(M-1)}{M \log_2 M} Q \left(\sqrt{\frac{6P_{av}T}{N_0(M^2-1)}} \right) = \frac{2(M-1)}{M \log_2 M} Q \left(\sqrt{\frac{6\varepsilon_{av}}{N_0(M^2-1)}} \right) \quad (2.244)$$

Συχνά στις επικοινωνίες μας ενδιαφέρει το απαιτούμενο πηλίκo σήμα-προς-θόρυβο SNR_b ανά bit το οποίο ορίζεται ως η αναμενόμενη ενέργεια στην διάρκεια ενός bit προς την φασματική πυκνότητα του θορύβου N_0 . Δεδομένου ότι η διάρκεια του bit είναι $\nu = \log_2 M$ φορές μικρότερη από την διάρκεια του συμβόλου, έπεται ότι η αναμενόμενη ισχύς ανά bit θα είναι:

$$\varepsilon_{bav} = \frac{\varepsilon_{av}}{\log_2 M} \quad (2.245)$$

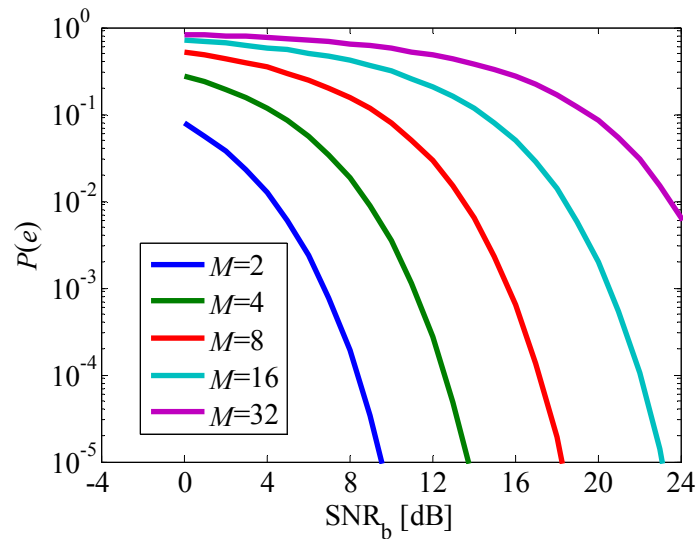
και επομένως

$$(\text{SNR})_b = \frac{\varepsilon_{av}}{N_0 \log_2 M} \quad (2.246)$$

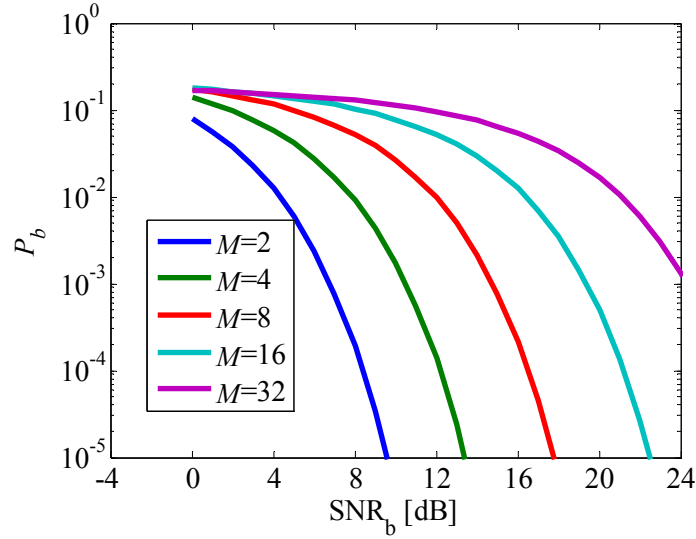
ενώ η πιθανότητα σφάλματος (2.244) γράφεται και ως εξής:

$$P_b \cong \frac{2(M-1)}{M \log_2 M} Q \left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M}{(M^2-1)}} (\text{SNR})_b \right) \quad (2.247)$$

Στα παρακάτω σχήματα παριστάνουμε γραφικά τις πιθανότητες $P(e)$ και P_b στην περίπτωση του PAM



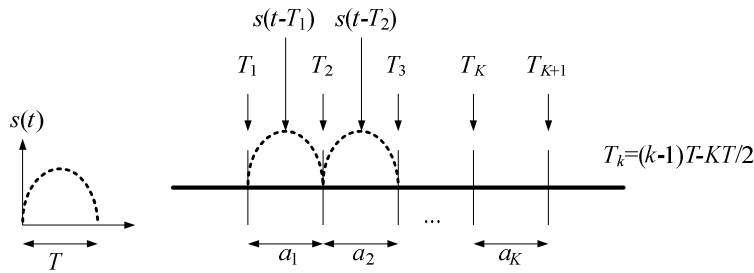
Σχήμα 3-23: Γραφική παράσταση της πιθανότητας σφάλματος συμβόλου $P(e)$ συναρτήσει του πηλίκου σήματος-προς-θόρυβο ανά-bit SNR_b στην περίπτωση του PAM



Σχήμα 3-24: Γραφική παράσταση της πιθανότητας σφάλματος bit P_b συναρτήσει του ηηλίκου σήματος-προς-θόρυβο ανά-bit SNR_b στην περίπτωση του PAM

3.9.3 Επιδόσεις ως προς το εύρος ζώνης

Μία άλλη πλευρά που μας ενδιαφέρει στις μεθόδους διαμόρφωσης είναι τα φασματικά χαρακτηριστικά τους που καθορίζουν το απαιτούμενο εύρος ζώνης που χρειάζεται κατά την μετάδοση. Είναι λογικό να περιμένουμε ότι τα φασματικά χαρακτηριστικά του σήματος καθορίζονται από τον παλμό $s(t)$. Για να καταλάβουμε λίγο καλύτερα τι συμβαίνει, ας θεωρήσουμε πως εκπέμπουμε μία σειρά από σύμβολα, $(a_1, \dots, a_K)$ όπου K άρτιος τα οποία φυσικά επιλέγονται τυχαία από το «αλφάβητο» των A_m , $1 \leq m \leq M$. Θεωρούμε ότι η διάρκεια του συμβόλου a_k εκτείνεται από το $[T_k, T_{k+1}]$ όπου $T_k = (k-1)T - KT/2$, όπως δείχνει και το Σχήμα 3-25.



Σχήμα 3-25: Οι χρονικές διάρκειες των συμβόλων του σήματος PAM.

Η κυματομορφή PAM μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$x(t) = \sum_{k=1}^K a_k s(t - T_k) \quad (2.248)$$

όπως και στην περίπτωση της δειγματοληψίας, η παραπάνω κυματομορφή συντίθεται από τα πλάτη a_k που εκπέμπονται στα διαδοχικά διαστήματα συμβόλων $[T_k, T_{k+1}]$ τα οποία θα πρέπει να

πολλαπλασιαστούν με την κυματομορφή $s(t)$. Εφόσον τα πλάτη επιλέγονται τυχαία, το σήμα $x(t)$ είναι τυχαίο σήμα. Για να υπολογίσουμε τα φασματικά χαρακτηριστικά του σήματος θα πρέπει να υπολογίσουμε την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{xx}(t_1, t_2)$ και στην συνέχεια την φασματική πυκνότητα ισχύος $S_x(f)$. Ξεκινάμε!

Από τον ορισμό της $R_{xx}(t_1, t_2)$ προκύπτει ότι

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = \sum_{p=1}^K \sum_{q=1}^K E\{a_p a_q\} s(t_1 - T_p) s(t_2 - T_q) \quad (2.249)$$

Αν υποθέσουμε ότι τα $(a_1, \dots, a_K)$ επιλέγονται ανεξάρτητα μεταξύ τους, έπεται ότι για $p \neq q$ θα έχουμε $E\{a_p a_q\} = E\{a_p\}E\{a_q\} = 0$ καθώς όπως είδαμε στην (2.223) η αναμενόμενη τιμή των πλατών του PAM είναι ίση με μηδέν. Η (2.249) γράφεται ως εξής:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = \sum_{p=1}^K E\{a_p^2\} s(t_1 - T_p) s(t_2 - T_p) = E\{A_m^2\} \sum_{p=1}^K s(t_1 - T_p) s(t_2 - T_p) \quad (2.250)$$

ενώ η μέση συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δίνεται από την σχέση:

$$\bar{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{KT} \int_{-KT/2}^{KT/2} R_{xx}(t + \tau, t) dt = E\{A_p^2\} \sum_{p=-K/2}^{K/2} \frac{1}{KT} \int_{-KT/2}^{KT/2} s(t + \tau - T_p) s(t - T_p) dt \quad (2.251)$$

Στην (2.251) το ολοκλήρωμα εντός του αθροίσματος γράφεται:

$$\int_{-KT/2}^{KT/2} s(t + \tau - T_p) s(t - T_p) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t + \tau - T_p) s(t - T_p) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t + \tau) s(t) dt \quad (2.252)$$

και λαμβάνοντας τον μετασχηματισμό Fourier ως προς τ έχουμε:

$$\begin{aligned} F_\tau \left\{ \int_{-KT/2}^{KT/2} s(t + \tau - T_p) s(t - T_p) dt \right\} &= F_\tau \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} s(t + \tau) s(t) dt \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t + \tau) s(t) dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f t} s(t) \int_{-\infty}^{+\infty} s(t + \tau) e^{-j2\pi f (t + \tau)} d\tau dt = S(-f) S(f) \end{aligned} \quad (2.253)$$

όπου

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (2.254)$$

είναι ο μετασχηματισμός Fourier του $s(t)$. Δεδομένου ότι το $s(t)$ είναι πραγματικό θα έχουμε $S(f)^* = S(-f)$ και επομένως:

$$F_\tau \left\{ \int_{-KT/2}^{KT/2} s(t + \tau - T_p) s(t - T_p) dt \right\} = |S(f)|^2 \quad (2.255)$$

Χρησιμοποιώντας την (2.251) θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
S_x(f) &= F_\tau \{ \bar{R}_{xx}(\tau) \} = E \{ A_p^2 \} \sum_{p=-K/2}^{K/2} \frac{1}{KT} F_\tau \left\{ \int_{-KT/2}^{KT/2} s(t+\tau-T_p) s(t-T_p) dt \right\} \\
&= \frac{E \{ A_p^2 \}}{T} \frac{1}{K} \sum_{p=-K/2}^{K/2} F_\tau \left\{ \int_{-KT/2}^{KT/2} s(t+\tau-T_p) s(t-T_p) dt \right\} = \frac{E \{ A_p^2 \}}{T} |S(f)|^2
\end{aligned} \tag{2.256}$$

Με τον τρόπο αυτό καθορίσαμε την φασματική πυκνότητα ισχύος $S_x(f)$ του σήματος PAM. Βλέπουμε ότι η $S_x(f)$ καθορίζεται από το φάσμα των παλμών $s(t)$. Αν θεωρήσουμε ότι το $s(t)$ είναι ένας ορθογώνιος παλμός της μορφής:

$$s(t) = \begin{cases} A & , 0 \leq t < T \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{2.257}$$

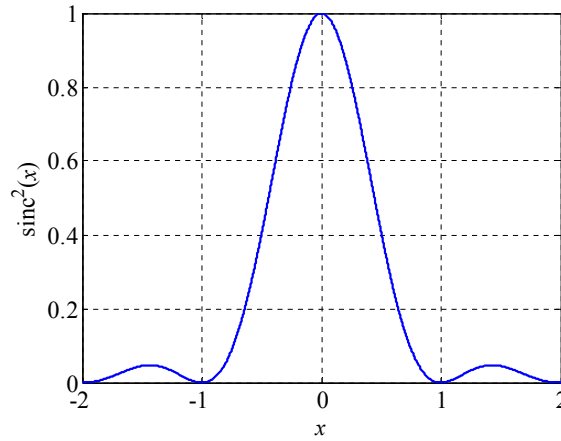
τότε θα έχουμε:

$$S(f) = AT \text{sinc}(fT) e^{-j\pi fT} \tag{2.258}$$

οπότε

$$S_x(f) = \frac{E \{ A_p^2 \}}{T} |S(f)|^2 = E \{ A_p^2 \} T A^2 \text{sinc}^2(fT) = \frac{M^2 - 1}{3} T A^2 \text{sinc}^2(fT) \tag{2.259}$$

Η (2.259) είναι η φασματική πυκνότητα του σήματος PAM όταν χρησιμοποιούμε ορθογώνιους παλμούς για την μετάδοση των συμβόλων και στην ουσία καθορίζεται από την συνάρτηση sinc^2 της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω:



Σχήμα 3-26: Η συνάρτηση $\text{sinc}^2(x)$.

Παρατηρούμε ότι για $x \approx 0.44$ έχουμε $\text{sinc}^2(x) \approx 1/2$. Όταν ένα σήμα είναι βασικής ζώνης (δηλαδή το φάσμα του μεγιστοποιείται κοντά στο $f=0$ τότε ονομάζουμε εύρος μισής ισχύος την συχνότητα f_{3dB} για την οποία $S_x(f_{3dB}) = (1/2) S_x(0)$ που στην συγκεκριμένη όπου ισχύει η (2.259) συνεπάγεται ότι $\text{sinc}^2(f_{3dB}T) = 1/2$ δηλαδή $f_{3dB} \approx 0.44/T$. Το εύρος μισής ισχύος συχνά χρησιμοποιείται για να περιγράψει τις απαιτήσεις σε εύρος ζώνης του σήματος. Αν R_b ο ρυθμός των bit και εφόσον ομαδοποιούμε τα bit

σε ομάδες των $v=\log_2 M$ τότε θα έχουμε ότι η διάρκεια των συμβόλων θα είναι $T=\log_2(M)/R_b$ και επομένως θα έχουμε $f_{3dB}\approx 0.44/T=0.44R_b/\log_2 M$. Άρα το εύρος ζώνης ισούται περίπου με το ήμισυ του ρυθμού μετάδοσης των bit διαιρεμένου δια τον λογάριθμο με βάση του 2 των αριθμών των επιπέδων που χρησιμοποιούμε στο PAM.

Ας δούμε μερικά επεξηγηματικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.9

Ένα σύστημα PAM χρησιμοποιεί $M=16$ στάθμες. Η μέση ισχύς που φτάνει στον δέκτη είναι $P_R=-30\text{dBm}$ ενώ η φασματική πυκνότητα ισχύος του θορύβου είναι $N_0/2=10^{-12}\text{W/Hz}$. Ζητούνται να υπολογιστεί ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης bit αν η πιθανότητα σφάλματος P_b ανά bit δεν πρέπει να ξεπερνά το 10^{-6} .

Σύμφωνα με την (2.243) θα πρέπει να έχουμε $P_b=10^{-6}$ κατ ελάχιστον. Για να βρούμε τον ρυθμό R_b μετάδοσης των bit θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση (2.244) από όπου:

$$Q\left(\sqrt{\frac{6P_{av}T}{N_0(M^2-1)}}\right) = P_b \frac{M \log_2 M}{2(M-1)} = 2.13 \times 10^{-6} \quad (2.260)$$

Χρησιμοποιώντας το Σχήμα 3-22 ή ακόμα καλύτερα κατάλληλους πίνακες της συνάρτησης Q , υπολογίζουμε το όρισμα q_b της συνάρτησης για το οποίο έχουμε $Q(q_b)=2.13 \times 10^{-6}$ και βρίσκουμε ότι $q_b \approx 4.6$ οπότε

$$\sqrt{\frac{6P_{av}T}{N_0(M^2-1)}} = q_b \quad (2.261)$$

από όπου προκύπτει:

$$T = \frac{q_b^2 N_0 (M^2 - 1)}{6P_{av}} \quad (2.262)$$

ενώ ο ρυθμός μετάδοσης των bit θα είναι:

$$R_b = \frac{\log_2 M}{T} = \frac{6P_{av} \log_2 M}{q_b^2 N_0 (M^2 - 1)} \quad (2.263)$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε ότι $R_b \approx 2.22 \times 10^3 \text{b/s} = 2.22 \text{Kb/s}$.

Παράδειγμα 3.10

Να υπολογιστεί ο λόγος σήματος-προς-θόρυβο SNR_b ανά bit για το σύστημα στο Παράδειγμα 3.9.

Σύμφωνα με τον ορισμό του SNR_b έχουμε:

$$\text{SNR}_b = \frac{P_{av}T}{N_0 \log_2 M} \quad (2.264)$$

αντικαθιστώντας τις τιμές από το Παράδειγμα 3.9 βρίσκουμε $SNR_b=224.7$ (23.5dB).

Παράδειγμα 3.11

Να βρεθεί η ελάχιστη αναμενόμενη μέση ισχύς και ο αντίστοιχος μέγιστος ρυθμός μετάδοσης σε ένα σύστημα PAM όταν το εύρος ζώνης είναι $B=250\text{kHz}$. Εξετάστε διάφορες τιμές του M οι οποίες είναι δυνάμεις του 2 όπου $2 \leq M \leq 128$ και θεωρείστε ότι η ελάχιστη επιτρεπόμενη τιμή της πιθανότητας σφάλματος ανά bit είναι $P_b=10^{-3}$ ενώ η φασματική πυκνότητα θορύβου είναι $N_0=10^{-13}\text{W/Hz}$.

Καταρχήν θα πρέπει να βρούμε την απαιτούμενη πιθανότητα συμβόλου $P(e)$ για κάθε τιμή του M . Δεδομένου ότι $P(e) \approx P_b \log_2 M$ για κάθε τιμή του M βρίσκουμε τις τιμές του $P(e)$ που αναφέρει ο Πίνακας 3-1. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το όρισμα q_b της συνάρτησης Q που χρειάζεται έτσι ώστε

$$Q(q_b) = P_b \frac{M \log_2 M}{2(M-1)} \quad (2.265)$$

Ο Πίνακας 3-1 αναφέρει τις τιμές του $Q(q_b)$ που υπολογίζονται από την (2.265) και τις αντίστοιχες τιμές του q_b που υπολογίζονται από το Σχήμα 3-22. Η μέση αναμενόμενη ισχύς στο δέκτη P_{av} υπολογίζεται από την (2.261).

$$P_{av} = \frac{q_b^2 N_0 (M^2 - 1)}{6T} \quad (2.266)$$

Ο Πίνακας 3-1 αναφέρει τις τιμές του P_{av} που υπολογίζονται από την (2.266) αλλά και τον ρυθμό μετάδοσης bit ο οποίος υπολογίζεται από την σχέση

$$R_b = \frac{\log_2 M}{T} \quad (2.267)$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει $T=0.5/B=2\mu\text{s}$.

Πίνακας 3-1: Οι τιμές των παραμέτρων για το Παράδειγμα 3.11

M	$Q(q_b)$	q_b	P_{av} (dBm)	R_b (Mb/s)
2	0,0010	3,09	-36,22	0,5
4	0,0013	3,00	-29,48	1
8	0,0017	2,93	-23,47	1,5
16	0,0021	2,86	-17,61	2
64	0,0026	2,80	-11,76	2,5
128	0,0030	2,74	-5,91	3
256	0,0035	2,69	-0,04	3,5
512	0,0040	2,65	5,84	4
1024	0,0045	2,61	11,73	4,5

3.10 Ζωνοπερατό PAM

Συχνά στις επικοινωνίες πρέπει να μεταδώσουμε τα δεδομένα μας σε υψηλές συχνότητες επειδή το τηλεπικοινωνιακό κανάλι στις χαμηλές συχνότητες δεν είναι κατάλληλο για μετάδοση ή δεν μας χωράει όλους. Στην περίπτωση αυτή, οι κυματομορφές προς μετάδοση γράφονται ως εξής:

$$s_m(t) = A_m s(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (2.268)$$

όπου το $s(t)$ είναι ένα σήμα χαμηλών συχνοτήτων και πεπερασμένης πάλι διάρκειας στο $[0, T]$ ενώ το $\cos(2\pi f_c t)$ ονομάζεται φέρον σήμα και η συχνότητα του f_c είναι πολύ μεγαλύτερη από τις συχνότητες f στις οποίες το φάσμα $S(f)$ του $s(t)$ είναι ισχυρό. Αν θυμηθούμε τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier κατανοούμε ότι το φάσμα του $s(t)\cos(2\pi f_c t)$ καθορίζεται από την σχέση:

$$S_c(f) = F\{s(t)\cos(2\pi f_c t)\} = \frac{1}{2}S(f - f_c) + \frac{1}{2}S(f + f_c) \quad (2.269)$$

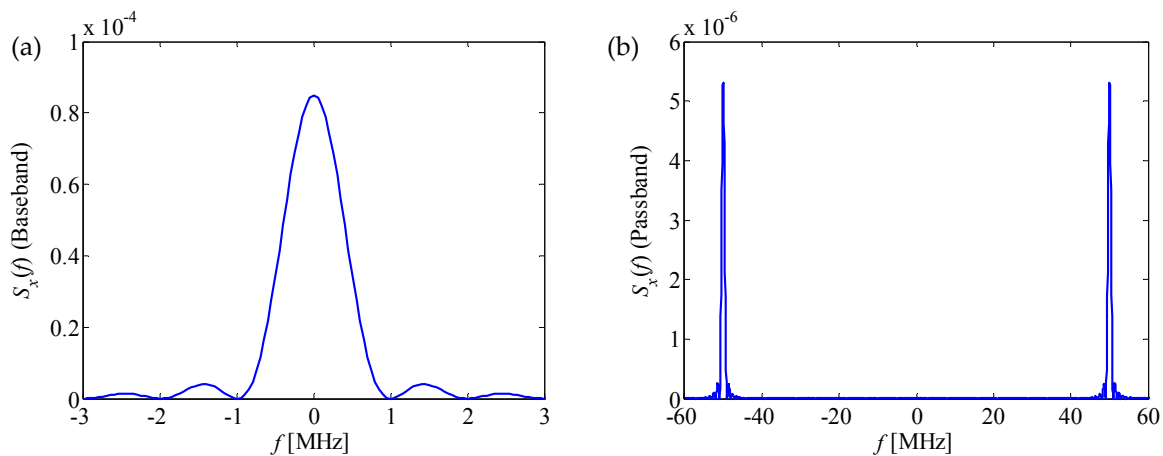
ενώ η φασματική πυκνότητα του σήματος PAM, θα δίνεται από την (2.256) με την μόνη διαφορά ότι πρέπει να αντικαταστήσουμε το $S(f)$ με $S_c(f)$, δηλαδή:

$$S_x(f) = \frac{M^2 - 1}{3T} |S_c(f)|^2 \quad (2.270)$$

Αν αντικαταστήσουμε την (2.270) στην (2.269) θα προκύψει ότι

$$S_x(f) = \frac{M^2 - 1}{12T} |S(f - f_c) + S(f + f_c)|^2 \quad (2.271)$$

Ας υποθέσουμε πως το σήμα $s(t)$ είναι ένας ορθογώνιος παλμός που καθορίζεται από την (2.257) ενώ το φάσμα $S(f)$ του δίνεται από την (2.258). Στο Σχήμα 3-27 συγκρίνουμε τις φασματικές πυκνότητες ισχύος του PAM βασικής ζώνης ($f_c=0$) και του ζωνοπερατού PAM στην περίπτωση όπου το $s(t)$ είναι ορθογώνιος παλμός με διάρκεια $T=1\mu s$, πλάτους $A=1$ ενώ η συχνότητα του φέροντος είναι $f_c=50\text{MHz}$. Και στις δύο περιπτώσεις θεωρούμε ότι $M=16$.



Σχήμα 3-27: Σύγκριση των φασμάτων του α) PAM βασικής ζώνης και β) του ζωνοπερατού PAM.

Όπως περιμέναμε, ενώ η φασματική πυκνότητα ισχύος του PAM βασικής ζώνης είναι συγκεντρωμένη γύρω από το $f=0$, στην περίπτωση του ζωνοπερατού PAM η πυκνότητα ισχύος είναι συγκεντρωμένη γύρω από την συχνότητα του φέροντος $f=\pm f_c$. Οι απαιτήσεις σε εύρος ζώνης έχουν τώρα αυξηθεί: Στο PAM βασικής ζώνης το εύρος ζώνης που χρειαζόμαστε εκτείνεται από τα 0Hz έως περίπου τα 3MHz¹⁸. Ωστόσο στο ζωνοπερατό PAM επειδή το φάσμα χαμηλών συχνοτήτων έχει μεταφερθεί γύρω από τη συχνότητα του φέροντος το φάσμα που καταλαμβάνεται στις θετικές συχνοότητες είναι περίπου από τα 47MHz έως τα 53MHz, δηλαδή τα όρια των συχνοτήτων (50 ± 3) MHz οπότε απαιτείται διπλάσιο φάσμα. Τα ίδια συμπεράσματα προκύπτουν αν μετράγαμε το φάσμα με το εύρος 3dB. Στην περίπτωση του PAM βασικής ζώνης θα χρειαζόμασταν ένα εύρος συχνοτήτων $[0, f_{3dB}]$ όπου $f_{3dB} \approx 0.44/T$ ενώ στην περίπτωση του ζωνοπερατού PAM θα χρησιμοποιούμε το διπλάσιο εύρος ζώνης $[f_c - f_{3dB}, f_c + f_{3dB}]$.

Στην περίπτωση του ζωνοπερατού PAM αλλάζει και η ενέργεια ε_{av} του σήματος εξαιτίας του φέροντος,

$$\varepsilon_{av} = E \left\{ \int_0^T s_m^2(t) dt \right\} = E \left\{ A_m^2 \right\} \int_0^T \cos^2(2\pi f_c t) s^2(t) dt = \frac{E \left\{ A_m^2 \right\}}{2} \left\{ \int_0^T s^2(t) dt + \int_0^T \cos(4\pi f_c t) s^2(t) dt \right\} \quad (2.272)$$

Το όρισμα του ολοκληρώματος στο τελευταίο μέρος της (2.272) είναι το γινόμενο μίας σχετικά αργής συνάρτησης του χρόνου $s^2(t)$ με ένα πολύ γρήγορο συνημίτονο το $\cos(4\pi f_c t)$. Αν κατά την διάρκεια μίας ημίπεριόδου $T_s/2 = 1/f_c/2$ του φέροντος το $s^2(t)$ παραμένει σχεδόν σταθερό τότε το εν λόγω ολοκλήρωμα γράφεται προσεγγιστικά ως:

$$\int_0^T \cos(4\pi f_c t) s^2(t) dt \approx \sum_{i=0}^{P-1} s^2(t_i) \int_{iT_s/2}^{(i+1)T_s/2} \cos(4\pi f_c t) dt = 0 \quad (2.273)$$

όπου $P = \lfloor T/T_s/2 \rfloor$ είναι το ακέραιο μέρος του πηλίκου της διάρκειας του συμβόλου T με την ημίπερίοδο του φέροντος $T_s/2$. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι τα ολοκληρώματα εντός του αθροίσματος είναι ίσα με μηδέν και επομένως προσεγγιστικά και το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέρος της (2.273) θα είναι ίσο με μηδέν. Έτσι η (2.272) θα δώσει:

$$\varepsilon_{av} \approx \frac{E \left\{ A_m^2 \right\}}{2} \int_0^T s^2(t) dt = \frac{E \left\{ A_m^2 \right\} \varepsilon_s}{2} = \frac{(M^2 - 1) \varepsilon_s}{6} \quad (2.274)$$

Παρατηρούμε επομένως ότι η αναμενόμενη ενέργεια του ζωνοπερατού PAM είναι η μισή από αυτή του PAM βασικής ζώνης που καθορίζεται από την (2.220). Το ίδιο ισχύει και για την μέση αναμενόμενη ισχύ του ζωνοπερατού PAM,

$$P_{av} = \frac{(M^2 - 1) \varepsilon_s}{6T} \quad (2.275)$$

¹⁸ Οι αρνητικές συχνοότητες δεν «μετρώνε»: όταν πληρώνουμε για τη χρήση φάσματος δεν λαμβάνουμε υπόψη και τις αρνητικές συχνοότητες που χρησιμοποιούμε!

Οι συνάρτηση βάσης στην περίπτωση του ζωνοπερατού PAM είναι η

$$p(t) = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_s}} s(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (2.276)$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η ενέργεια του $p(t)$ είναι ίση με 1 ενώ

$$s_m(t) = A_m \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} p(t) \quad (2.277)$$

Η (2.277) σημαίνει ότι τα διάφορα σήματα $s_m(t)$ αντιστοιχούν σε μονοδιάστατα διανύσματα

$$s_m = A_m \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \quad (2.278)$$

Η γεωμετρική αναπαράσταση του ζωνοπερατού PAM είναι ίδια με αυτή του PAM βασικής ζώνης, ωστόσο τα σύμβολα τώρα απέχουν τώρα $\Delta s = s_{m+1} - s_m = \sqrt{2\mathcal{E}_s}$. Βλέπουμε επομένως ότι οι εξισώσεις που διέπουν το ζωνοπερατό PAM είναι ίδιες με αυτές του PAM βασικής ζώνης αρκεί να αντικατάστησουμε το $\mathcal{E}_s$ με $\mathcal{E}_s/2$. Έτσι η πιθανότητα σφάλματος $P(e)$ θα γραφτεί:

$$P(e) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{N_0}}\right) \quad (2.279)$$

ενώ η πιθανότητα εσφαλμένης αποκωδικοποίησης bit θα δίνεται από την

$$P_b = \frac{2(M-1)}{M \log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{N_0}}\right) \quad (2.280)$$

Ωστόσο αν λύσουμε ως προς $\mathcal{E}_s$ την (2.275) θα έχουμε:

$$P_b = \frac{2(M-1)}{M \log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{6P_{av}T}{N_0(M^2-1)}}\right) = \frac{2(M-1)}{M \log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{6\mathcal{E}_{av}}{N_0(M^2-1)}}\right) = \frac{2(M-1)}{M \log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M}{(M^2-1)} (\text{SNR})_b}\right) \quad (2.281)$$

δηλαδή παίρνουμε ακριβώς τις ίδιες εξισώσεις με το PAM βασικής ζώνης.

3.11 Διαμόρφωση Φάσης

3.11.1 Εισαγωγικά

Μέχρι τώρα είδαμε την διαμόρφωση PAM βασικής ζώνης και το ζωνοπερατό PAM τα οποία στην ουσία αποτυπώνουν την πληροφορία στο πλάτος της κυματομορφής. Για παράδειγμα στην (2.268) πολλαπλασιάζουμε την βασική κυματομορφή $s(t)\cos(2\pi f_c t)$ με το κατάλληλο πλάτος A_m . Υπάρχει και μία δεύτερη επιλογή: να αποτυπώσουμε την πληροφορία στη φάση του σήματος οπότε έχουμε την περίπτωση της διαμόρφωσης με εναλλαγή φάσης (phase shift keying – PSK). Η κυματομορφή της PSK διαμόρφωσης δίνεται από την:

$$s_m(t) = s(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_m) \quad (2.282)$$

όπου πάλι το $s(t)$ είναι ένα σήμα βασικής ζώνης ενώ οι φάσεις ϕ_m διαφοροποιούν τα διάφορα σήματα προς μετάδοση μεταξύ τους. Συνήθως οι φάσεις επιλέγονται ως εξής:

$$\phi_m = \frac{2\pi m}{M} \quad (2.283)$$

Ποια είναι η γεωμετρική αναπαράσταση των σημάτων PSK; Για να το δούμε αυτό ας χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ ώστε να γράψουμε το σήμα $s_m(t)$ ως εξής:

$$s_m(t) = s(t) \cos(2\pi f_c t) \cos(\phi_m) - s(t) \sin(2\pi f_c t) \sin(\phi_m) \quad (2.284)$$

Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις:

$$p_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_s}} s(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (2.285)$$

$$p_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{\varepsilon_s}} s(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (2.286)$$

Θα έχουμε:

$$\langle p_1(t), p_1(t) \rangle = \frac{2}{\varepsilon_s} \int_0^T s^2(t) \cos^2(2\pi f_c t) dt \cong \frac{2}{\varepsilon_s} \frac{\varepsilon_s}{2} = 1 \quad (2.287)$$

$$\langle p_2(t), p_2(t) \rangle = \frac{2}{\varepsilon_s} \int_0^T s^2(t) \sin^2(2\pi f_c t) dt \cong \frac{2}{\varepsilon_s} \frac{\varepsilon_s}{2} = 1 \quad (2.288)$$

$$\langle p_2(t), p_1(t) \rangle = -\frac{2}{\varepsilon_s} \int_0^T s^2(t) \sin(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t) dt = -\frac{1}{\varepsilon_s} \int_0^T s^2(t) \sin(4\pi f_c t) dt \cong 0 \quad (2.289)$$

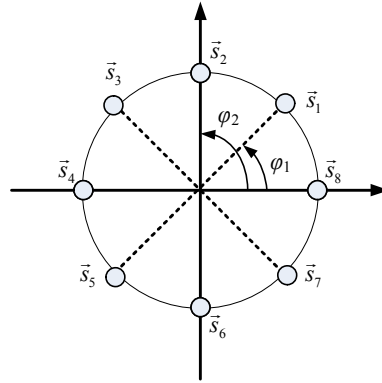
Στις παραπάνω εξισώσεις έχουμε πάλι υποθέσει ότι το $s(t)$ είναι πολύ πιο αργό από τα σήματα του φέροντος $\cos(4\pi f_c t)$ και $\sin(4\pi f_c t)$ οπότε τα ολοκληρώματα του $s(t)$. Σύμφωνα με τις (2.287)-(2.289), οι συναρτήσεις $p_1(t)$ και $p_2(t)$ έχουν ενέργεια ίση με την μονάδα και είναι κάθετες, επομένως αποτελούν τις συναρτήσεις βάσης του σήματος μας,

$$s_m(t) = \sqrt{\frac{\varepsilon_s}{2}} \{ \cos(\phi_m) p_1(t) + \sin(\phi_m) p_2(t) \} \quad (2.290)$$

Βλέπουμε ότι τα σήματα PSK χρειάζονται δύο συναρτήσεις βάσης για να περιγραφούν και επομένως τα διανύσματα που τους αντιστοιχούν είναι δισδιάστατα:

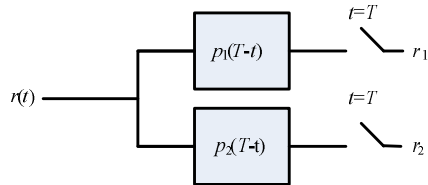
$$\vec{s}_m = \begin{bmatrix} s_{m1} \\ s_{m2} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \begin{bmatrix} \cos \phi_m \\ \sin \phi_m \end{bmatrix} \quad (2.291)$$

Είναι φανερό ότι εφόσον $s_{m1}^2 + s_{m2}^2 = \mathcal{E}_s/2$ τα άκρα των εν λόγω διανυσμάτων βρίσκονται πάνω στον κύκλο με κέντρο το κέντρο των αξόνων και ακτίνα $\sqrt{\mathcal{E}_s/2}$. Στο παρακάτω σχήμα δείχνουμε την γεωμετρική αναπαράσταση της διαμόρφωσης PSK στην περίπτωση όπου $M=8$.



Σχήμα 3-28: Γεωμετρική αναπαράσταση ενός σήματος PSK με $M=8$.

Ο δέκτης για το PSK σχεδιάζεται κατά τα γνωστά. Στο Σχήμα 3-29 απεικονίζεται ο βέλτιστος δέκτης του PSK.



Σχήμα 3-29: Σχηματική αναπαράσταση του βέλτιστου δέκτη για την διαμόρφωση PSK.

Οι έξοδοι του δέκτη υπολογίζονται ως εξής:

$$r_1 = y_1(T) = \int_0^T r(t) p_1(t) dt = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_s}} \int_0^T r(t) s(t) \cos(2\pi f_c t) dt \quad (2.292)$$

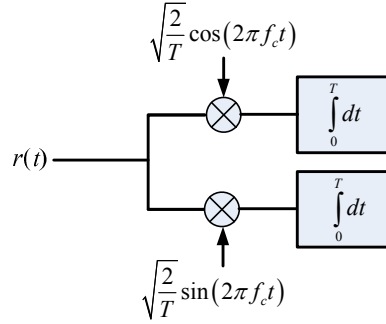
$$r_2 = y_2(T) = \int_0^T r(t) p_2(t) dt = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_s}} \int_0^T r(t) s(t) \sin(2\pi f_c t) dt \quad (2.293)$$

Αν υποθέσουμε ότι το $s(t)$ είναι ένας ορθογώνιος παλμός, δηλαδή $s(t)=1$ για $0 \leq t \leq T$ ενώ διαφορετικά $s(t)=0$, θα έχουμε

$$r_1 = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T r(t) \cos(2\pi f_c t) dt \quad (2.294)$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T r(t) \sin(2\pi f_c t) dt \quad (2.295)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις υποδεικνύουν την παρακάτω υλοποίηση του δέκτη με την χρήση ολοκληρωτών:



Σχήμα 3-30: Σχηματική αναπαράσταση του βέλτιστου δέκτη για την διαμόρφωση PSK με χρήση ολοκληρωτών

Ο υπολογισμός της πιθανότητας σφάλματος θα πρέπει να προχωρήσει κατά τα γνωστά. Καταρχήν γράφουμε τις εξόδους του δέκτη r_1 και r_2 με τρόπο που να είναι πιο ξεκάθαρη η επίδραση του θορύβου:

$$r_1 = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_s}} \int_0^T s_m(t)s(t) \cos(2\pi f_c t) dt + \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_s}} \int_0^T n(t)s(t) \cos(2\pi f_c t) dt = s_1 + n_1 \quad (2.296)$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_s}} \int_0^T s_m(t)s(t) \sin(2\pi f_c t) dt + \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_s}} \int_0^T n(t)s(t) \sin(2\pi f_c t) dt = s_2 + n_2 \quad (2.297)$$

όπου οι συνιστώσες του θορύβου δίνονται από την σχέση:

$$n_1 = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_s}} \int_0^T n(t)s(t) \cos(2\pi f_c t) dt \quad (2.298)$$

$$n_2 = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_s}} \int_0^T n(t)s(t) \sin(2\pi f_c t) dt \quad (2.299)$$

Εφόσον το $n(t)$ είναι AWGN εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε όπως και πριν ότι τα n_1 και n_2 είναι Gaussian με μέση τιμή μηδέν. Επίσης θα έχουμε:

$$E\{n_1^2\} = \frac{2}{\mathcal{E}_s} \int_0^T \int_0^T s(t_1) \cos(2\pi f_c t_1) s(t_2) \cos(2\pi f_c t_2) E\{n(t_1)n(t_2)\} dt_1 dt_2 \quad (2.300)$$

όπου αντικαθιστούμε $E\{n(t_1)n(t_2)\} = (N_0/2)\delta(t_1-t_2)$ οπότε συνεπάγεται:

$$E\{n_1^2\} = \frac{N_0}{\mathcal{E}_s} \int_0^T s^2(t) \cos^2(2\pi f_c t) dt \cong \frac{N_0}{2\mathcal{E}_s} \int_0^T s^2(t) dt = \frac{N_0}{2} \quad (2.301)$$

και με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε στο ότι:

$$E\{n_2^2\} = \frac{N_0}{\varepsilon_s} \int_0^T s^2(t) \sin^2(2\pi f_c t) dt \cong \frac{N_0}{2\varepsilon_s} \int_0^T s^2(t) dt = \frac{N_0}{2} \quad (2.302)$$

ενώ:

$$E\{n_1 n_2\} = \frac{2}{\varepsilon_s} \int_0^T \int_0^T s(t_1) \cos(2\pi f_c t_1) s(t_2) \sin(2\pi f_c t_2) E\{n(t_1) n(t_2)\} dt_1 dt_2 = \frac{N_0}{\varepsilon_s} \int_0^T s^2(t) \sin(4\pi f_c t) dt \cong 0 \quad (2.303)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις υποδεικνύουν ότι οι Gaussian μεταβλητές τα n_1 και n_2 είναι ανεξάρτητες ενώ η διακύμανση τους είναι ίση με N_0 .

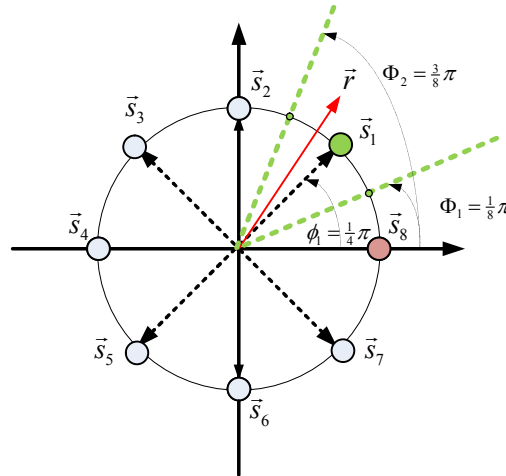
Στη συνέχεια θα πρέπει να υπολογίσουμε τις αποστάσεις $d_k = |\vec{s}_k - \vec{r}|$. Το σύμβολο στο οποίο αντιστοιχεί η μικρότερη απόσταση θα επιλεγεί από τον δέκτη ως σωστό. Δεδομένου ότι

$$d_k^2 = |\vec{s}_k|^2 + |\vec{r}|^2 - 2\vec{s}_k \cdot \vec{r} \quad (2.304)$$

και ότι για όλα τα σύμβολα του PSK έχουμε:

$$|\vec{s}_k|^2 = \cos^2 \phi_k + \sin^2 \phi_k = 1 \quad (2.305)$$

προκύπτει ότι το σύμβολο με το μικρότερο d_k είναι το σύμβολο με το μεγαλύτερο $\vec{s}_k \cdot \vec{r} = |\vec{r}| \cos \theta_k$ όπου θ_k είναι η γωνία μεταξύ του $\vec{r}$ και του $\vec{s}_k$. Άρα αντί να υπολογίζουμε τις αποστάσεις d_k μπορούμε απλά να υπολογίζουμε τις γωνίες που σχηματίζει το $\vec{r}$ με όλα τα σύμβολα $\vec{s}_k$ και να καταλήγουμε σε αυτό με το μεγαλύτερο $\cos \theta_k$



Σχήμα 3-31: Αποκωδικοποίηση συμβόλων στην περίπτωση της διαμόρφωσης PSK με $M=8$.

3.11.2 Υπολογισμός της πιθανότητας σφάλματος

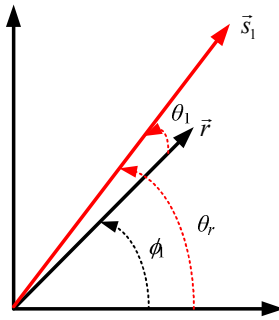
Ας δούμε λίγο την κατάσταση στο Σχήμα 3-31. Αν υποθέσουμε ότι ο πομπός μεταδίδει το σύμβολο $\bar{s}_1$ και στην συνέχεια ο δέκτης λαμβάνει το $\bar{r}$. Για να μη γίνει σφάλμα θα πρέπει το $\cos\theta_1$ όπου θ_1 η γωνία που σχηματίζει το $\bar{r}$ με το $\bar{s}_1$ να είναι μικρότερο από οποιοδήποτε άλλο $\cos\theta_k$. Δεδομένου ότι οι γωνίες θ_k που σχηματίζουν τα $\bar{s}_k$ με τον οριζόντιο είναι ακέραια πολλαπλάσια του $2\pi/M=\pi/4$ έπεται ότι και οι γωνίες θ_k που σχηματίζει το $\bar{r}$ με τα $\bar{s}_k$ θα διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του $2\pi/M=\pi/4$, δηλαδή

$$\theta_k = \frac{2k\pi}{M} + \theta_1 \quad (2.306)$$

ποια από όλες αυτές τις γωνίες έχει το μεγαλύτερο συνημίτονο; Εφόσον η (2.306) χωρίζει τον κύκλο σε M διαστήματα με μήκος $2\pi/M$ το κάθενα, σίγουρα μία από τις θ_k θα βρίσκεται εντός του $[-\pi/M, \pi/M]$ όπου στο διάστημα εκείνο το συνημίτονο παίρνει τις μεγαλύτερες τιμές του από οποιοδήποτε άλλο διάστημα με μήκος $2\pi/M$. Αν η θ_1 είναι αυτή η γωνία, δηλαδή $-\pi/M \leq \theta_1 \leq \pi/M$ τότε έπεται ότι το $\cos\theta_1$ θα είναι το μεγαλύτερο από τα $\cos\theta_k$ και πως το σύμβολο θα αποκωδικοποιηθεί σωστά. Η πιθανότητα να έχουμε λανθασμένη αποκωδικοποίηση συμβόλου θα είναι

$$P(e) = 1 - P\left\{-\frac{\pi}{M} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{M}\right\} = 1 - \int_{-\pi/M}^{\pi/M} f_a(\theta) d\theta \quad (2.307)$$

όπου f_a είναι η πυκνότητα πιθανότητας της θ_1 . Για να υπολογίσουμε την f_a παρατηρούμε από το Σχήμα 3-32 ότι η γωνία θ_1 είναι η διαφορά $\theta_r - \phi_1$ των γωνιών θ_r και ϕ_1 που σχηματίζουν τα διανύσματα $\bar{r}$ και $\bar{s}_1$ με τον οριζόντιο άξονα αντίστοιχα.



Σχήμα 3-32: Υπολογισμός της γωνίας θ_1 .

Επίσης αν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες (r_1, r_2) του $\bar{r}$ έπεται ότι το μέτρο του $r = |\bar{r}|$ και η γωνία θ_r θα καθορίζονται από τις σχέσεις

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \quad (2.308)$$

$$\theta_r = \tan^{-1}\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \quad (2.309)$$

όπου τα r_1 και r_2 καθορίζονται από τις σχέσεις:

$$r_1 = s_1 + n_1 = \sqrt{\varepsilon_s / 2} \cos \phi_1 + n_1 = K \cos \phi_1 + n_1 \quad (2.310)$$

$$r_2 = s_2 + n_2 = \sqrt{\varepsilon_s / 2} \sin \phi_1 + n_2 = K \sin \phi_1 + n_2 \quad (2.311)$$

ή σε μορφή διανύσματος

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\varepsilon_s}{2}} \begin{bmatrix} \cos \phi_1 \\ \sin \phi_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \quad (2.312)$$

όπου έχουμε ορίσει $K = \sqrt{\varepsilon_s / 2}$. Εφόσον τα n_1 και n_2 είναι Gaussian ανεξάρτητα με μέση τιμή μηδέν, τα r_1 και r_2 θα είναι και αυτά Gaussian με μέση τιμή $\cos \phi_1$ και $\sin \phi_1$ αντίστοιχα. Επομένως η συνδυασμένη πυκνότητα πιθανότητας των r_1 και r_2 θα είναι

$$f_r(r_1, r_2) = \frac{1}{\pi N_0} \exp \left(-\frac{(r_1 - K \cos \phi_1)^2 + (r_2 - K \sin \phi_1)^2}{N_0} \right) \quad (2.313)$$

Για να βρούμε την πυκνότητα πιθανότητας των r και θ_r θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του μετασχηματισμού των τυχαίων μεταβλητών. Καταρχήν θα πρέπει να υπολογίσουμε τον πίνακα Jacobi του μετασχηματισμού που καθορίζεται από τις (2.308) και (2.309)

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial r_1} & \frac{\partial r}{\partial r_2} \\ \frac{\partial \theta_r}{\partial r_1} & \frac{\partial \theta_r}{\partial r_2} \end{bmatrix} \quad (2.314)$$

όπου οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται ως εξής:

$$\frac{\partial r}{\partial r_1} = \frac{\partial}{\partial r_1} \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} = \frac{r_1}{r} = \cos \theta_r \quad (2.315)$$

$$\frac{\partial r}{\partial r_2} = \frac{\partial}{\partial r_2} \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \frac{r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} = \frac{r_2}{r} = \sin \theta_r \quad (2.316)$$

$$\frac{\partial \theta_r}{\partial r_1} = \frac{\partial}{\partial r_1} \tan^{-1} \frac{r_2}{r_1} = -\frac{r_2}{r_1^2 + r_2^2} = -\frac{\sin \theta_r}{r} \quad (2.317)$$

$$\frac{\partial \theta_r}{\partial r_2} = \frac{\partial}{\partial r_2} \tan^{-1} \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_1}{r_1^2 + r_2^2} = \frac{\cos \theta_r}{r} \quad (2.318)$$

Ο πίνακας Jacobi γράφεται:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial r_1} & \frac{\partial r}{\partial r_2} \\ \frac{\partial \theta_r}{\partial r_1} & \frac{\partial \theta_r}{\partial r_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \sin \theta_r \\ -\frac{\sin \theta_r}{r} & \frac{\cos \theta_r}{r} \end{bmatrix} \quad (2.319)$$

ενώ η ορίζουσα του υπολογίζεται ως εξής:

$$|J| = \frac{\cos^2 \theta_r}{r} + \frac{\sin^2 \theta_r}{r} = \frac{1}{r} \quad (2.320)$$

Επίσης θα έχουμε

$$(r_1 - K \cos \phi_1)^2 + (r_2 - \sin \phi_1)^2 = r^2 + K^2 - 2Kr \cos(\theta_r - \phi_1) \quad (2.321)$$

Η συνδυασμένη πυκνότητα $g(\theta_r, r)$ πιθανότητας των θ_r και r θα είναι:

$$g(\theta_r, r) = \frac{1}{|J|} f_r(r_1, r_2) = \frac{r}{\pi N_0} \exp\left(-\frac{r^2 + K^2 - 2Kr \cos(\theta_r - \phi_1)}{N_0}\right) \quad (2.322)$$

Η πυκνότητα πιθανότητας $g(\theta_r)$ της τυχαίας μεταβλητής θ_r θα δίνεται από την σχέση:

$$g(\theta_r) = \int_0^{+\infty} g(\theta_r, r) dr = \frac{e^{K^2/N_0}}{\pi N_0} \int_0^{\infty} r \exp\left(-\frac{r^2 - 2Kr \cos(\theta_r - \phi_1)}{N_0}\right) dr \quad (2.323)$$

Αν κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $r = \rho \sqrt{N_0}$ στην (2.323) θα έχουμε:

$$g(\theta_r) = \frac{e^{K^2/N_0}}{\pi} \int_0^{\infty} \rho \exp\left(-\rho^2 - 2\frac{K}{\sqrt{N_0}} \rho \cos(\theta_r - \phi_1)\right) d\rho \quad (2.324)$$

και αν θέσουμε

$$\kappa = \frac{K}{\sqrt{N_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_s}{2N_0}} \quad (2.325)$$

τότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται και ως:

$$g(\theta_r) = \frac{e^{-\kappa^2}}{\pi} \int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2 + 2\kappa\rho \cos(\theta_r - \phi_1)} d\rho \quad (2.326)$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα υπολογίζεται δεδομένου ότι

$$\int x e^{-x^2 + \beta x} dx = \frac{\sqrt{\pi} \beta e^{\beta^2/4}}{4} \operatorname{erf}\left(x - \frac{\beta}{2}\right) - \frac{1}{2} e^{-x(x-\beta)} \quad (2.327)$$

Αν λάβουμε υπόψη ότι $\text{erf}(+\infty)=1$ τότε μπορούμε να υπολογίσουμε και το παρακάτω ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2 + \beta x} dx = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi} \beta e^{\beta^2/4}}{4} \left(1 + \text{erf} \left(\frac{\beta}{2} \right) \right) \quad (2.328)$$

οπότε η πυκνότητα πιθανότητας στην (2.326) υπολογίζεται ως εξής αν θέσουμε $\beta=2\kappa \cos(\theta_r - \phi_1)$:

$$g(\theta_r) = \frac{e^{-\kappa^2}}{2\pi} \left\{ 1 + \sqrt{\pi} \kappa \cos(\theta_r - \phi_1) e^{\kappa^2 \cos^2(\theta_r - \phi_1)} \left(1 + \text{erf}(\kappa \cos(\theta_r - \phi_1)) \right) \right\} \quad (2.329)$$

η πυκνότητα πιθανότητας της γωνίας $\theta_1 = \theta_r - \phi_1$ που είναι η γωνία που σχηματίζει το $\vec{r}$ με το $\vec{s}_1$ προκύπτει εύκολα από την (2.329),

$$f_a(\theta_1) = \frac{e^{-\kappa^2}}{2\pi} \left\{ 1 + \sqrt{\pi} \kappa \cos \theta_1 e^{\kappa^2 \cos^2 \theta_1} \left(1 + \text{erf}(\kappa \cos \theta_1) \right) \right\} \quad (2.330)$$

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε κάνει την γραφική παράσταση της πυκνότητας πιθανότητας f_a για διάφορες τιμές της παραμέτρου $\kappa^2 = \varepsilon_s/2/N_0$. Το $\varepsilon_s/2$ είναι η ενέργεια της κυματομορφής του PSK αφού

$$\int_0^T s_m^2(t) dt = \int_0^T s^2(t) \cos^2(2\pi f_c t + \phi_m) dt \cong \int_0^T s^2(t) dt = \frac{\varepsilon_s}{2} \quad (2.331)$$

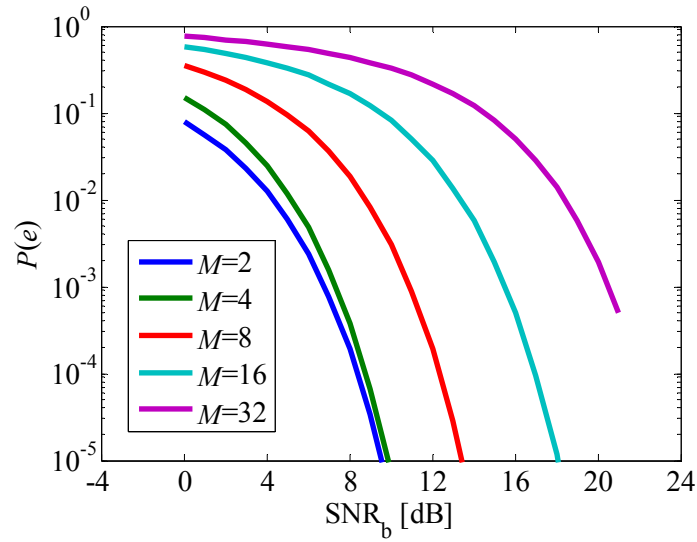
ενώ αν υποθέσουμε πως κάθε κυματομορφή εκπέμπεται με την ίδια πιθανότητα τότε:

$$E \left\{ \int_0^T s_m^2(t) dt \right\} = \sum_{k=1}^M \frac{1}{M} \int_0^T s_k^2(t) dt = \frac{\varepsilon_s}{2} \quad (2.332)$$

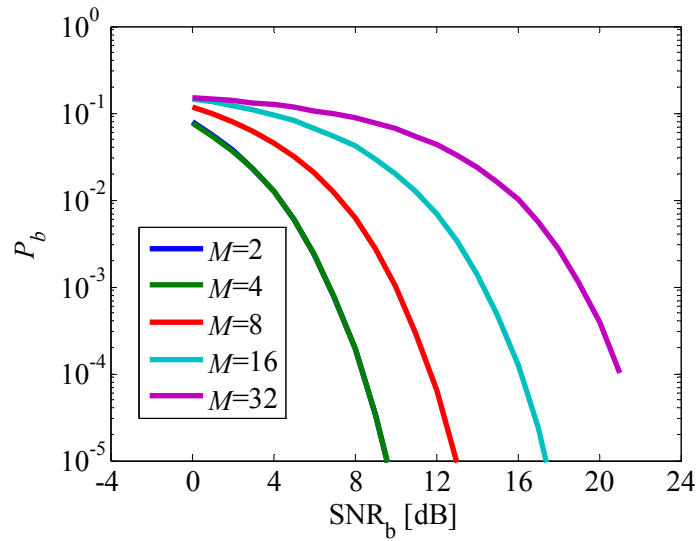
οπότε όντως το $\varepsilon_s/2$ είναι η μέση ενέργεια της κυματομορφής. Επίσης το N_0 είναι η φασματική πυκνότητα του θορύβου και επομένως το πηλίκο $\kappa^2 = \varepsilon_s/2/N_0$ είναι η μέση ισχύς ανά σύμβολο ενώ το SNR ανά bit θα είναι:

$$(\text{SNR})_b = \frac{\varepsilon_s}{2N_0 \log_2 M} = \frac{\kappa^2}{\log_2 M} \quad (2.333)$$

Στα παρακάτω σχήματα παραθέτουμε την γραφική παράσταση της πιθανότητας σφάλματος συμβόλου $P(e)$ και την πιθανότητα λανθασμένης αποκωδικοποίησης bit P_b . Όπως και στην περίπτωση του PAM, προσεγγίζουμε το $P_b \cong P(e)/\log_2 M$

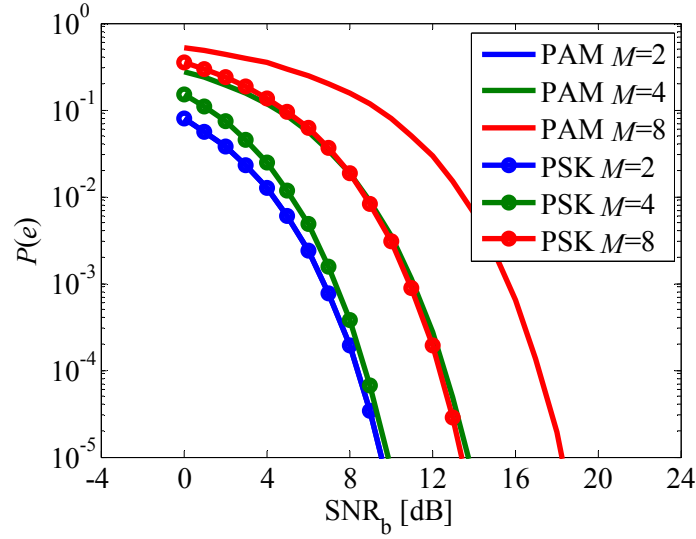


Σχήμα 3-33: Γραφική παράσταση της πιθανότητας σφάλματος συμβόλου $P(e)$ συναρτήσει του ηλιίκου σήματος-προς-θόρυβο ανά-bit SNR_b στην περίπτωση του PSK



Σχήμα 3-34: Γραφική παράσταση της πιθανότητας σφάλματος bit P_b συναρτήσει του ηλιίκου σήματος-προς-θόρυβο ανά-bit SNR_b στην περίπτωση του PSK

Πρωτού προχωρήσουμε στην φασματική ανάλυση του σήματος PSK είναι ενδιαφέρον να συγκρίνουμε το PSK με το PAM. Στο παρακάτω σχήμα παριστάνουμε γραφικά τις πιθανότητες σφάλματος $P(e)$ για τα συστήματα PSK και PAM συναρτήσει του ηλιίκου σήματος προς θόρυβο ανά bit, SNR_b .



Σχήμα 3-35: Σύγκριση της πιθανότητας σφάλματος συμβόλου $P(e)$ συναρτήσει του πηλίκου σήματος-προς-θόρυβο ανά-bit SNR_b στην περίπτωση του PSK και του PAM

3.11.3 Υπολογισμός του $P(e)$ σε ειδικές περιπτώσεις

Παρατηρούμε πως με εξαίρεση την περίπτωση όπου $M=2$ όπου τα $P(e)$ ταυτίζονται, στις άλλες περιπτώσεις το PSK υπερτερεί του PAM καθώς οδηγεί σε χαμηλότερη πιθανότητα σφάλματος. Για παράδειγμα στην περίπτωση όπου $M=4$, η πιθανότητα $P(e)$ γίνεται ίση με 10^{-5} για $\text{SNR}_b \approx 13.9\text{dB}$ και $\text{SNR}_b \approx 10\text{dB}$ στην περίπτωση των συστημάτων PAM και PSK αντίστοιχα που σημαίνει ότι το PSK απαιτεί περίπου 4dB χαμηλότερο πηλίκο SNR_b για να λειτουργήσει με αυτή την πιθανότητα εσφαλμένου συμβόλου. Αυτό συνεπάγεται ότι το PSK είναι ανθεκτικότερο στο θόρυβο από το PAM, ωστόσο συνεπάγεται και μία πολυπλοκότερη υλοποίηση δέκτη, όπως θα δούμε και παρακάτω που θα συζητήσουμε διάφορες πρακτικές λεπτομέρειες του PSK.

Μπορεί να αναρωτιέστε γιατί το PSK και το PAM έχουν την ίδια πιθανότητα σφάλματος συμβόλου όταν $M=2$. Η απάντηση δεν είναι τόσο δύσκολη. Το ζωνοπερατό PAM με $M=2$ χρησιμοποιεί τις κυματομορφές:

$$s_{\text{PAM},1}(t) = A_1 s(t) \cos(2\pi f_c t) = -s(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (2.334)$$

$$s_{\text{PAM},2}(t) = A_2 s(t) \cos(2\pi f_c t) = +s(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (2.335)$$

ενώ στο PSK με $M=2$ οι φάσεις θα χρησιμοποιούνται θα είναι $\phi_1 = \pi$ και $\phi_2 = 2\pi$, οπότε

$$s_{\text{PSK},1}(t) = s(t) \cos(2\pi f_c t + \pi) = -s(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (2.336)$$

$$s_{\text{PSK},2}(t) = s(t) \cos(2\pi f_c t + 2\pi) = s(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (2.337)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι η διαμόρφωση PSK με $M=2$ συμπίπτει με την ζωνοπερατή διαμόρφωση PAM με $M=2$, άρα θα έχουν την ίδια πιθανότητα σφάλματος, δηλαδή:

$$P(e) = Q\left(\sqrt{2SNR_b}\right) \quad (2.338)$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει $M=2$. Επίσης μία ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι όταν $M=4$ τα σήματα που χρησιμοποιούμε στο PSK είναι:

$$s_{\text{PSK},1}(t) = s(t) \cos(2\pi f_c t + \pi / 2) = -s(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (2.339)$$

$$s_{\text{PSK},2}(t) = s(t) \cos(2\pi f_c t + \pi) = -s(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (2.340)$$

$$s_{\text{PSK},3}(t) = s(t) \cos(2\pi f_c t + 3\pi / 2) = s(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (2.341)$$

$$s_{\text{PSK},4}(t) = s(t) \cos(2\pi f_c t + 2\pi) = s(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (2.342)$$

ενώ η γεωμετρική αναπαράσταση των συμβόλων του PSK με $M=4$ φαίνεται στο Σχήμα 3-36. Στην περίπτωση αυτή ο δέκτης πρέπει να υπολογίσει τέσσερις αποστάσεις ενώ για να αποκωδικοποιηθεί σωστά το σύμβολο θα πρέπει το διάνυσμα $\vec{r}$ αρκεί η προβολή του ως προς τον οριζόντιο άξονα (δηλαδή το r_1) και ως προς τον κάθετο άξονα (δηλαδή το r_2) να είναι τέτοιες ώστε να βρίσκεται εγγύτερα στο σύμβολο εκπομπής. Ειδικά στην περίπτωση όπου $M=4$, το Σχήμα 3-36 υποδεικνύει ότι τα διανύσματα μετάδοσης θα είναι ως εξής:

$$\vec{s}_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.343)$$

$$\vec{s}_2 = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.344)$$

$$\vec{s}_3 = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.345)$$

$$\vec{s}_4 = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.346)$$

οπότε θα έχουμε:

$$\vec{r} \cdot \vec{s}_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} r_2 \quad (2.347)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{s}_2 = -\sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} r_1 \quad (2.348)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{s}_3 = -\sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} r_2 \quad (2.349)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{s}_4 = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} r_1 \quad (2.350)$$

Οι παραπάνω σχέσεις υποδεικνύουν ότι για να αποφασίσει ο δέκτης το σύμβολο $\vec{s}_m$ που θα αποκωδικοποιήσει και που είδαμε πως στην περίπτωση του PSK είναι το σύμβολο με το μεγαλύτερο $\vec{r} \cdot \vec{s}_m$ έχει την δυνατότητα να το πραγματοποιήσει ως εξής:

- αν $r_1 > 0$ τότε το $\vec{s}_4$ είναι πιο πιθανό από το $\vec{s}_2$.
- αν $r_2 > 0$ τότε το $\vec{s}_3$ είναι πιο πιθανό από το $\vec{s}_1$.
- αν $|r_1| \geq |r_2|$ τότε καταλήγουμε στο πιθανότερο σύμβολο στον κάθετο άξονα.
- αν $|r_1| < |r_2|$ τότε καταλήγουμε στο πιθανότερο σύμβολο στον οριζόντιο άξονα.

Καταλαβαίνουμε επομένως αν μεταδοθεί το $\vec{s}_1$ τότε θα έχουμε:

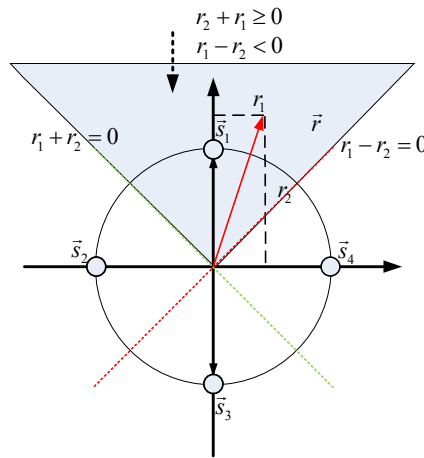
$$r_1 = n_1 \quad (2.351)$$

$$r_2 = n_2 + \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \quad (2.352)$$

για να γίνει σωστά η αποκωδικοποίηση θα πρέπει το διάνυσμα $\vec{r}$ να βρεθεί στην γκριζαρισμένη περιοχή στο Σχήμα 3-36 όπου ισχύει:

$$r_1 + r_2 = n_1 + n_2 + \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \geq 0 \quad (2.353)$$

$$r_1 - r_2 = n_1 - n_2 - \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} < 0 \quad (2.354)$$



Σχήμα 3-36:Γεωμετρική αναπαράσταση του PSK με $M=4$.

Οι μεταβλητές $z_1 = n_1 + n_2$ και $z_2 = n_1 - n_2$ έχουν μέση τιμή μηδέν και είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αφού ισχύει:

$$E\{z_1 z_2\} = E\{(n_1 + n_2)(n_1 - n_2)\} = E\{n_1^2\} - E\{n_2^2\} = 0 \quad (2.355)$$

Η διακύμανση των z_1 και z_2 είναι ίση με

$$E\{z_1^2\} = E\{(n_1 + n_2)^2\} = E\{n_1^2\} + E\{n_2^2\} = N_0 \quad (2.356)$$

$$E\{z_2^2\} = E\{(n_1 - n_2)^2\} = E\{n_1^2\} + E\{n_2^2\} = N_0 \quad (2.357)$$

Η πιθανότητα P_c να έχουμε σωστή αποκωδικοποίηση συμβόλου είναι η πιθανότητα να ισχύουν ταυτόχρονα οι (2.353) και (2.354), δηλαδή

$$P_c = P\left(\left\{z_1 \geq -\sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}}\right\} \cap \left\{z_2 < \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}}\right\}\right) = P\left(z_1 \geq -\sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}}\right) P\left(z_2 < \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}}\right) \quad (2.358)$$

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Q μπορούμε να δείξουμε ότι

$$P\left(z_1 \geq -\sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}}\right) = P\left(-z_1 \leq \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}}\right) = 1 - Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2N_0}}\right) \quad (2.359)$$

$$P\left(z_2 < \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}}\right) = 1 - Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2N_0}}\right) \quad (2.360)$$

οπότε

$$P_c = \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2N_0}}\right)\right]^2 \quad (2.361)$$

ενώ η πιθανότητα να έχουμε εσφαλμένη αποκωδικοποίηση συμβόλου είναι:

$$P(e) = 1 - P_c^2 = \left(2 - Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2N_0}}\right)\right) Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2N_0}}\right) \quad (2.362)$$

Δεδομένου ότι η ενέργεια ανά σύμβολο είναι $\mathcal{E}_s/2$ και για $M=4$ μεταδίδουμε $\log_2(M)=2$ bit ανά σύμβολο προκύπτει ότι η ενέργεια ανά bit είναι $\mathcal{E}_b = \mathcal{E}_s/4$ επομένως θα έχουμε $\mathcal{E}_s = 4\mathcal{E}_b$ οπότε η (2.362) γράφεται και ως:

$$P(e) = \left(2 - Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)\right) Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right) = \left(2 - Q\left(\sqrt{2\text{SNR}_b}\right)\right) Q\left(\sqrt{2\text{SNR}_b}\right) \quad (2.363)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το SNR ανά bit SNR_b είναι ίσο με $\mathcal{E}_b/N_0$.

Παράδειγμα 3.12

Να συγκριθούν οι τιμές του SNR_b που χρειάζονται στην περίπτωση του PSK με $M=4$ και του PAM με $M=4$ ώστε να επιτύχουμε πιθανότητα σφάλματος bit ίση με $P_b=10^{-6}$.

Στην περίπτωση του PAM, θα έχουμε

$$P_b = \frac{2(M-1)}{M \log_2 M} Q \left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M}{(M^2-1)}} (\text{SNR})_b \right) \quad (2.364)$$

οπότε αν αντικαταστήσουμε $M=4$ θα ισχύει:

$$\frac{4}{3} P_b = Q \left(\sqrt{\frac{4}{5}} (\text{SNR})_b \right) \quad (2.365)$$

το όρισμα q_1 της συνάρτησης Q στο οποίο επιτυγχάνουμε $Q(q_1)=(4/3)P_b=1.33 \times 10^{-6}$ είναι $q_1=4.7$ οπότε θα έχουμε $[(4/5)\text{SNR}_b]^{1/2}=q_1$ και τελικά $\text{SNR}_b=5/4q_1^2 \approx 27.4$ δηλαδή 14.4dB.

Στην περίπτωση του PSK θα έχουμε

$$\frac{P_b}{\log_2 M} = \frac{P_b}{2} = P(e) = 2Q \left(\sqrt{2\text{SNR}_b} \right) - \left[Q \left(\sqrt{2\text{SNR}_b} \right) \right]^2 \quad (2.366)$$

Αν θέσουμε $Q=Q([2\text{SNR}_b]^{1/2})$ τότε θα έχουμε:

$$Q^2 - 2Q + P_b / 2 = 0 \quad (2.367)$$

Λύνοντας το παραπάνω τριώνυμο βρίσκουμε μία ρίζα η οποία είναι ίση με περίπου 2 και μία άλλη η οποία είναι ίση με $Q_2=2.5 \times 10^{-7}$. Εφόσον η συνάρτηση Q είναι πάντα μικρότερη ή ίση του 1, η πρώτη ρίζα απορρίπτεται και ψάχνουμε το όρισμα q_2 της συνάρτησης Q που είναι ίσο με $Q(q_2)=Q_2$ το οποίο είναι ίσο με $q_2 \approx 5$ ενώ το απαιτούμενο SNR_b θα καθορίζεται από την σχέση $[2\text{SNR}_b]^{1/2}=q_2$ δηλαδή $\text{SNR}_b=q_2^2/2 \approx 12.7$, δηλαδή $\approx 11\text{dB}$.

Επομένως το PSK χρειάζεται 3.4dB χαμηλότερο SNR_b για να επιτύχει την ίδια πιθανότητα σφάλματος bit με το PAM.

3.11.4 Το φάσμα του PSK

Για να προσδιορίσουμε τα φασματικά χαρακτηριστικά του σήματος PSK θα πρέπει να περιγράψουμε το σήμα όπως κάναμε και στην περίπτωση του PAM θεωρώντας μία μεγαλύτερη ακολουθία συμβόλων. Ας θεωρήσουμε πως εκπέμπουμε μία σειρά από σύμβολα, $(\phi_1, \dots, \phi_K)$ όπου K άρτιος τα οποία φυσικά επιλέγονται τυχαία από το «αλφάβητο» των φάσεων ϕ_m , $1 \leq m \leq M$. Τότε θα έχουμε:

$$x(t) = \sum_{k=1}^K s(t-T_k) \cos(2\pi f_c t + \phi_k) \quad (2.368)$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης θα υπολογίζεται από την αναμενόμενη τιμή

$$\begin{aligned} R_{xx}(t_1, t_2) &= E \{ x(t_1) x(t_2) \} = E \left\{ \sum_{p=1}^K \sum_{q=1}^K s(t-T_p) \cos(2\pi f_c t + \phi_p) s(t-T_q) \cos(2\pi f_c t + \phi_q) \right\} \\ &= \sum_{p=1}^K \sum_{q=1}^K s(t-T_p) s(t-T_q) E \left\{ \cos(2\pi f_c t + \phi_p) \cos(2\pi f_c t + \phi_q) \right\} \end{aligned} \quad (2.369)$$

Η συνάρτηση $\bar{R}_{xx}(\tau)$ δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned}\bar{R}_{xx}(\tau) &= \frac{1}{KT} \int_{-KT/2}^{KT/2} R_{xx}(t, t+\tau) dt \\ &= \frac{1}{KT} E \left\{ \sum_{p=1}^K \sum_{q=1}^K \int_{-KT/2}^{KT/2} s(t-T_p) s(t+\tau-T_q) \cos(2\pi f_c t + \phi_p) \cos(2\pi f_c (t+\tau) + \phi_q) dt \right\}\end{aligned}\quad (2.370)$$

Αν υποθέσουμε ότι $p \neq q$ έπεται ότι τα ϕ_p και ϕ_q ανήκουν σε διαφορετικές διάρκειες συμβόλων άρα είναι ανεξάρτητα οπότε

$$E \left\{ \cos(2\pi f_c t + \phi_p) \cos(2\pi f_c (t+\tau) + \phi_q) \right\} = E \left\{ \cos(2\pi f_c t + \phi_p) \right\} E \left\{ \cos(2\pi f_c (t+\tau) + \phi_q) \right\} = 0 \quad (2.371)$$

επομένως θα έχουμε:

$$\bar{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{KT} \sum_{p=1}^K \int_{-KT/2}^{KT/2} s(t-T_p) s(t+\tau-T_p) E \left\{ \cos(2\pi f_c t + \phi_p) \cos(2\pi f_c (t+\tau) + \phi_p) \right\} dt \quad (2.372)$$

Χρησιμοποιώντας τις γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες θα έχουμε:

$$\cos(2\pi f_c t + \phi_p) \cos(2\pi f_c (t+\tau) + \phi_p) = \frac{1}{2} \cos(2\pi f_c \tau) - \frac{1}{2} \cos(2\pi f_c (2t+\tau) + 2\phi_p) \quad (2.373)$$

οπότε το ολοκλήρωμα στην (2.372) θα γραφτεί:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{xx}(\tau) &= \frac{1}{2KT} \sum_{p=1}^K \cos(2\pi f_c \tau) \int_{-KT/2}^{KT/2} s(t-T_p) s(t+\tau-T_p) dt + \\ &E \left\{ \frac{1}{2KT} \sum_{p=1}^K \int_{-KT/2}^{KT/2} s(t-T_p) s(t+\tau-T_p) \cos(4\pi f_c t + 4\pi f_c \tau + \phi_p) dt \right\}\end{aligned}\quad (2.374)$$

Το ολοκλήρωμα μέσα στην αναμενόμενη τιμή είναι το ολοκλήρωμα μίας γρήγορα μεταβαλλόμενης συνάρτησης φέροντος $\cos(4\pi f_c t + \gamma)$ επί μία αργά μεταβαλλόμενη συνάρτηση που καθορίζεται από το $s(t)$. Είναι λογικό να περιμένουμε ότι το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος θα είναι μηδέν όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις. Επομένως θα έχουμε παρόμοια όπως και στην περίπτωση του PAM:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{xx}(\tau) &= \frac{1}{2KT} \sum_{p=1}^K \cos(2\pi f_c \tau) \int_{-KT/2}^{KT/2} s(t-T_p) s(t+\tau-T_p) dt = \\ &\frac{1}{2KT} \sum_{p=1}^K \cos(2\pi f_c \tau) \int_{-\infty}^{+\infty} s(t-T_p) s(t+\tau-T_p) dt = \frac{\cos(2\pi f_c \tau)}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) s(t+\tau) dt\end{aligned}\quad (2.375)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της (2.375) ως προς τ μας δίνει όπως και στην περίπτωση του PAM, την πυκνότητα ισχύος του σήματος PSK, το οποίο θα είναι

$$S_x(f) = F_\tau \{ R_{xx}(\tau) \} = \frac{1}{4T} S(f-f_c) + \frac{1}{4T} S(f+f_c) \quad (2.376)$$

Παρατηρούμε ότι το φάσμα του PSK καθορίζεται από μία παρόμοια σχέση με αυτή του φάσματος του ζωνοπερατού PAM και επομένως οι απαιτήσεις σε εύρος ζώνης είναι οι ίδιες.

3.11.5 Ολίσθηση φάσης εξαιτίας του καναλιού

Μέχρι τώρα θεωρούσαμε ότι το κανάλι μας δεν εισάγει καμία επιπλέον παραμόρφωση στο σήμα μας εκτός από θόρυβο. Δηλαδή αν εκπέμψουμε ένα σήμα $x(t)$ απλά στον δέκτη θα λάβουμε το ίδιο σήμα στο οποίο θα έχει προστεθεί ο θόρυβος $n(t)$, με άλλα λόγια θα έχουμε $r(t)=x(t)+n(t)$. Υπάρχουν

Πριν κλείσουμε θα πρέπει να αναφέρουμε μία πρακτική δυσκολία στην υλοποίηση του δέκτη του PSK και αυτό είναι η εκτίμηση της φάσης του σήματος. Οι ίδιες δυσκολίες ισχύουν και για το ζωνοπερατό PAM. Ας δούμε τι ακριβώς συμβαίνει. Ένα σήμα $\cos(2\pi f_c t)$ όταν διαδίδεται σε ένα μέσο υπόκειται (μεταξύ άλλων) σε ολίσθηση φάσης. Για παράδειγμα όταν ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται στον αέρα τότε η φάση του ολισθαίνει κατά $\Delta\phi=(2\pi/\lambda)L$ όπου L είναι το μήκος στο οποίο έχει διαδοθεί. Αν μεταδώσουμε το σήμα:

$$s_m(t) = s(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_m) \quad (2.377)$$

τότε απουσία του θορύβου στο δέκτη θα λάβουμε το σήμα

$$r(t) = s(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_m + \Delta\phi) \quad (2.378)$$

οπότε οι συντεταγμένες του διανύσματος λήψης θα είναι:

$$r_1 = \int_0^T r(t) p_1(t) dt \quad (2.379)$$

$$r_2 = \int_0^T r(t) p_2(t) dt \quad (2.380)$$

Αν αντικαταστήσουμε τις συναρτήσεις βάσης του PSK στις (2.285)-(2.286) θα λάβουμε

$$r_1 = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_s}} \int_0^T s^2(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_m + \Delta\phi) \cos(2\pi f_c t) dt \quad (2.381)$$

$$r_2 = -\sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_s}} \int_0^T s^2(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_m + \Delta\phi) \sin(2\pi f_c t) dt \quad (2.382)$$

και χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\cos(2\pi f_c t + \phi_m + \Delta\phi) = \cos(2\pi f_c t) \cos(\phi_m + \Delta\phi) - \sin(2\pi f_c t) \sin(\phi_m + \Delta\phi) \quad (2.383)$$

Αντικαθιστώντας την (2.383) στις (2.381)-(2.382) θα έχουμε:

$$r_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \cos(\phi_m + \Delta\phi) \quad (2.384)$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \sin(\phi_m + \Delta\phi) \quad (2.385)$$

Οι (2.384) και (2.385) έχουν ως αποτέλεσμα το διάνυσμα $\vec{r}$ να εμφανίζεται περιστρεμμένο κατά $\Delta\phi$ κάτι που προκύπτει αν συγκρίνουμε τις τιμές των r_1 και r_2 στην περίπτωση όπου $\Delta\phi=0$ κάτι που θα οδηγήσει σε εσφαλμένη αποκωδικοποίηση των συμβόλων ακόμα και απουσία θορύβου. Για να διορθώσουμε αυτή την κατάσταση θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε στο δέκτη τις συναρτήσεις βάσης:

$$p_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_s}} s(t) \cos(2\pi f_c t + \Delta\phi) \quad (2.386)$$

$$p_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_s}} s(t) \sin(2\pi f_c t + \Delta\phi) \quad (2.387)$$

οπότε στην περίπτωση αυτή μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι οι (2.379)-(2.380) οδηγούνε στην σωστή εκτίμηση των συνιστωσών του αρχικού διανύσματος,

$$r_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \cos \phi_m \quad (2.388)$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \sin \phi_m \quad (2.389)$$

Ωστόσο η χρήση των (2.386)-(2.387) συνεπάγεται ότι ο δέκτης έχει γνώση της ολίσθησης φάσης $\Delta\phi$ που υπόκειται το σήμα κάτι που δεν είναι τόσο απλή υπόθεση αν και υπάρχουν τυποποιημένα κυκλώματα ψηφιακής επεξεργασίας σήματος που κάνουν αυτή τη δουλειά. Στη συνέχεια θα δούμε και μία μορφή του PSK στην οποία ο δέκτης δεν χρειάζεται γνώση της ολίσθησης φάσης για να κάνει σωστή αποκωδικοποίηση συμβόλων, την διαφορική PSK, (differential PSK, DPSK).

3.12 Διαφορική διαμόρφωση φάσης.

Στην περίπτωση του DPSK, διαμορφώνουμε την πληροφορία στην διαφορά της φάσης μεταξύ δύο διαδοχικών συμβόλων και στον δέκτη να φροντίζουμε αντί να αποκωδικοποιούμε βασισμένη στην φάση του σήματος αυτή καθαυτή, να υπολογίζουμε τα σύμβολα λήψης βάση των διαφορών της φάσης. Αν η διαφορά φάσης λόγω του καναλιού $\Delta\phi$ δεν διαφέρει από σύμβολο-σε-σύμβολο (ή εν πάσι περιπτώσει δεν μεταβάλλεται γρήγορα) τότε θα απαλείφεται κατά την αφαίρεση των φάσεων από δύο διαδοχικά σύμβολα.

Ας δούμε το παραπάνω με μεγαλύτερη λεπτομέρεια. Στον πομπό το σήμα εκπομπής $x(t)$ σε δύο διαδοχικά διαστήματα συμβόλων θα είναι:

$$x(t) = s(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_a) \quad \text{για } 0 \leq t < T \quad (2.390)$$

$$x(t) = s(t-T) \cos(2\pi f_c t + \phi_b) \quad \text{για } T \leq t < 2T \quad (2.391)$$

Η πληροφορία διαμορφώνεται διαφορικά στη φάση του σήματος, δηλαδή αν θεωρήσουμε $M=4$ σύμβολα φάσης που αντιστοιχούν σε $n=\log_2 M=2$ ομάδες bit, τότε στους συνδυασμούς bit 00, 01, 10 και

11 μπορούμε να αντιστοιχήσουμε τις διαφορές φάσης $\Delta\phi_{ab}=\phi_b-\phi_a$ που είναι ίσες με 0, $\pi/2$, π , $3\pi/2$ αντίστοιχα. Φυσικά αυτή η αντιστοίχιση δεν είναι μοναδική.

Αν $0 \leq t < T$, τότε αν περάσουμε το σήμα από έναν δέκτη PSK αυτός θα μας υπολογίσει το διάνυσμα λήψης $\vec{r}_a$ που απουσία θορύβου οι συντεταγμένες του οποίου θα καθορίζονται από τις (2.386)-(2.387) οπότε:

$$\vec{r}_a = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \begin{bmatrix} \cos(\phi_a + \Delta\phi) \\ \sin(\phi_a + \Delta\phi) \end{bmatrix} \quad (2.392)$$

ενώ στην επόμενη διάρκεια συμβόλου $T \leq t < 2T$ θα υπολογίζει το εξής διάνυσμα λήψης:

$$\vec{r}_b = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \begin{bmatrix} \cos(\phi_b + \Delta\phi) \\ \sin(\phi_b + \Delta\phi) \end{bmatrix} \quad (2.393)$$

Παρουσία του θορύβου θα πρέπει να προσθέσουμε και την επίδραση του θορύβου στις συνιστώσες του διανύσματος, οπότε θα έχουμε

$$\vec{r}_a = \begin{bmatrix} r_{a1} \\ r_{a2} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \begin{bmatrix} \cos(\phi_a + \Delta\phi) \\ \sin(\phi_a + \Delta\phi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{a1} \\ n_{a2} \end{bmatrix} \quad (2.394)$$

$$\vec{r}_b = \begin{bmatrix} r_{b1} \\ r_{b2} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \begin{bmatrix} \cos(\phi_b + \Delta\phi) \\ \sin(\phi_b + \Delta\phi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{b1} \\ n_{b2} \end{bmatrix} \quad (2.395)$$

Τα n_{a1} , n_{a2} και n_{b1} , n_{b2} είναι οι συνιστώσες του θορύβου που αντιστοιχούν σε δύο διαδοχικά διαστήματα συμβόλων και δίνονται από τις σχέσεις

$$n_{a1} = \int_0^T n(t) p_1(t) dt \quad (2.396)$$

$$n_{a2} = \int_0^T n(t) p_2(t) dt \quad (2.397)$$

$$n_{b1} = \int_0^T n(t+T) p_1(t) dt \quad (2.398)$$

$$n_{b2} = \int_0^T n(t+T) p_2(t) dt \quad (2.399)$$

Είναι σχετικά απλό να δείξουμε ότι όλες αυτές οι συνιστώσες έχουν αναμενόμενη τιμή ίση με μηδέν. Για παράδειγμα:

$$E\{n_{b2}\} = \int_0^T E\{n(t+T)\} p_2(t) dt = 0 \quad (2.400)$$

εφόσον το $n(t)$ είναι AWGN με αναμενόμενη τιμή μηδέν δηλαδή $E\{n(t)\}=0$ για κάθε τιμή του t . Επίσης όλες οι συνιστώσες έχουν την ίδια διακύμανση. Για παράδειγμα

$$E\{n_{b2}^2\} = \int_0^T \int_0^T E\{n(t_1+T)n(t_2+T)\} p_2(t_2)p_2(t_1)dt_1dt_2 = \int_0^T \int_0^T R_{nn}(t_2-t_1)p_2(t_2)p_2(t_1)dt_1dt_2 \quad (2.401)$$

αντικαθιστώντας $R_{nn}(t_2-t_1)=(N_0/2)\delta(t_2-t_1)$ θα έχουμε:

$$E\{n_{b2}^2\} = \frac{N_0}{2} \int_0^T p_2^2(t)dt = \frac{N_0}{2} \quad (2.402)$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$E\{n_{a1}^2\} = E\{n_{a2}^2\} = E\{n_{b1}^2\} = E\{n_{b2}^2\} = \frac{N_0}{2} \quad (2.403)$$

Στη συνέχεια προχωράμε να δείξουμε ότι και οι τέσσερις αυτές συνιστώσες είναι στατιστικά ανεξάρτητες. Για παράδειγμα:

$$E\{n_{a1}n_{b1}\} = \int_0^T \int_0^T E\{n(t_1)n(t_2+T)\} p_2(t_2)p_2(t_1)dt_1dt_2 = \int_0^T \int_0^T R_{nn}(t_2+T-t_1)p_2(t_2)p_2(t_1)dt_1dt_2 \quad (2.404)$$

δεδομένου ότι για $0 \leq t_2 < T$ έπεται ότι $T \leq t_2+T < 2T$ και επομένως εφόσον $0 \leq t_1 < T$ θα έχουμε $0 < t_2+T-t_1 \leq T$ οπότε $R_{nn}(t_2+T-t_1) = 0$ για κάθε $0 \leq t_2 < T$ και $0 \leq t_1 < T$ οπότε:

$$E\{n_{a1}n_{b1}\} = 0 \quad (2.405)$$

Με τον ίδιο ή παρόμοιο τρόπο δείχνουμε και ότι όλες οι συνιστώσες του θορύβου είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.

Μία ακόμα παρατήρηση που εξυπηρετεί στην ανάλυση του DPSK είναι ότι εφόσον τα διανύσματα λήψης $\vec{r}_a$ και $\vec{r}_b$ είναι στις δύο διαστάσεις αντιστοιχούνται σε μιγαδικούς αριθμούς z_a και z_b σύμφωνα με την σχέση:

$$z_a = r_{a1} + jr_{a2} \quad (2.406)$$

$$z_b = r_{b1} + jr_{b2} \quad (2.407)$$

Αν αντικαταστήσουμε τις (2.394) και (2.395) τότε βλέπουμε ότι:

$$z_a = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} e^{j(\phi_a + \Delta\phi)} + N_a \quad (2.408)$$

$$z_b = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} e^{j(\phi_b + \Delta\phi)} + N_b \quad (2.409)$$

όπου οι μιγαδικές πλέον τυχαίες μεταβλητές καθορίζονται από τις σχέσεις:

$$N_a = n_{a1} + jn_{a2} \quad (2.410)$$

$$N_b = n_{b1} + jn_{b2} \quad (2.411)$$

Ο δέκτης εφόσον υπολογίσει τα διανύσματα λήψης $\vec{r}_a$ και $\vec{r}_b$ γνωρίζει και τους μιγαδικούς αριθμούς z_a και z_b σύμφωνα με την (2.408) και την (2.409). Επίσης ξέρει να υπολογίζει και το γινόμενο $z_b z_a^*$,

$$z_b z_a^* = \left(\sqrt{\frac{\epsilon_s}{2}} e^{j(\phi_b + \Delta\phi)} + N_b \right) \left(\sqrt{\frac{\epsilon_s}{2}} e^{-j(\phi_a + \Delta\phi)} + N_a^* \right) = \frac{\epsilon_s}{2} e^{j(\phi_b - \phi_a)} + \sqrt{\frac{\epsilon_s}{2}} e^{-j(\phi_a + \Delta\phi)} N_b + \sqrt{\frac{\epsilon_s}{2}} e^{j(\phi_b + \Delta\phi)} N_a^* + N_a^* N_b \quad (2.412)$$

απουσία θορύβου θα έχουμε $N_b = N_a = 0$ και

$$z_b z_a^* = \frac{\epsilon_s}{2} e^{j(\phi_b - \phi_a)} \quad (2.413)$$

οπότε το $z = (2/\epsilon_s)^{1/2} z_b z_a^*$ στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται σε ένα κύκλο με ακτίνα $(\epsilon_s/2)^{1/2}$ σχηματίζοντας με τον οριζόντιο άξονα γωνία ίση με την ζητούμενη διαφορά φάσης $\phi_b - \phi_a$. Παρουσία θορύβου το z θα απέχει από την ιδανική του τιμή. Αν ο θόρυβος έχει σχετικά μικρή τιμή, δηλαδή $|N_a|, |N_b| \ll (\epsilon_s/2)^{1/2}$ τότε έπεται το $N_a^* N_b$ είναι αμελητέο σε σχέση με τις άλλες δύο συνιστώσες θορύβου, δηλαδή:

$$z = z_1 + jz_2 = z_b z_a^* \sqrt{\frac{2}{\epsilon_s}} \cong \sqrt{\frac{\epsilon_s}{2}} e^{j(\phi_b - \phi_a)} + e^{-j(\phi_a + \Delta\phi)} N_b + e^{j(\phi_b + \Delta\phi)} N_a^* = \sqrt{\frac{\epsilon_s}{2}} e^{j(\phi_b - \phi_a)} + n_c + n_d \quad (2.414)$$

όπου έχουμε θέσει:

$$n_c = n_{c1} + jn_{c2} = e^{-j(\phi_a + \Delta\phi)} N_b \quad (2.415)$$

$$n_d = n_{d1} + jn_{d2} = e^{j(\phi_b + \Delta\phi)} N_a^* \quad (2.416)$$

το διάνυσμα λήψης που αντιστοιχεί στο z είναι απλά:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\epsilon_s}{2}} \begin{bmatrix} \cos(\phi_b - \phi_a) \\ \sin(\phi_b - \phi_a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{c1} \\ n_{c2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{d1} \\ n_{d2} \end{bmatrix} \quad (2.417)$$

Επομένως έχουμε μία περίπτωση παρόμοια με αυτή του PSK στην (2.312) μόνο που αντί της φάσης ϕ_1 του συμβόλου του PSK που εκπέμψαμε έχουμε την διαφορά φάσης $\phi_b - \phi_a$ και στην θέση των συνιστωσών του θορύβου n_1 και n_2 έχουμε το $n_{c1} = n_{c1} + n_{d1}$ και $n_{c2} = n_{c2} + n_{d2}$. Θα πρέπει φυσικά να υπολογίσουμε την στατιστική των n_{c1} και n_{c2} . Αν θέσουμε για συντομία $\theta_a = \phi_a + \Delta\phi$ και $\theta_b = \phi_b + \Delta\phi$ θα έχουμε σύμφωνα και με την (2.410):

$$n_{c1} = \text{Re} \{ e^{-j\theta_a} N_b \} = n_{b1} \cos \theta_a + n_{b2} \sin \theta_a \quad (2.418)$$

$$n_{c2} = \text{Im}\{e^{-j\theta_a} N_b\} = -n_{b1} \sin \theta_a + n_{b2} \cos \theta_a \quad (2.419)$$

$$n_{d1} = \text{Re}\{e^{j\theta_b} N_a^*\} = n_{a1} \cos \theta_b + n_{a2} \sin \theta_b \quad (2.420)$$

$$n_{d2} = \text{Im}\{e^{j\theta_b} N_a^*\} = n_{a1} \sin \theta_b - n_{a2} \cos \theta_b \quad (2.421)$$

οπότε:

$$n_{e1} = n_{b1} \cos \theta_a + n_{b2} \sin \theta_a + n_{a1} \cos \theta_b + n_{a2} \sin \theta_b \quad (2.422)$$

$$n_{e2} = -n_{b1} \sin \theta_a + n_{b2} \cos \theta_a + n_{a1} \sin \theta_b - n_{a2} \cos \theta_b \quad (2.423)$$

είναι εύκολο να δούμε ότι:

$$E\{n_{e1}\} = E\{n_{e2}\} = 0 \quad (2.424)$$

ενώ οι διακυμάνσεις υπολογίζονται ως εξής:

$$E\{n_{e1}^2\} = E\{n_{b1}^2\} \cos^2 \theta_a + E\{n_{b2}^2\} \sin^2 \theta_a + E\{n_{a1}^2\} \cos^2 \theta_b + E\{n_{a2}^2\} \sin^2 \theta_b \quad (2.425)$$

Αντικαθιστώντας την (2.403) θα έχουμε:

$$E\{n_{e1}^2\} = N_0 \quad (2.426)$$

ενώ με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε:

$$E\{n_{e2}^2\} = N_0 \quad (2.427)$$

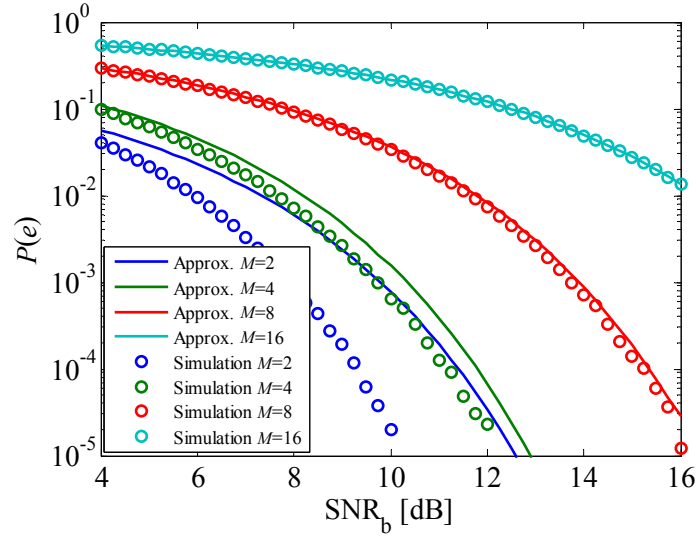
Οι μεταβλητές n_{e1}, n_{e2} είναι ανεξάρτητες αφού,

$$E\{n_{e1} n_{e2}\} = -E\{n_{b1}^2\} \cos \theta_a \sin \theta_a + E\{n_{b2}^2\} \cos \theta_a \sin \theta_a + E\{n_{a1}^2\} \cos \theta_b \sin \theta_b - E\{n_{a2}^2\} \cos \theta_b \sin \theta_b = 0 \quad (2.428)$$

Οι παραπάνω σχέσεις υποδεικνύουν ότι όπως και στην περίπτωση του PSK, οι συνιστώσες του θορύβου στις συντεταγμένες του διανύσματος λήψης είναι ανεξάρτητες με μηδενική μέση τιμή αλλά η διακύμανση του είναι ίση με N_0 στην περίπτωση του DPSK αντί για $N_0/2$ στην περίπτωση του PSK όπως καθορίζεται από τις (2.301)-(2.302). Εφόσον δηλαδή αγνοηθεί η συνιστώσα θορύβου $N_a^* N_b$ προκύπτει πως το DPSK "βλέπει" διπλάσιο θόρυβο από ότι το PSK. Επομένως αν το PSK επιτυγχάνει μία πιθανότητα σφάλματος συμβόλου $P(e)$ για μία τιμή SNR_b , το DPSK επιτυγχάνει την ίδια πιθανότητα σφάλματος συμβόλου για το διπλάσιο SNR_b εφόσον πρέπει να καταναλώσει θόρυβο διπλάσιας ισχύος. Οι σχετικές καμπύλες που σχετίζουν την πιθανότητα σφάλματος συμβόλου και bit του DPSK προκύπτουν προσεγγιστικά από τις αντίστοιχες καμπύλες του PSK στο Σχήμα 3-33 και Σχήμα 3-34 αν στο SNR του PSK προσθέσουμε 3dB.

Στο Σχήμα 3-37 έχουμε παραστήσει γραφικά την πιθανότητα σφάλματος συμβόλου $P(e)$ που λαμβάνουμε απευθείας με προσομοίωση του DPSK δέκτη (κύκλοι) και βάση της προσέγγισης που

αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο (διακεκομμένες γραμμές). Παρατηρούμε μία πολύ καλή συμφωνία για $M \geq 4$ αλλά βλέπουμε πως στην απλή περίπτωση του $M=2$ (δυαδικό DPSK) οι δύο πιθανότητες σφάλματος απέχουν πολύ.



Σχήμα 3-37: Σύγκριση των προσεγγιστικών τιμών πιθανότητας σφάλματος συμβόλων του DPSK όπως αυτές προκύπτουν από ένα σύστημα PSK με διπλάσιο SNR_b και της πιθανότητας σφάλματος που λαμβάνουμε απευθείας με προσομοίωση.

Ευτυχώς η περίπτωση $M=2$ μπορεί να λυθεί ακριβώς και να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(e)$ χωρίς να βασιστούμε στην προσέγγιση $N_a^* N_b \cong 0$. Στην περίπτωση $M=2$, θα έχουμε $\phi_b - \phi_a = 0$ ή π οπότε απουσία θορύβου θα έχουμε

$$z = \pm \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \quad (2.429)$$

οπότε παρουσία θορύβου

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \begin{bmatrix} \cos(\phi_b - \phi_a) \\ \sin(\phi_b - \phi_a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{e1} \\ n_{e2} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{e1} \\ n_{e2} \end{bmatrix} \quad (2.430)$$

Ο δέκτης υπολογίζει τις διαφορές

$$d_1^2 = \left(z_1 - \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \right)^2 + z_2^2 = \left(z_1 + \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \right)^2 + n_{e2}^2 \quad (2.431)$$

$$d_2^2 = \left(z_1 + \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \right)^2 + z_2^2 = \left(z_1 - \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \right)^2 + n_{e2}^2 \quad (2.432)$$

Ωστόσο εφόσον το n_{e^2} είναι κοινό και στις δύο αποστάσεις ο δέκτης θα μπορούσε απλά να βασίσει την αποκωδικοποίηση στις αποστάσεις στον οριζόντιο άξονα:

$$d_{o1}^2 = \left(z_1 - \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \right)^2 \quad (2.433)$$

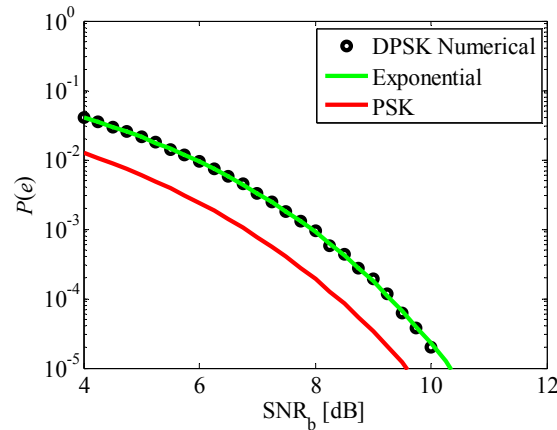
$$d_{o2}^2 = \left(z_1 + \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \right)^2 \quad (2.434)$$

Στην περίπτωση αυτή αρκεί να ασχοληθούμε μόνο με την συνιστώσα z_1 η οποία καθορίζεται απο την:

$$z_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \cos(\phi_b - \phi_a) + \text{Re} \left\{ e^{-j(\phi_a + \Delta\phi)} N_b + e^{j(\phi_b + \Delta\phi)} N_a^* + N_a^* N_b \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \right\} \quad (2.435)$$

Χωρίς απόδειξη θα παραθέσουμε το αποτέλεσμα που λαμβάνουμε:

$$P_b = P(e) = \frac{1}{2} e^{-\text{SNR}_b} \quad (2.436)$$



Σχήμα 3-38: Σύγκριση των προσεγγιστικών τιμών πιθανότητας σφάλματος bit του DPSK για $M=2$ όπως αυτές προβλέπονται από την (2.436) (πράσινη γραμμή), τις προσομοιώσεις (μαύροι κύκλοι). Παράλληλα παρατίθεται η τιμή της πιθανότητας σφάλματος για το PSK με $M=2$.

Στο Σχήμα 3-38 παραθέτουμε τις τιμές της πιθανότητας σφάλματος που υπολογίζονται από την εξίσωση (2.436) και τις αριθμητικές προσομοιώσεις. Παράλληλα παρατίθεται και η πιθανότητα σφάλματος για ένα PSK σύστημα με $M=2$. Παρατηρούμε την πολύ καλή συμφωνία μεταξύ των δύο μεθόδων υπολογισμού της πιθανότητα σφάλματος για το DPSK. Ωστόσο η πιθανότητα σφάλματος του παραμένει υψηλότερη από αυτή του PSK για ένα δεδομένο SNR_b .

3.13 Διαμόρφωση QAM

Ένας εναλλακτικός τρόπος διαμόρφωσης που χρησιμοποιείται αρκετά συχνά στην πράξη είναι η διαμόρφωση QAM. Η διαμόρφωση αυτή αποτελεί ένα είδος γενίκευσης του PSK και η βασική ιδέα είναι η εξής: Στο PSK χρησιμοποιούσαμε τις συναρτήσεις βάσης

$$p_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_s}} s(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (2.437)$$

$$p_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_s}} s(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (2.438)$$

και οι κυματομορφές εκπομπής

$$s_m(t) = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \{ \cos(\phi_m) p_1(t) + \sin(\phi_m) p_2(t) \} = s_{m1} p_1(t) + s_{m2} p_2(t) \quad (2.439)$$

αντιστοιχούσαν στα διανύσματα εκπομπής

$$\vec{s}_m = \begin{bmatrix} s_{m1} \\ s_{m2} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \begin{bmatrix} \cos \phi_m \\ \sin \phi_m \end{bmatrix} \quad (2.440)$$

τα άκρα των οποίων βρίσκονταν πάνω σε ένα κύκλο με ακτίνα $\sqrt{\mathcal{E}_s/2}$ στο δισδιάστατο χώρο. Ωστόσο ο κύκλος δεν είναι μόνη επιλογή. Θα μπορούσαμε να φτιάξουμε εναλλακτικά σήματα εκπομπής της μορφής:

$$s_m(t) = s_{m1} p_1(t) + s_{m2} p_2(t) \quad (2.441)$$

των οποίων τα άκρα να μην βρίσκονται πάνω στον κύκλο του PSK. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε ότι το M είναι ένας αριθμός της μορφής $M=K^2$ όπου K ακέραιος τότε φτιάχνουμε τα εξής σήματα εκπομπής

$$s_{pq}(t) = A_p s(t) \cos(2\pi f_c t) + A_q s(t) \sin(2\pi f_c t) = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_s}} \{ A_p p_1(t) + A_q p_2(t) \} \quad (2.442)$$

όπου

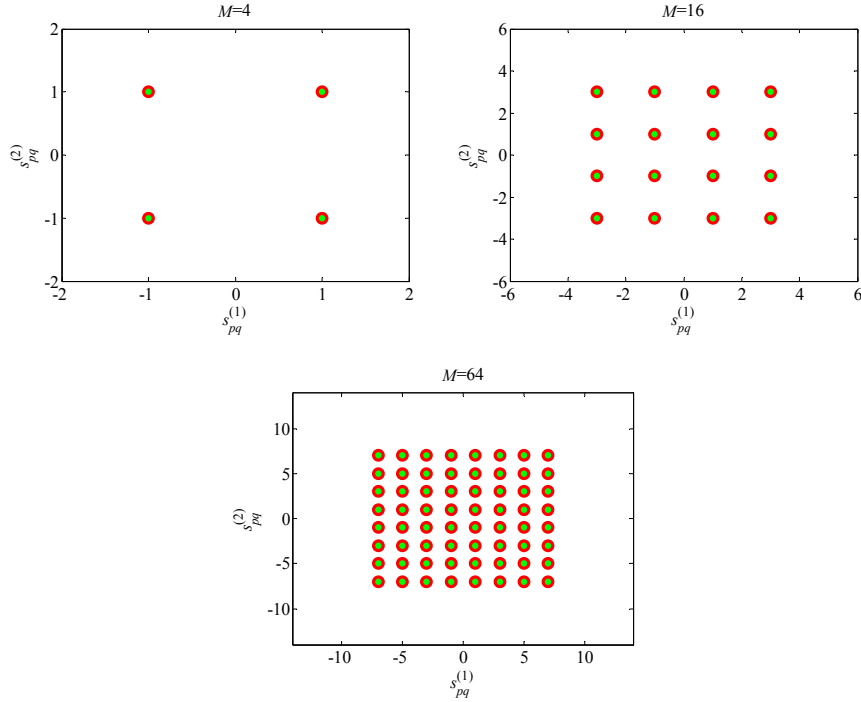
$$A_p = -\sqrt{M} + 2p - 1, \quad 1 \leq p \leq K \quad (2.443)$$

$$A_q = -\sqrt{M} + 2q - 1, \quad 1 \leq q \leq K \quad (2.444)$$

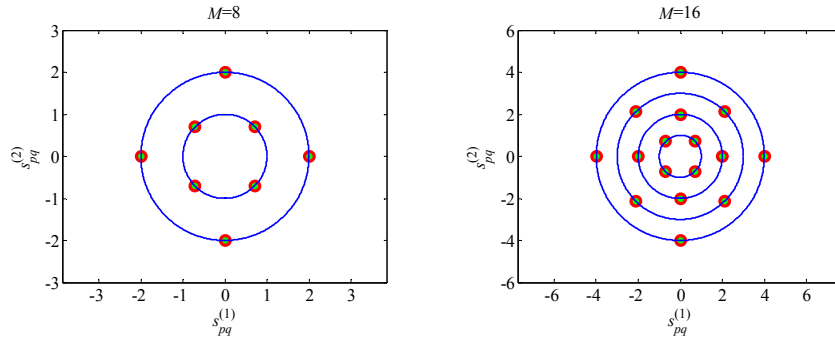
Στην περίπτωση αυτή αν θεωρήσουμε για ευκολία ότι $\mathcal{E}_s=1/2$, οι "αστερισμοί" των συμβόλων (δηλαδή τα άκρα των διανυσμάτων

$$\vec{s}_{pq} = \begin{bmatrix} s_{pq}^{(1)} \\ s_{pq}^{(2)} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} \begin{bmatrix} A_p \\ A_q \end{bmatrix} \quad (2.445)$$

φαίνονται στο Σχήμα 3-39 για διάφορες τιμές του M . Στο Σχήμα 3-40 παρουσιάζουμε έναν εναλλακτικό αστερισμό συμβόλων που προκύπτει από το συνδυασμό των αστερισμών του PAM και του PSK με $M=4$.



Σχήμα 3-39: Γεωμετρική αναπαράσταση του QAM θεωρώντας τετραγωνικό αστερισμό συμβόλων.



Σχήμα 3-40: Γεωμετρική αναπαράσταση του QAM θεωρώντας αστερισμό συμβόλων που προκύπτει από το συνδυασμό αστερισμών του PAM και του PSK.

Αν υποθέσουμε ότι όλα τα σύμβολα του QAM είναι ισοπίθανα τότε η αναμενόμενη ενέργεια του σήματος θα είναι:

$$\mathcal{E}_{av} = E \left\{ \int_0^T s_m^2(t) dt \right\} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \int_0^T s_k^2(t) dt \quad (2.446)$$

Εφόσον τα $s_k(t)$ εκφράζονται σύμφωνα με την (2.441), θα ισχύει:

$$\int_0^T s_k^2(t) dt = \int_0^T (s_{k1} p_1(t) + s_{k2} p_2(t))^2 dt = s_{k1}^2 + s_{k2}^2 \quad (2.447)$$

όπου στην τελευταία ισότητα αναπτύξαμε το τετράγωνο μέσα στο ολοκλήρωμα στην γνωστή ταυτότητα και χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η ενέργεια των p_1 και p_2 είναι ίση με 1 ενώ αυτές είναι μεταξύ τους κάθετες. Η αναμενόμενη ενέργεια γράφεται:

$$\varepsilon_{av} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (s_{k1}^2 + s_{k2}^2) \quad (2.448)$$

Στην περίπτωση του τετραγωνικού QAM θα έχουμε:

$$\varepsilon_{av} = E \left\{ \int_0^T s_{pq}^2(t) dt \right\} = \frac{1}{M} \sum_{\mu=1}^{\sqrt{M}} \sum_{\nu=1}^{\sqrt{M}} \int_0^T s_{\mu\nu}^2(t) dt = \frac{1}{M} \sum_{\mu=1}^{\sqrt{M}} \sum_{\nu=1}^{\sqrt{M}} \left\{ \left(s_{\mu\nu}^{(1)} \right)^2 + \left(s_{\mu\nu}^{(2)} \right)^2 \right\} = \frac{\varepsilon_s}{2M} \sum_{\mu=1}^{\sqrt{M}} \sum_{\nu=1}^{\sqrt{M}} \{ A_\mu^2 + A_\nu^2 \} \quad (2.449)$$

Επίσης

$$\sum_{\mu=1}^{\sqrt{M}} \sum_{\nu=1}^{\sqrt{M}} \{ A_\mu^2 + A_\nu^2 \} = \sum_{\mu=1}^{\sqrt{M}} \sum_{\nu=1}^{\sqrt{M}} A_\mu^2 + \sum_{\mu=1}^{\sqrt{M}} \sum_{\nu=1}^{\sqrt{M}} A_\nu^2 = \sqrt{M} \sum_{\mu=1}^{\sqrt{M}} A_\mu^2 + \sqrt{M} \sum_{\nu=1}^{\sqrt{M}} A_\nu^2 \quad (2.450)$$

Για να υπολογίσουμε τα αθροίσματα στην (2.450) χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι τα πλάτη A_μ είναι τα ίδια με αυτά του PAM στην (2.211) με την μόνη αλλαγή ότι το M αντικαθίσταται με το $\sqrt{M}$, άρα

$$\sum_{\nu=1}^{\sqrt{M}} A_\nu^2 = \frac{M-1}{3} \sqrt{M} \quad (2.451)$$

και

$$\varepsilon_{av} = \varepsilon_s \frac{M-1}{3} \quad (2.452)$$

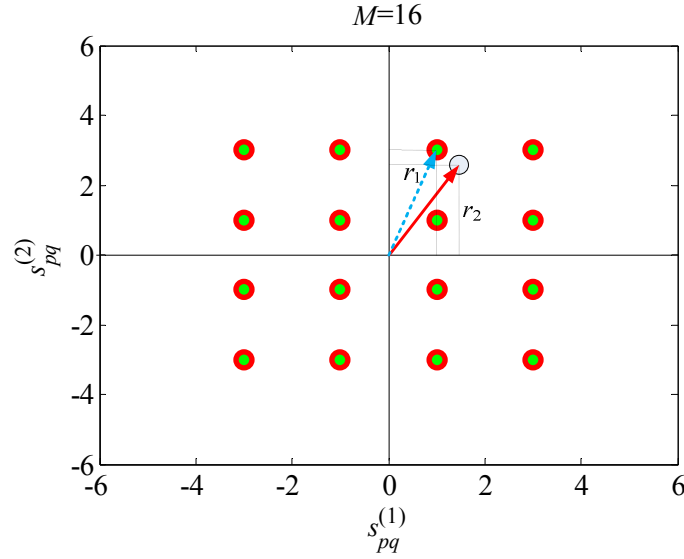
Η μέση αναμενόμενη ισχύς του σήματος θα δίνεται από την σχέση

$$P_{av} = \frac{\varepsilon_{av}}{T} = \varepsilon_s \frac{M-1}{3T} \quad (2.453)$$

3.13.1 Υπολογισμός της πιθανότητας σφάλματος

Αν και στην γενική περίπτωση ο υπολογισμός της πιθανότητας σφάλματος συμβόλου και bit είναι δύσκολος, εντούτοις στην ειδική περίπτωση του τετραγωνικού αστερισμού με $M=2^b$ όπου b μπορούμε να βρούμε μία ακριβή έκφραση. Στο Σχήμα 3-41 δείχνουμε την περίπτωση όπου το $M=16$ και ο δέκτης λαμβάνει το διάνυσμα $\vec{r}$ με συντεταγμένες τα r_1 και r_2 . Τότε για να αποφασίσει ποιό σύμβολο βρίσκεται εγγύτερα στο $\vec{r}$ μπορεί να σπάσει την διαδικασία σε δύο στάδια: Στην πρώτη βρίσκει τα σύμβολα τα οποία έχουν συντεταγμένη $s_{pq}^{(2)}$ εγγύτερα στο r_2 . Στη συνέχεια από αυτά τα

σύμβολα επιλέγει αυτό που έχει συντεταγμένη $s_{pq}^{(1)}$ εγγύτερα στο r_1 . Η διαδικασία αυτή είναι επομένως ανάλογη με αυτή του PAM, μόνο που γίνεται δύο φορές, μία για τον οριζόντιο και μία για τον κάθετο άξονα.



Σχήμα 3-41: Αποκωδικοποίηση συμβόλων στο QAM με $M=16$.

Σύμφωνα με αυτά που ξέρουμε μέχρι τώρα θα έχουμε:

$$r_1 = \int_0^T r(t) p_1(t) dt = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} A_p + n_1 \quad (2.454)$$

$$r_2 = \int_0^T r(t) p_2(t) dt = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2}} A_q + n_2 \quad (2.455)$$

όπου οι συνιστώσες θορύβου καθορίζονται από την σχέση

$$n_1 = \int_0^T n(t) p_1(t) dt \quad (2.456)$$

$$n_2 = \int_0^T n(t) p_2(t) dt \quad (2.457)$$

Είναι εύκολο να δείξουμε πως όπως και στην περίπτωση του PSK, θα έχουμε $E\{n_1^2\} = E\{n_2^2\} = N_0/2$ ενώ τα n_1 και n_2 είναι ανεξάρτητα με μέση τιμή μηδέν. Επίσης βλέπουμε πως όσο αφορά το r_1 η αναμενόμενη ενέργεια ε_1 της συνιστώσας του σήματος είναι:

$$\varepsilon_1 = \frac{\mathcal{E}_s}{2} \sum_{\mu=1}^{\sqrt{M}} A_{\mu}^2 = \frac{\mathcal{E}_s}{2} \sum_{\mu=1}^{\sqrt{M}} A_{\mu}^2 = \mathcal{E}_s \frac{M-1}{6} = \frac{\varepsilon_{av}}{2} \quad (2.458)$$

ενώ ομοίως για την αναμενόμενη ενέργεια ε_2 που αντιστοιχεί στη συνιστώσα του σήματος στο r_2 θα έχουμε πάλι:

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_{av}}{2} \quad (2.459)$$

Για να λάβει χώρα σωστά η αποκωδικοποίηση θα πρέπει και στις δύο περιπτώσεις να μην γίνει σφάλμα. Η πιθανότητα P_c να μην γίνει σφάλμα στην αποκωδικοποίηση θα είναι ίση με $(1-P_{PAM})^2$ όπου P_{PAM} είναι η πιθανότητα να γίνει σφάλμα στα επιμέρους στάδια,

$$P_{PAM} = 2 \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} Q \left(\sqrt{\frac{3\varepsilon_{av}}{(M-1)N_0}} \right) \quad (2.460)$$

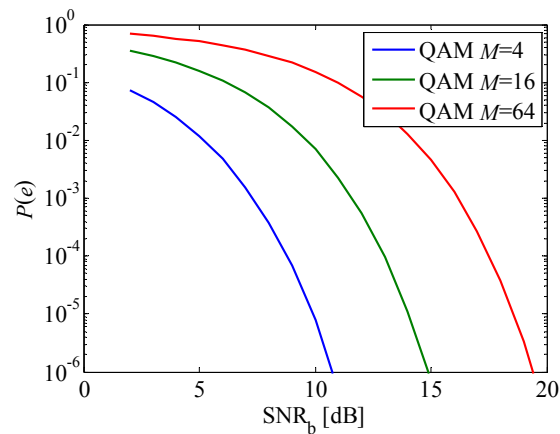
όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την έκφραση για το PAM όπου αντί του M έχουμε αντικαταστήσει το $\sqrt{M}$ ενώ για κάθε επιμέρους PAM αποκωδικοποίηση έχουμε θεωρήσει ότι έχουμε την μισή αναμενόμενη ενέργεια $\varepsilon_{av}/2$ όπως υποδεικνύουν και οι εξισώσεις (2.458)-(2.459). Βρίσκουμε επομένως ότι:

$$P_c = (1 - P_{PAM})^2 = \left[1 - 2 \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} Q \left(\sqrt{\frac{3\varepsilon_{av}}{(M-1)N_0}} \right) \right]^2 \quad (2.461)$$

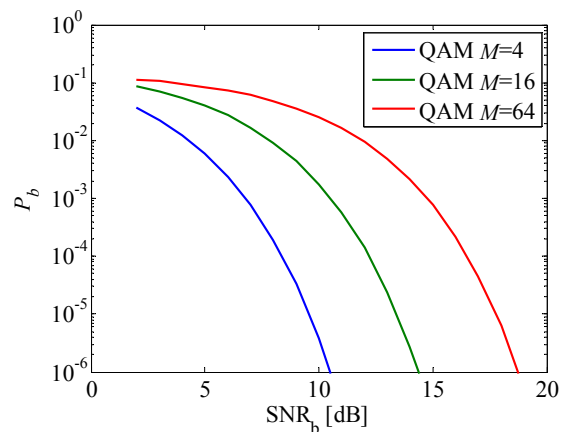
οπότε η πιθανότητα σφάλματος θα είναι:

$$P(e) = 1 - \left[1 - 2 \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} Q \left(\sqrt{\frac{3\varepsilon_{av}}{(M-1)N_0}} \right) \right]^2 = 1 - \left[1 - 2 \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} Q \left(\sqrt{\frac{3\text{SNR}_b \log_2 M}{(M-1)N_0}} \right) \right]^2 \quad (2.462)$$

Στα παρακάτω σχήματα παριστάνουμε γραφικά την πιθανότητα σφάλματος συμβόλου και την πιθανότητα σφάλματος bit $P_b \approx P(e)/\log_2(M)$ στην περίπτωση του QAM για διάφορες τιμές του M .

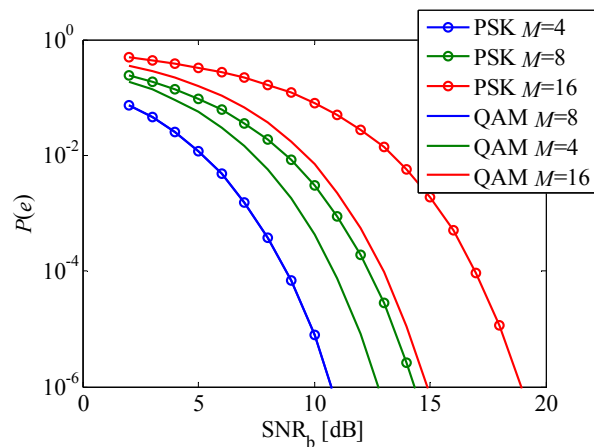


Σχήμα 3-42: Γραφική παράσταση της πιθανότητας σφάλματος συμβόλου $P(e)$ συναρτήσει του ηθίκου σήματος-προς-θόρυβο ανά-bit SNR_b στην περίπτωση του QAM



Σχήμα 3-43: Γραφική παράσταση της πιθανότητας σφάλματος συμβόλου P_b συναρτήσει του ηλιίκου σήματος-προς-θόρυβο ανά-bit SNR_b στην περίπτωση του QAM

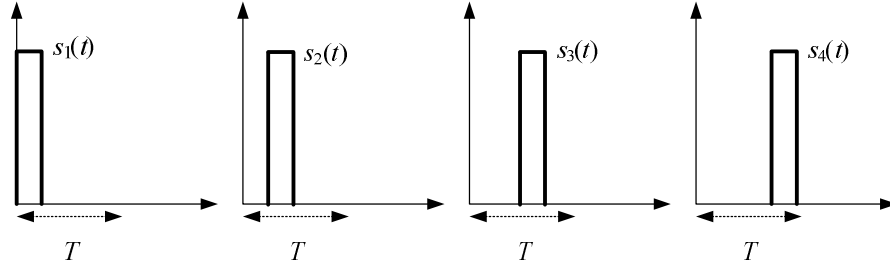
Στο Σχήμα 3-44 έχουμε παραστήσει γραφικά τις τιμές του $P(e)$ που λαμβάνουμε στην περίπτωση του QAM και του PSK. Από την σύγκριση προκύπτει ενώ για $M=4$ οι επιδόσεις των δύο συστημάτων είναι ίδιες, για μεγαλύτερο M το QAM υπερτερεί του PSK εφόσον πετυχαίνει την ίδια πιθανότητα σφάλματος συμβόλου $P(e)$ για μεγαλύτερο SNR_b .



Σχήμα 3-44: Σύγκριση της πιθανότητας σφάλματος συμβόλου $P(e)$ στην περίπτωση του QAM και του PSK.

3.14 Η διαμόρφωση PPM (και λοιποί συγκενείς).

Η διαμόρφωση PPM βασίζεται σε μία διαφορετική φιλοσοφία από ότι έχουμε δει μέχρι τώρα. Αντί να χρησιμοποιούμε τη φάση ή το πλάτος ενός σήματος, η πληροφορία αποτυπώνεται στη θέση του σήματος. Ομαδοποιούμε και πάλι τα bit μας σε ομάδες των $n=\log_2 M$ bit και στη συνέχεια σε κάθε πιθανό συνδυασμό αντιστοιχούμε και έναν παλμό σε διαφορετική θέση μέσα στη διάρκεια T του συμβόλου. Στο Σχήμα 3-45 δείχνουμε τα σήματα $s_1(t), \dots, s_4(t)$ που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την διαμόρφωση PPM στην περίπτωση $M=4$.



Σχήμα 3-45: Κυματομορφές PPM που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την μετάδοση μίας ομάδας από $M=4$ bit.

Στη γενικότερη περίπτωση ο βασικός παλμός $s(t)$ που χρησιμοποιείται δεν είναι ανάγκη να είναι ορθογώνιος αρκεί να έχει πεπερασμένη διάρκεια και να ισχύει $p(t)=0$ για $t<0$ και $t\geq T/M$. Σε κάθε περίπτωση τα σήματα $s_i(t)$ γράφονται:

$$s_i(t) = s\left(t - \frac{[i-1]T}{M}\right) \quad (2.463)$$

που στην ουσία εκφράζει μετατοπίσεις του ίδιου βασικού παλμού $s(t)$ σε διαδοχικές χρονικές στιγμές που απέχουν T/M . Τα σήματα $s_i(t)$ είναι μεταξύ τους ορθογώνια αφού ισχύει

$$\int_0^T s_m(t)s_n(t)dt = \int_0^T s\left(t - \frac{[m-1]T}{M}\right)s\left(t - \frac{[n-1]T}{M}\right)dt = 0 \quad (2.464)$$

Είναι φανερό ότι εφόσον τα M το πλήθος σήματα $s_i(t)$ είναι μεταξύ τους ορθογώνια θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε M συναρτήσεις βάσης για να παραστήσουμε τα σήματα αυτά σε έναν M -διάστατο χώρο. Οι συναρτήσεις βάσης στην περίπτωση του PPM είναι:

$$p_i(t) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_s}} s\left(t - \frac{[i-1]T}{M}\right) \quad (2.465)$$

όπου όπως και στα προηγούμενα:

$$\mathcal{E}_s = \int_0^T s^2(t)dt \quad (2.466)$$

Τα διανύσματα του PPM γράφονται ως εξής:

$$\vec{s}_1 = (\sqrt{\mathcal{E}_s}, 0, 0, \dots, 0) \quad (2.467)$$

$$\vec{s}_2 = (0, \sqrt{\mathcal{E}_s}, 0, \dots, 0) \quad (2.468)$$

...

$$\vec{s}_M = (0, 0, 0, \dots, \sqrt{\mathcal{E}_s}) \quad (2.469)$$

Όταν μεταδίδουμε την κυματομορφή $s_m(t)$ στο δέκτη λαμβάνουμε την ενθόρυβη έκδοση της $r(t)=s_m(t)+n(t)$. Ο δέκτης υπολογίζει το διάνυσμα που αντιστοιχεί στην κυματομορφή λήψης $\vec{r}$ του οποίου οι συντεταγμένες στον Μ-διάστατο χώρο θα δίνονται από την σχέση:

$$r_k = \int_0^T r(t) p_k(t) dt = \int_0^T [s_m(t) + n(t)] p_k(t) dt = \delta_{mk} \sqrt{\mathcal{E}_s} + n_k \quad (2.470)$$

όπου έχουμε ορίσει το δ_{mk} να είναι μηδέν όταν $m \neq k$ και ίσο με 1 όταν $m=k$. Για να καταλάβει πιο σύμβολο πρέπει να αποκωδικοποιηθεί, ο δέκτης θα πρέπει να υπολογίσει τις αποστάσεις:

$$d_k^2 = |\vec{r} - \vec{s}_k|^2 = |\vec{r}|^2 + |\vec{s}_k|^2 - 2\vec{s}_k \cdot \vec{r} \quad (2.471)$$

Είναι φανερό ότι τα μέτρα $|\vec{s}_k|$ των διανυσμάτων $\vec{s}_k$ είναι όλα ίσα μεταξύ τους. Επομένως ο δέκτης αντί να ελαχιστοποιήσει τις αποστάσεις d_k μπορεί απλά να μεγιστοποιήσει το εσωτερικό γινόμενο $c_k = \vec{s}_k \cdot \vec{r}$ όπως και στην περίπτωση του PSK. Είναι απλό να δούμε ότι:

$$c_k = \vec{s}_k \cdot \vec{r} = \sqrt{\mathcal{E}_s} r_k = \sqrt{\mathcal{E}_s} [\delta_{mk} \sqrt{\mathcal{E}_s} + n_k] \quad (2.472)$$

Στην περίπτωση του PPM επομένως, ο δέκτης αποκωδικοποιεί το σύμβολο για το οποίο το διάνυσμα $\vec{r}$ έχει την μεγαλύτερη συνιστώσα r_k . Αν έχουμε μεταδώσει την $s_m(t)$ τότε για να μην γίνει σφάλμα θα πρέπει να ισχύει

$$r_m > r_k \text{ για κάθε } k \neq m \quad (2.473)$$

δηλαδή:

$$r_m = \sqrt{\mathcal{E}_s} + n_m > r_k = n_k \text{ για κάθε } k \neq m \quad (2.474)$$

Οι συνιστώσες θορύβου n_i εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε πως έχουν μηδενική μέση τιμή, είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και ισχύει $E\{n^2\}=N_0/2$.

Αν ονομάσουμε Ψ το ενδεχόμενο να έχουμε σωστή αποκωδικοποίηση τότε γράφουμε:

$$P_c = P(\Psi) \quad (2.475)$$

όπου:

$$\Psi = \{r_m > r_k, \text{ για κάθε } k \neq m\} \quad (2.476)$$

Σύμφωνα με τους νόμους των δεσμευμένων πιθανοτήτων:

$$P_c = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\Psi | r_m = x) f_m(x) dx \quad (2.477)$$

όπου

$$f_m(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-(x-\sqrt{\varepsilon_s})^2 / N_0} \quad (2.478)$$

είναι η πυκνότητα πιθανότητας του r_m . Αν γνωρίζουμε το r_m τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$P(\Psi | r_m = x) = P\left(\bigcup_{k \neq m} \Psi_k(x)\right) \quad (2.479)$$

όπου με $\Psi_k(x)$ σημειώνουμε το ενδεχόμενο να έχουμε $x > r_k$. Εφόσον τα r_k είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα θα πρέπει να ισχύει

$$P\left(\bigcup_{k \neq m} \Psi_k(x)\right) = \underbrace{P(\Psi_1(x)) \cdot \dots \cdot P(\Psi_M(x))}_{k \neq m} \quad (2.480)$$

η πιθανότητα να συμβεί το $x > r_k = n_k$ δίνεται από την σχέση:

$$P(n_k < x) = 1 - P(n_k > x) = 1 - Q\left(x \sqrt{\frac{2}{N_0}}\right) \quad (2.481)$$

οπότε:

$$P(\Psi | r_m = x) = \left[1 - Q\left(x \sqrt{\frac{2}{N_0}}\right)\right]^{M-1} \quad (2.482)$$

ενώ

$$P_c = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 - Q\left(x \sqrt{\frac{2}{N_0}}\right)\right]^{M-1} e^{-(x-\sqrt{\varepsilon_s})^2 / N_0} dx \quad (2.483)$$

Αν θέσουμε $y = x\sqrt{2/N_0}$ τότε

$$P_c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - Q(y)]^{M-1} e^{-(y-\sqrt{2\varepsilon_s/N_0})^2} dy \quad (2.484)$$

και η πιθανότητα εσφαλμένης αποκωδικοποίησης συμβόλου είναι:

$$P(e) = 1 - P_c = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - Q(y)]^{M-1} e^{-(y-\sqrt{2\varepsilon_s/N_0})^2} dy \quad (2.485)$$

3.15 Σύγκριση των διαφόρων σχημάτων διαμόρφωσης

Μέχρι τώρα έχουμε αναλύσει τουλάχιστον 5 διαφορετικά συστήματα διαμόρφωσης: PAM, PSK, DPSK, PPM και QAM. Υπάρχουν βέβαια και πολλά ακόμα τα οποία δεν έχουμε αναφέρει, όπως το FSK και άλλα. Τίθεται επομένως το ερώτημα: ποιό είναι το καλύτερο σχήμα διαμόρφωσης;

Η απάντηση δεν μπορεί να απαντηθεί τόσο απλά καθώς πρέπει να ληφθεί υπόψη όχι μόνο η πιθανότητα σφάλματος για ένα δεδομένο ηηλικό σήμα-προς-θόρυβο SNR_b αλλά και το διαθέσιμο εύρος ζώνης, η πολυπλοκότητα υλοποίησης, οι απαιτήσεις σε ισχύ εκπομπής και φυσικά το κόστος υλοποίησης. Στην παρακάτω αυτή θα δώσουμε μερικά παραδείγματα σύγκρισης συστημάτων επικοινωνίας με τις διαμορφώσεις που γνωρίσαμε μέχρι τώρα.

Παράδειγμα 3.13

Να υπολογιστεί η ποινη ισχύος του εισάγει η χρήση του δυαδικού DPSK σε σχέση με το δυαδικό PSK στην περίπτωση όπου για πιθανότητες σφάλματος bit 10^{-3} , 10^{-6} και 10^{-9} .

Εφόσον πρόκειται για δυαδικά συστήματα διαμόρφωσης έπεται ότι $M=2$. Η ποινη ισχύος είναι η διαφορά στις τιμές του SNR_b σε dB των δύο συστημάτων για δεδομένη πιθανότητα σφάλματος.

Στην περίπτωση του DPSK με $M=2$ έχουμε:

$$P_b = P(e) = \frac{1}{2} e^{-SNR_{b,DPSK}} \quad (2.486)$$

από όπου προκύπτει ότι

$$SNR_{b,DPSK} = -\ln(2P_b) \quad (2.487)$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι τιμές του SNR_b στην περίπτωση του DPSK για τις διάφορες τιμές του P_b που αναφέρονται στην εκφώνηση.

Πίνακας 3-2: Το απαιτούμενο SNR_b για το DPSK

P_b	$SNR_{b,DPSK}$ (dB)
10^{-3}	7.9
10^{-6}	11.2
10^{-9}	13.0

Στην περίπτωση του PSK με $M=2$ θα έχουμε:

$$P(e) = P_b = Q(\sqrt{2SNR_b}) \quad (2.488)$$

Κατά τα γνωστά υπολογίζουμε τις τιμές του ορίσματος q της συνάρτησης $Q(q)$ για τις οποίες θα έχουμε $Q(q)=P_b$ όπου P_b οι τιμές που αναφέρονται στην εκφώνηση. Από τις τιμές αυτές και εφόσον $q_b = \sqrt{2SNR_b}$ υπολογίζουμε το SNR_b ως $SNR_b = \frac{1}{2} q_b^2$. Οι αντίστοιχες τιμές συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 3-3: Το απαιτούμενο SNR_b για το PSK

P_b	$\text{SNR}_{b,\text{PSK}} \text{ (dB)}$
10^{-3}	6.8
10^{-6}	10.5
10^{-9}	12.6

Οι ποινές ισχύος προκύπτουν από την διαφορά $\text{PP} = \text{SNR}_{b,\text{DPSK}} - \text{SNR}_{b,\text{PSK}}$ ως εξής:

Πίνακας 3-4: Οι ποινές ισχύος για τις διάφορες πιθανότητες σφάλματος

P_b	PP (dB)
10^{-3}	1.14
10^{-6}	0.64
10^{-9}	0.47

Παράδειγμα 3.14

Να βρεθεί ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης bit στην περίπτωση όπου το εύρος ζώνης του σήματος δεν μπορεί να ξεπεράσει το $B=100\text{MHz}$ ενώ η ελάχιστη πιθανότητα σφάλματος bit που πρέπει να εγγυηθεί το σύστημα είναι 10^{-6} , αν χρησιμοποιήσουμε: α) τετραδικό ζωνοπερατό PAM και β) τετραδικό PSK. Δίνεται ότι η μέση αναμενόμενη ισχύς του σήματος στο δέκτη στην διάρκεια ενός συμβόλου σε κάθε περίπτωση είναι $P_{av}=-40\text{dBm}$ και η πυκνότητα θορύβου είναι $N_0/2=10^{-15}\text{W/Hz}$.

Θα ξεκινήσουμε να υπολογίσουμε το απαιτούμενο SNR_b για κάθε τρόπο διαμόρφωσης. Για το ζωνοπερατό PAM ισχύει:

$$P_b = \frac{2(M-1)}{M \log_2 M} Q \left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M}{(M^2-1)}} (\text{SNR})_b \right) = \frac{3}{4} Q \left(\sqrt{\frac{4}{5}} (\text{SNR})_b \right) \quad (2.489)$$

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε πως το όρισμα q για το ποίο η $(3/4)Q(q)=P_b=10^{-6}$ είναι ίσο με $q=4.7$ και το αντίστοιχο SNR_b είναι $\text{SNR}_b=(5/4)q^2=27.5$ (14.4dB). Γνωρίζουμε πως στην περίπτωση του ζωνοπερατού PAM με ορθογώνιους παλμούς, το απαιτούμενο εύρος ζώνης σύμφωνα με την παράγραφο 3.10 είναι $B \approx 1/T$ όπου T η διάρκεια του συμβόλου. Η διάρκεια του συμβόλου και ο ρυθμός μετάδοσης συμβόλων συνδέονται μέσω της σχέσης $R_s=1/T$ και εφόσον για κάθε σύμβολο μεταδίδουμε $\log_2 M=2$ bit θα έχουμε ότι ο ρυθμός μετάδοσης bit θα είναι $R_b=2R_s=2/T$ από όπου προκύπτει ότι $T=R_b/2$. Το SNR_b θα καθορίζεται από την σχέση:

$$\text{SNR}_b = \frac{\varepsilon_{av}}{(\log_2 M)N_0} = \frac{P_{av}T}{N_0 \log_2 M} = \frac{P_{av}}{N_0 R_b} \quad (2.490)$$

από όπου προκύπτει ότι:

$$R_b = \frac{P_{av}}{N_0 (\text{SNR}_b)} \quad (2.491)$$

αντικαθιστώντας προκύπτει ότι στην περίπτωση του 4-αδικού PAM έχουμε $R_b=36.3\text{Mb/s}$.

Στην περίπτωση του 4-αδικού PSK θα έχουμε:

$$\frac{P_b}{\log_2 M} = \frac{P_b}{2} = P(e) = 2Q\left(\sqrt{2\text{SNR}_b}\right) - \left[Q\left(\sqrt{2\text{SNR}_b}\right)\right]^2 \quad (2.492)$$

Αν θέσουμε $Q=Q([2\text{SNR}_b]^{1/2})$ τότε θα έχουμε:

$$Q^2 - 2Q + P_b / 2 = 0 \quad (2.493)$$

Λύνοντας το παραπάνω τριώνυμο βρίσκουμε μία ρίζα η οποία είναι ίση με περίπου 2 και μία άλλη η οποία είναι ίση με $Q_2=2.5 \times 10^{-7}$. Εφόσον η συνάρτηση Q είναι πάντα μικρότερη ή ίση του 1, η πρώτη ρίζα απορρίπτεται και ψάχνουμε το όρισμα q_2 της συνάρτησης Q που είναι ίσο με $Q(q_2)=Q_2$ το οποίο είναι ίσο με $q_2 \approx 5$ ενώ το απαιτούμενο SNR_b θα καθορίζεται από την σχέση $[2\text{SNR}_b]^{1/2}=q_2$ δηλαδή $\text{SNR}_b=q_2^2/2 \approx 12.7$, δηλαδή $\approx 11\text{dB}$. Η σχέση (2.491) ισχύει και στην περίπτωση του PSK εφόσον οι απαιτήσεις του PSK και του ζωνοπερατού PAM σε εύρος ζώνης είναι ίδιες. Αντικαθιστώντας βρίσκουμε $R_b=79\text{Mb/s}$.