Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα

Διάλεξη 3η

Θωμάς Καμαλάκης

Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο Αθηνών

Οκτώβριος 2020

Περιεχόμενα

1 Ισχύς και Ενέργεια

2 Ενέργεια στο πεδίο των συχνοτήτων

3 Τυχαίες Μεταβλητές

Τι είναι η ισχύς και η ενέργεια;

- Στις επικοινωνίες μας ενδιαφέρει πόση ισχύ εκπέμπουμε
  - για λόγους οικονομικούς.
  - για λόγους ασφάλειας.
- η *ενέργεια* E ενός σήματος $x(t)$ ορίζεται ως:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{1}$$

- η *ενέργεια* $E(t_a, t_b)$ ενός σήματος $x(t)$ στο χρονικό διάστημα $[t_a, t_b]$ ορίζεται ως:

$$E(t_a, t_b) = \int_{t_a}^{t_b} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{2}$$

Ισχύς

- η *στιγμιαία ισχύς* $p(t)$ του σήματος ορίζεται ως:

$$p(t) = |x(t)|^2 \tag{3}$$

- η *μέση ισχύς* στο διάστημα $[t_a, t_b]$ ορίζεται ως:

$$P(t_a, t_b) = \frac{1}{t_b - t_a} \int_{t_a}^{t_b} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{4}$$

- η *μέση ισχύς* P του σήματος ορίζεται ως:

$$P = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{5}$$

Ένα παράδειγμα

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) \tag{6}$$

Ας υπολογίσουμε την ενέργεια στο διάστημα $[0, T]$ όπου $T = \frac{1}{f_0}$ είναι η περίοδος του σήματος.

$$E(0,T) = \int_0^T |x(t)|^2 \mathrm{d}t = A^2 \int_0^T \cos^2(2\pi f_0 t)\mathrm{d}t = \frac{A^2}{2}\int_0^T (1 + \cos(4\pi f_0 t))\mathrm{d}t = \frac{A^2 T}{2} \tag{7}$$

Η μέση ισχύς του σήματος είναι

$$P(0,T) = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{E(0,T)}{T} = \frac{A^2}{2} \tag{8}$$

Υπολογισμός με Python

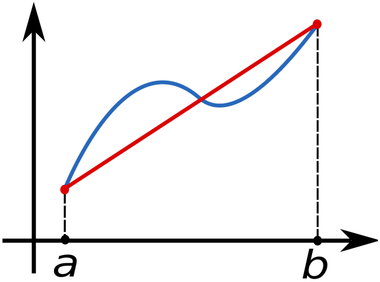
- Πρώτα κάνουμε μερικές προσθήκες στην comm_lib

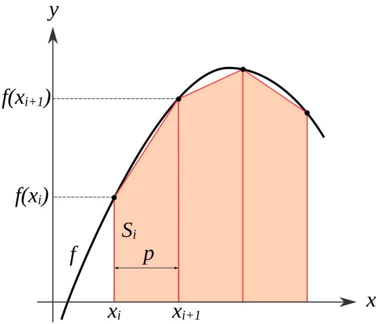
```

# Calculate energy
def energy(t, x):
    return np.trapz( np.abs(x) ** 2.0, t)

# Calculate average power
def average_power(t, x):
    ta = np.min(t)
    tb = np.max(t)
    return energy( t , x ) / ( tb - ta )

# Calculate a simple cosine sinal
def cos_signal(A, f0, t, phi = 0.0 ):
```

- προσέξτε την τελευταία συνάρτηση cos_signal.
- ορίζει ένα προαιρετικό argument το phi
- στην ουσία φτιάχνουμε το $A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$ αλλά αν δεν δώσουμε τιμή για το phi τότε θεωρεί $\phi = 0$.
- για αν δώσουμε τιμή την καλούμε π.χ. ως cos_signal(..., phi = 2)

Ο κανόνας του τραπεζίου: trapz

- προσεγγίζει ένα ολοκλήρωμα με το άθροισμα πολλών μικρών τραπεζίων





By Intégration_num_trapèzes.svg: Scalerderivative work: Cdang (talk) - Intégration_num_trapèzes.svg, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8541370

Μαθηματικά vs Python

Τα μαθηματικά λένε $A^2/2 = 0.5$

```python
import commlib as cl
import matplotlib.pyplot as plt

f0 = 50
T = 1 / f0
Tmin = -T / 2
Tmax = +T / 2
N = 1000
A = 1

t = cl.time_axis(Tmin, Tmax, N)
x = cl.cos_signal(A, f0, t)

# Plot results
plt.close('all')
plt.figure(1)
plt.xlabel('t/T')
plt.ylabel('x(t)')
plt.plot( t/T , x )

print('Power computed using trapezium rule: ', cl.average_power(t, x) )
```

```
In [8]: runfile('/home/thkam/python/telecomsystems/lecture3/powerexamples.py', wdir='/home/thkam/python/telecomsystems/lecture3')
Reloaded modules: commlib
Power computed using trapezium rule:  0.49949951925820724
```

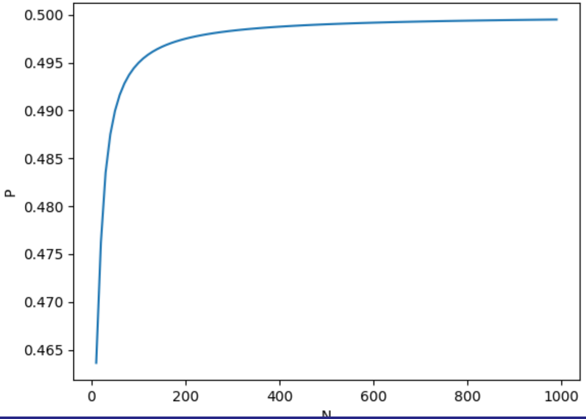
Ένα παράδειγμα σύγκλισης

Τι συμβαίνει αν μεταβάλλουμε τον αριθμό των σημείων που χρησιμοποιούμε στον κανόνα του τραπεζίου;

```
import commlib as cl
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

f0 = 50
T = 1 / f0
Tmin = -T / 2
Tmax = +T / 2
A = 1

# number of points considered in each simulation
Ns = np.arange(10, 1000, 10)
Ps = np.zeros( Ns.size )

for i, N in enumerate(Ns):
    t = cl.time_axis(Tmin, Tmax, N)
    x = cl.cos_signal(A, f0, t)
    Ps[ i ] = cl.average_power(t, x)
    print('Power computed using trapezium rule using ',
           N, ' points is : ', Ps[ i ] )

plt.close('all')
plt.plot(Ns, Ps)
plt.xlabel('N')
plt.ylabel('P')
```

Ένα παράδειγμα σύγκλισης

Τι συμβαίνει αν μεταβάλλουμε τον αριθμό των σημείων που χρησιμοποιούμε στον κανόνα του τραπεζίου;



Περιοδικά σήματα

- Ένα σήμα είναι περιοδικό όταν $x(t+T) = x(t)$.
- Το T ονομάζεται περίοδος του σήματος.
- Μπορούμε να δείξουμε ότι για ένα περιοδικό σήμα, η μέση ισχύς στην βασική περίοδο ισούται με την μέση ισχύ, δηλαδή:

$$P(0,T) = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = P \qquad (9)$$

Ισχύς περιοδικού σήματος

- Δεν είναι και τόσο δύσκολη η απόδειξη.
- Αν θέσουμε $\tau = 2nT$ όπου n ένας ακέραιος έχουμε:

$$\frac{1}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2nT}\int_{-nT}^{+nT} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2nT} 2n \int_{0}^{T} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = P(0,T) \quad (10)$$

- επομένως και:

$$P = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = P(0,T) \quad (11)$$

Το θεώρημα του Parseval

- Ενέργεια στο πεδίο των συχνοτήτων = ενέργεια στο πεδίο του χρόνου.

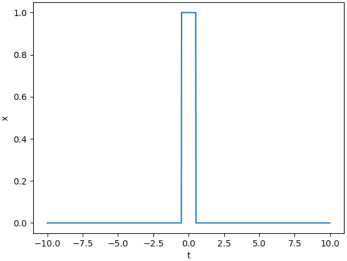
$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \mathrm{d}f \tag{12}$$

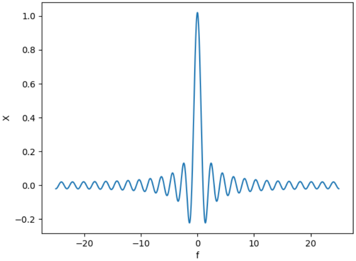
- Παραλείπουμε την απόδειξη αλλά δεν είναι και τόσο δύσκολη.

Ας το επαληθεύσουμε με λίγη Python (parseval.py):

```python
import commlib as cl
import matplotlib.pyplot as plt

T = 10
T1 = 1
N = 1000

t = cl.time_axis(-T, T, N)
x = cl.square(t, T1)
f = cl.frequency_axis(t)
X = cl.spectrum(t, x)

plt.close('all')
cl.plot_signal(t, x, xlabel = 't',
               ylabel = 'x', figure_no = 1)

cl.plot_signal(f, X, xlabel = 'f',
               ylabel = 'X', figure_no = 2)

Et = cl.energy(t, x)
Ef = cl.energy(f, X)

print('Energy in the time domain :', Et)
print('Energy in the frequency domain :', Ef)
```

Το θεώρημα του Parseval






```
Energy in the time domain : 1.02
Energy in the frequency domain : 1.0199802544230687
```

Πυκνότητα Ισχύος

- ας υποθέσουμε ότι παρατηρούμε ένα σήμα $x(t)$ μέσα στην διάρκεια $t \in [-T/2, T/2]$.
- δεν μας ενδιαφέρει τι συμβαίνει εκτός αυτού του διαστήματος.
- φτιάχνουμε δηλαδή μία «παραθυρωμένη» έκδοση του σήματος $x(t)$,

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & \text{εάν } t \in [-T/2, T/2] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{13}$$

- η ενέργεια που καταγράφουμε στο διάστημα αυτό είναι:

$$E(-T/2, T/2) = \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2 \mathrm{d}f \tag{14}$$

- όπου $X_T(f)$ είναι το φάσμα του $x_T(t)$.

Πυκνότητα Ισχύος

- Η μέση ισχύς στο διάστημα $[-T/2, T/2]$ είναι

$$P(-T/2, T/2) = \frac{1}{T} E(-T/2, T/2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} \mathrm{d}f \tag{15}$$

- Η μέση ισχύς δίνεται από την σχέση:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E(-T/2, T/2) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} \mathrm{d}f \tag{16}$$

- επομένως το $S_x(f)$ όπως ορίζεται παρακάτω είναι η πυκνότητα ισχύος. Μετριέται σε $\mathrm{W} \times \mathrm{Hz}^{-1}$.

$$S_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} \tag{17}$$

Μερικές αλλαγές στην commlib.py

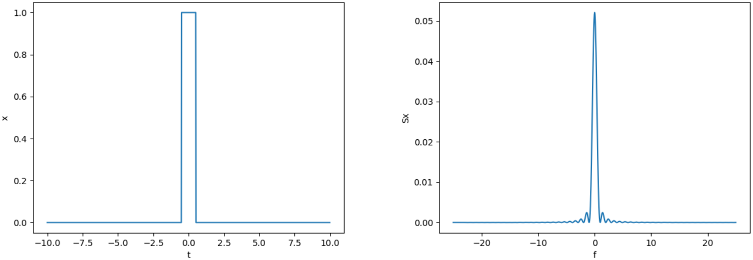
```python
# power spectral density
def power_density(t, x):
    T = np.max(t) - np.min(t)
```

- Στην περίπτωση μας περιοριζόμαστε ούτως ή άλλως σε σήματα πεπερασμένης διάρκειας.
- έχουμε έναν συγκεκριμένο άξονα t του οποίου τα όρια καθορίζονται από τον πίνακα t της numpy.
- το τι συμβαίνει έξω από το χρονικό αυτό παράθυρο δεν μας ενδιαφέρει.
- θεωρούμε ότι το σήμα εκεί είναι μηδέν.

Παράδειγμα : powerdensity.py

```python
import commlib as cl
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

T = 10
T1 = 1
N = 1000

t = cl.time_axis(-T, T, N)
x = cl.square(t, T1)
f = cl.frequency_axis(t)
Sx = cl.power_density(t, x)

plt.close('all')
cl.plot_signal(t, x, xlabel = 't',
               ylabel = 'x', figure_no = 1)

cl.plot_signal(f, Sx, xlabel = 'f',
               ylabel = 'Sx', figure_no = 2)

# calculate average power
T = np.max(t) - np.min(t)
Et = cl.energy(t, x) / T
Ef = np.trapz(Sx, f)

print('Average power :', Et)
print('Average power from power density :', Ef)
```

Παράδειγμα : powerdensity.py



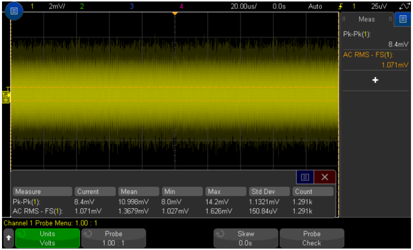

```
Reloaded modules: commlib
Average power : 0.05105105105105105
Average power from power density : 0.05105006278393736
```

Τυχαίες Μεταβλητές

- Μία *τυχαία μεταβλητή* είναι ένα μέγεθος X το οποίο δεν γνωρίζουμε με βεβαιότητα.
- Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε την πιθανότητα το X να πάρει μία τιμή x.
- Πάρτε για παράδειγμα το αποτέλεσμα που φέρνει η ρίψη ενός ζαριού.
- Αν το X είναι αυτό το αποτέλεσμα τότε οι τιμές x που μπορεί να πάρει είναι $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Αν το ζάρι είναι δίκαιο, τότε θα πρέπει αυτές οι τιμές να συμβαίνουν με πιθανότητα εμφάνισης $\frac{1}{6}$.

$$P\{x = 1\} = \cdots = P\{x = 6\} = \frac{1}{6} \tag{18}$$

Διακριτές και συνεχείς μεταβλητές



- Μία *διακριτή* τυχαία μεταβλητή λαμβάνει μόνο ένα σύνολο από διακριτές τιμές.
- Το ζάρι είναι ένα τέτοιο παράδειγμα.
- Μία *συνεχής* τυχαία μεταβλητή μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή μέσα σε ένα διάστημα $[a, b]$.
- Ο θόρυβος των καναλιών των παλμογράφων είναι ένα τέτοιο παράδειγμα.

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

- Για μία συνεχή τυχαία μεταβλητή X δεν έχει νόημα να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P\{X = x\}$. Αυτή θα τείνει στο μηδέν!
- Έχει περισσότερο νόημα να υπολογίζουμε την πιθανότητα η X να βρεθεί εντός ένος διαστήματος τιμών, $P\{a \leq X < b\}$
- Ορίζουμε την πυκνότητα πιθανότητας $f_X(x)$ ως την συνάρτηση της οποίας το ολοκλήρωμα (εμβαδό) μας δίνει αυτή την πιθανότητα.

$$P\{a \leq X < b\} = \int_a^b f_X(x)\mathrm{d}x \tag{19}$$

- Δεδομένου ότι μία μεταβλητή *πάντα* θα είναι μεταξύ του $(-\infty, +\infty)$ θα πρέπει να έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{20}$$

- θα πρέπει πάντα να έχουμε $f_X(x) \geq 0$.

Παραδείγματα

- ομοιόμορφη κατανομή:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{21}$$

- Gaussian (κανονική) κατανομή:

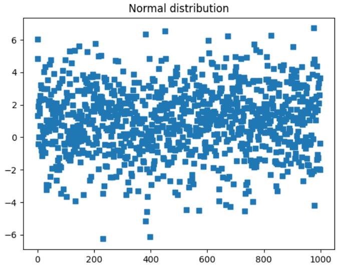
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{22}$$

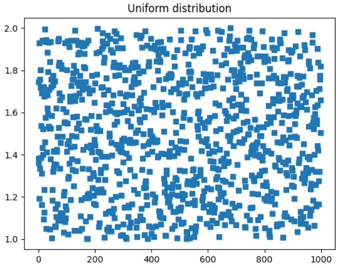
- Η numpy.random.uniform παράγει τυχαία δείγματα από ομοιόμορφη κατανομή.
- Η numpy.random.normal παράγει δείγματα από κανονική κατανομή.

Ένα παράδειγμα Python: randomsamples.py

```
from numpy.random import normal, uniform
import matplotlib.pyplot as plt

save_path = '/home/thkam/Documents/Presentations/TelecomSystems/lecture3/'
mu = 1
sigma = 2
a = 1
b = 2

Nsamples = 1000

# normal distribution
xn = normal(mu, sigma, Nsamples)

# uniform distribution
xu = uniform(a, b, Nsamples)

# Plot samples
plt.close('all')

plt.figure(1)
plt.plot(xn,'s')
plt.title('Normal distribution')
plt.savefig(save_path + 'normalsamples.png')

plt.figure(2)
plt.plot(xu,'s')
plt.title('Uniform distribution')
plt.savefig(save_path + 'uniformsamples.png')
```

Ένα παράδειγμα Python: randomsamples.py





Αναμενόμενες τιμές

- Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία τυχαία μεταβλητή την X.
- Υπολογίζουμε πολλά δείγματα της $\{x_1, \cdots, x_N\}$
- Πολλές φορές είναι χρήσιμο να υπολογίζουμε το μέσο όρο των δειγμάτων αυτών:

$$\frac{x_1 + \cdots + x_N}{N} \tag{23}$$

- Επίσης μπορούμε να υπολογίσουμε το μέσο μίας συνάρτησης πάνω στην τυχαία μεταβλητή $g(X)$:

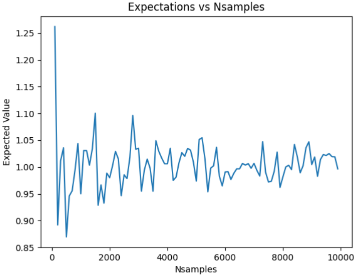
$$\frac{g(x_1) + \cdots + g(x_N)}{N} \tag{24}$$

- Είναι διαισθητικά εμφανές ότι όσο αυξάνουμε το N τόσο πιο καλό υπολογισμό των παραπάνω μέσων τιμών θα έχουμε!

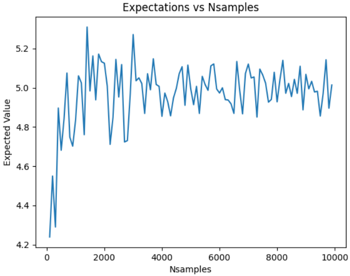
Αναμενόμενες τιμές: expectedvalues.py

```
from numpy.random import normal
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

save_path = '/home/thkam/Documents/Presentations/TelecomSystems/lecture3/'
mu = 1
sigma = 2

Nsamples = np.arange(100, 10000, 100)
expectations = np.zeros( Nsamples.size )

func = lambda x : x ** 2.0

# iterate over different N values
for i, N in enumerate(Nsamples):
    xn = normal(mu, sigma, N)
    expectations[i] = np.mean( func(xn) )


# Plot expectations
plt.close('all')

plt.figure(1)
plt.plot(Nsamples, expectations)
plt.title('Expectations vs Nsamples')
plt.xlabel('Nsamples')
plt.ylabel('Expected Value')
plt.savefig(save_path + 'convsquare.png')
```

Αναμενόμενες τιμές: expectedvalues.py



(α′) $g(x) = x$



(β′) $g(x) = x^2$

Σημαντικές παράμετροι τυχαίων μεταβλητών

- Μέση τιμή

$$\mu_X = \mathbb{E}\left\{X\right\} \tag{25}$$

- Διακύμανση

$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}\left\{(X - \mu_X)^2\right\} \tag{26}$$

- Τυπική απόκλιση

$$\sigma_X = \left(\mathbb{E}\left\{(X - \mu_X)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{27}$$

Υπολογισμός αναμενόμενων τιμών

- Αν ξέρουμε την πυκνότητα πιθανότητας $f_X(x)$ τότε

$$\mu_X = \mathbb{E}\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) \mathrm{d}x \tag{28}$$

- Παράδειγμα: Για την ομοιόμορφη κατανομή έχουμε:

$$\mathbb{E}\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \int_a^b x \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{b+a}{2} \tag{29}$$

Υπολογισμός αναμενόμενων τιμών

- Παράδειγμα: Για την ομοιόμορφη κατανομή έχουμε:

$$\mathbb{E}\left\{X^2\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}\right) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} \tag{30}$$

Υπολογισμός αναμενόμενων τιμών

- Παράδειγμα: Για την ομοιόμορφη κατανομή έχουμε:

$$\mathbb{E}\left\{X^2\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} \quad (31)$$

$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}\left\{(X-\mu_X)^2\right\} = \mathbb{E}\left\{X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2\right\} = \mathbb{E}\left\{X^2\right\} - 2\mu_X\,\mathbb{E}\left\{X\right\} + \mu_X^2 = \mathbb{E}\left\{X^2\right\} - \mu_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (32)$$

Υπολογισμός αναμενόμενων τιμών

- Για την κανονική κατανομή έχουμε:

$$\mu_X = \mathbb{E}\left\{X\right\} = \mu \tag{33}$$

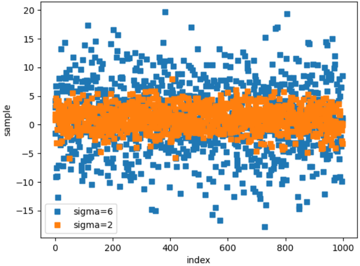
$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}\left\{\left(X - \mu_X\right)^2\right\} = \sigma^2 \tag{34}$$

- Παραλείπουμε εδώ την απόδειξη (δεν είναι και πολύ δύσκολη όμως).

Η σημασία του σ_X^2

```python
from numpy.random import normal
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

save_path = '/home/thkam/Documents/Presentations/TelecomSystems/lecture3/'
mu = 1
sigma1 = 2
sigma2 = 6
Nsamples = 1000

xn1 = normal(mu, sigma1, Nsamples)
xn2 = normal(mu, sigma2, Nsamples)

plt.close('all')

plt.figure(1)
plt.plot(xn2,'s', label = 'sigma=6')
plt.plot(xn1,'s', label = 'sigma=2')

plt.xlabel('index')
plt.ylabel('sample')
plt.legend()
plt.savefig(save_path + 'demostd.png')
```

Η σημασία του σ_X^2



- Όσο πιο μεγάλο είναι το σ_X τόσο πιο έντονες είναι οι διακυμάνσεις των δειγμάτων.

Αθροιστική πυκνότητα πιθανότητας

- Η αθροιστική πυκνότητα πιθανότητας $F_X(\gamma)$ θα δούμε ότι είναι αρκετά χρήσιμη στις επικοινωνίες.
- Ορίζεται ως η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να είνα μικρότερη ή ίση από μία τιμή γ.
- $F_X(\gamma) = \Pr\{X \leq \gamma\}$.
- Για την ομοίομορφη κατανομή:

$$F(\gamma) = \Pr\{X \leq \gamma\} = \int_{-\infty}^{\gamma} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{\gamma} f_X(x)\mathrm{d}x = \frac{\gamma - a}{b - a} \tag{35}$$

- Η παραπάνω σχέση ισχύει όταν $a \leq \gamma \leq b$.

Αθροιστική πυκνότητα πιθανότητας

- Στην περίπτωση της κανονικής κατανομής, δεν μπορούμε να δώσουμε μία απλή σχέση για την $F_X(\gamma)$.
- Εκφράζουμε όμως την $F_X(\gamma)$ μέσω μίας συνάρτησης την οποία υπολογίζουμε με την βοήθεια υπολογιστή.
- Αν ορίσουμε την $Q(x)$ ως:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \mathrm{dy} \tag{36}$$

- τότε έχουμε:

$$F_X(\gamma) = 1 - Q\left(\frac{\gamma - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \tag{37}$$