

Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα

Διάλεξη 7η

Θωμάς Καμαλάκης

Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο Αθηνών

Οκτώβριος 2020

Περιεχόμενα

1 Μετάδοση σε υψηλές συχνότητες

2 Διαμόρφωση Φάσης

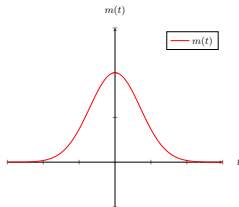
Μετάδοση σε υψηλότερες συχνότητες

- Η φασματική πυκνότητα του PAM είδαμε ότι δίνεται από τη σχέση

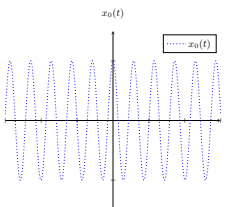
$$S_X(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_S} |P(f)|^2$$

- Δεδομένου ότι ο παλμός $p(t)$ έχει το φάσμα του $P(f)$ συγκεντρωμένο γύρω από το $f = 0$ έπεται ότι μεταδίδουμε σε χαμηλές συχνότητες, στη βασική ζώνη.
- Πολλές φορές όμως πρέπει να μεταδώσουμε το σήμα σε υψηλότερες συχνότητες, π.χ. γύρω από τα 2.4GHz στην περίπτωση του WiFi.
- Τι κάνουμε τότε;

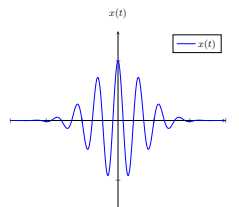
Μίξη



(α') Αρχικό σήμα



(β') Φέρον



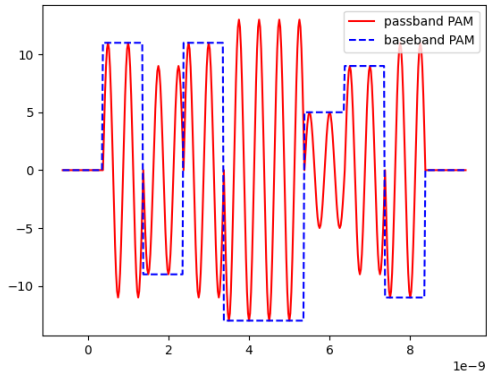
(γ') Διαμορφωμένο σήμα

Σχήμα: Σήματα που εμπλέκονται στην διαμόρφωση κατά πλάτος.

Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κυματομορφές - pampassband.py

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import commlib as cl
3 import numpy as np
4
5 # Parameters
6 TS = 1e-9
7 samples_per_symbol = 40
8 tguard = 1 * TS
9 f0 = 1 / TS
10 N0 = 1e-10
11 B = 2e9
12 f0 = 2e9
13 tinitial = 3 / f0 / 4
14
15 # system transfer function
16 H = lambda f : np.exp(-f**2.0 / f0 ** 2.0 / 2)
17
18 # Signal constellation
19 c = cl.pam_constellation(16, title = '16-PAM')
20
21 # Plot PAM constellation
22 plt.close('all')
23 c.plot()
24 c.plot_map()
25
26 # set bits to be transmitted
27 bits = cl.random_bits(32)
28
29 # build input waveform and plot
30 x = cl.digital_signal(TS = TS, samples_per_symbol
31                      = samples_per_symbol,
32                      tinitial = tinitial, tguard
33                      = tguard, constellation = c,
34                      fcarrier = f0)
35 x0 = cl.digital_signal(TS = TS,
36                      samples_per_symbol = samples_per_symbol,
37                      tinitial = tinitial, tguard
38                      = tguard, constellation = c,
39                      fcarrier = 0)
40
41 x.modulate_from_bits( bits, constellation = c )
42 x0.modulate_from_bits( bits, constellation = c )
43
44 plt.close('all')
45 plt.figure(1)
46 plt.plot(x.t, x.samples, 'r', label = 'passband
47          PAM')
48 plt.plot(x0.t, x0.samples, 'b--', label = '
49          baseband PAM')
50 plt.legend()
```



Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο Αθηνών

Μαθηματικά abracadabra

- Πριν προχωρήσουμε ας εξετάσουμε λίγο καλύτερα τι κάναμε πριν
- Όταν έχουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)G(t)dt$$

- όπου η $G(t)$ μεταβάλλεται πολύ γρήγορα και είναι περιοδική με περίοδο T με μέση τιμή μηδέν.
- Αν το διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι μικρό και $\beta - \alpha = T$, θα έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)G(t)dt \cong f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \int_{\alpha}^{\beta} G(t)dt \cong 0$$

Μαθηματικά abracadabra

- Ένα μεγαλύτερο διάστημα ολοκλήρωσης το σπάμε σε επιμέρους περιόδους.
- π.χ. ας θέσουμε $\alpha = -nT$ και $\beta = nT$.
- Τότε:

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a} \int_{\alpha}^{\beta} f(t)G(t)dt &= \frac{1}{2nT} \int_{-nT}^{nT} f(t)G(t)dt = \\ \frac{1}{2nT} \sum_{k=-n}^{n-1} \int_{(k-1)T}^{kT} f(t)G(t)dt &\cong \frac{1}{2nT} \sum_{k=-n}^{n-1} f(t_n) \int_{(k-1)T}^{kT} G(t)dt \cong 0\end{aligned}$$

- ο μέσος όρος του γινομένου μίας γρήγορης περιοδικής συνάρτησης $G(t)$ που έχει μέση τιμή μηδέν επί μία άλλη αργή συνάρτηση $f(t)$ είναι μηδέν όταν το διάστημα που λαμβάνουμε τον μέσο όρο είναι πολύ μεγάλο.

Μαθηματικά abracadabra

- Μερικές χρήσιμες προσεγγίσεις όταν $\beta - \alpha \gg f_0^{-1}$:

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} g(t) \cos^2(2\pi f_0 t) dt &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} g(t) (\cos(4\pi f_0 t) + 1) dt = \\ &\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} g(t) \cos(4\pi f_0 t) dt \cong \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt \\ \int_{\alpha}^{\beta} g(t) \sin^2(2\pi f_0 t) dt &\cong \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt \\ \int_{\alpha}^{\beta} g(t) \sin(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 t) dt &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} g(t) \sin(4\pi f_0 t) dt \cong 0\end{aligned}$$

abracadabra.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

Tmax = 100
T = 10
f0 = 0.5

t = np.arange(0, Tmax, 0.01)
g = np.exp( -(t - Tmax/2.0) ** 2.0 / T ** 2.0)
c = np.cos(2 * np.pi * f0 * t )

plt.close('all')
plt.figure(1)
plt.plot(t,g)

plt.figure(2)
plt.plot(t,c)

plt.figure(3)
plt.plot(t, g * c )

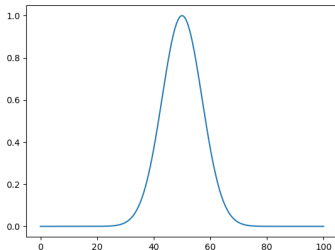
plt.figure(4)
plt.plot(t, g * c **2.0 )

I1 = np.trapz( g, t )
I2 = np.trapz( g * c , t )
I3 = np.trapz( g * c ** 2.0, t )

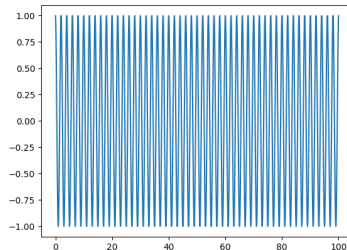
print('Pulse integral : %e' % I1)
print('Pulse times carrier integral : %e' % I2)
print('Pulse times carrier squared integral : %e' % I3)
```



abracadabra.py

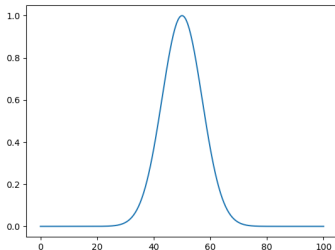


$(\alpha') g(t)$

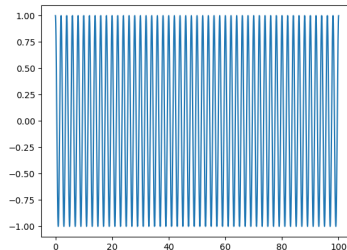


$(\beta') \cos(2\pi f_0 t)$

abracadabra.py

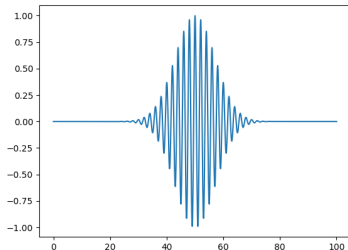


$(\alpha') g(t)$

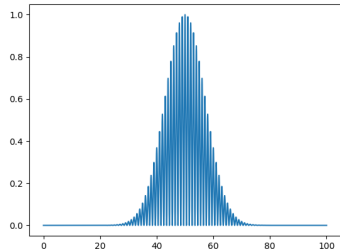


$(\beta') \cos(2\pi f_0 t)$

abracadabra.py



$$(\alpha') g(t) \cos(2\pi f_0 t)$$



$$(\beta') g(t) \cos^2(2\pi f_0 t)$$

```
Pulse integral : 1.772454e+01  
Pulse times carrier integral : -2.707716e-12  
Pulse times carrier squared integral : 8.862269e+00
```

Φασματική πυκνότητα ισχύος

- Η φασματική πυκνότητα ισχύος είναι ο μετασχηματισμός Fourier του

$$\bar{R}_{YY}(\tau) \cong \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \bar{R}_{XX}(\tau)$$

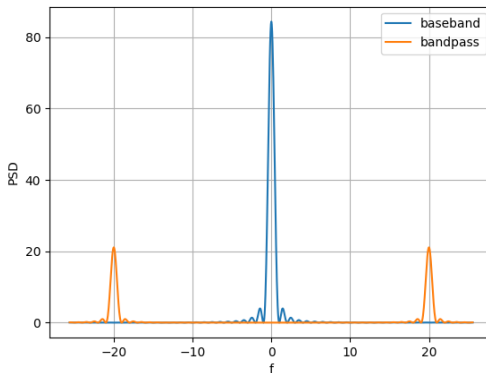
- Επομένως θα έχουμε:

$$S_{YY}(f) = \frac{1}{4} S_{XX}(f - f_0) + \frac{1}{4} S_{XX}(f + f_0)$$

Φασματική πυκνότητα ισχύος - pamspectra.py

```
1 import commlib as cl
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 # Time axis
6 T = 10
7 TS = 1.0
8 N = 1024
9 f0 = 20
10
11 # time axis
12 t = cl.time_axis(-T, T, N)
13
14 # PAM constellation
15 M = 16
16 c = cl.pam_constellation(M)
17 Pavg = c.avg_power()
18
19 # PAM pulse shape
20 p = cl.square_pulse(t, TS)
21 p.calc_spectrum()
22
23 f, P = p.get_spectrum()
24 # baseband PAM power spectral density
25 SXX = Pavg / TS * np.abs(P) ** 2.0
26
27 # Plot psd
28 plt.close('all')
29 plt.figure(1)
30 plt.plot(f, SXX, label = 'baseband')
31
32 # SXX callable
33 SXXc = lambda freq : np.interp(freq, f, SXX)
34
35 # PAM bandpass psd
36 SYY = ( SXXc(f-f0) + SXXc(f+f0) )/4.0
37 plt.plot(f, SYY, label = 'bandpass')
38 plt.grid()
39 plt.xlabel('f')
40 plt.ylabel('PSD')
41 plt.legend()
```

Φασματική πυκνότητα ισχύος - ramspectra.py



Φασματική απόδοση

- Είχαμε ορίσει την φασματική απόδοση ως τον αριθμό των συμβόλων R_S που μεταδίδουμε προς το εύρος ζώνης B που καταλαμβάνουμε, $e_s = R_S/B$.
- Στην περίπτωση του PAM βασικής ζώνης με τετραγωνικούς παλμούς, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι χρησιμοποιούσαμε τις συχνότητες από $f = 0$ έως $f = 1/T_S$ και είχαμε δει ότι $e_s \cong 1$ symbols/s/Hz.
- Στην περίπτωση όμως του ζωνοπερατού PAM θα χρησιμοποιούμε τις συχνότητες από $f = f_0 - 1/T_S$ έως $f = f_0 + 1/T_S$ οπότε το εύρος ζώνης είναι προσεγγιστικά $B = 2/T_S$.
- Η φασματική απόδοση σε αυτή την περίπτωση είναι επομένως $e_s \cong 2$ symbols/s/Hz.
- Μπορούμε να μετρήσουμε την φασματική απόδοση e_b ως προς τον ρυθμό των bits που μεταδίδουμε $R_b = R_S \log_2 M$.
- Οπότε στην περίπτωση του PAM βασικής ζώνης θα έχουμε $e_b \cong \log_2 M$ bit/s/Hz ενώ στο ζωνοπερατό PAM θα έχουμε $e_b \cong \frac{1}{2} \log_2 M$ bit/s/Hz

Ισχύς σήματος

- Η ισχύς του σήματος υπολογίζεται εύκολα από την φασματική πυκνότητα ισχύος:

$$S_{YY}(f) = \frac{1}{4}S_{XX}(f - f_0) + \frac{1}{4}S_{XX}(f + f_0)$$

$$\begin{aligned} P_t &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{YY}(f)df = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f - f_0)df + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f + f_0)df \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f)df + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f)df = \beta^2 \frac{M^2 - 1}{6} P_{\max} \end{aligned}$$

- Δηλαδή εξαιτίας του φέροντος $\cos(2\pi f_0 t)$ έχουμε τώρα την μισή ισχύ εκπομπής.

Πηλίο σήμα-προς-θόρυβο

- όπως και στην περίπτωση του ζωνοπερατού PAM έτσι και εδώ θα ορίσουμε το πηλίο σήμα-προς-θόρυβο SNR_s συμβόλου στο δέκτη ως εξής:

$$\text{SNR}_s = \frac{P_r T_s}{N_0} = \frac{L P_t T_s}{N_0} = \beta^2 L T_s \frac{M^2 - 1}{6 N_0}$$

- Σε ότι αφορά το πηλίο σήμα-προς-θόρυβο *bit* έχουμε το εξής:

$$\text{SNR}_b = \frac{P_r T_s}{N_0} = \frac{L P_t T_s}{N_0} = \beta^2 L T_s \frac{M^2 - 1}{6 N_0 \log_2 M}$$

Ο δέκτης του ζωνοπερατού PAM

- Σε σχέση με το PAM βασικής ζώνης, η διαφορά είναι ότι πρέπει με κάποιον τρόπο να αφαιρέσουμε το φέρον $\cos(2\pi f_0 t)$.
- Ο τρόπος για να το κάνουμε αυτό είναι να πολλαπλασιάσουμε το σήμα στο δέκτη εκ νέου με $\cos(2\pi f_0 t)$.
- Στο δέκτη το σήμα θα γραφτεί ως εξής:

$$z(t) = \sqrt{L} \sum_q a_q p(t - qT_s) \cos(2\pi f_0 t) + n(t)$$

- πολλαπλασιάζοντας με $\cos(2\pi f_0 t)$ θα έχουμε:

$$z(t) \cos(2\pi f_0 t) = \sqrt{L} \sum_q a_q p(t - qT_s) \cos^2(2\pi f_0 t) + n(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο Αθηνών

Σας θυμίζει τίποτα;

- Στο PAM βασικής ζώνης:

- το σήμα στην έξοδο του δέκτη είναι $a_k \sqrt{L} + n_k$
- Η ισχύς των συνιστωσών θορύβου είναι $\sigma^2 = N_0/(2T_S)$

$$P_e = 2 \frac{M-1}{M} Q \left(\frac{\beta \sqrt{L}}{\sigma} \right)$$

- Στο ζωνοπερατό PAM:

- το σήμα στην έξοδο του δέκτη είναι $a_k \sqrt{L'} + n_k$ όπου $\sqrt{L'} = \sqrt{L}/2$.
- Η ισχύς των συνιστωσών θορύβου είναι $\sigma'^2 = N_0/(4T_S) = \sigma^2/2$

$$P_e = 2 \frac{M-1}{M} Q \left(\frac{\beta \sqrt{L'}}{\sigma'} \right) = 2 \frac{M-1}{M} Q \left(\frac{\beta \sqrt{L}}{2\sigma'} \right)$$

- $$\rho^2_I \quad \rho^2_{IT} \quad \text{6SNB} \quad \text{6SNB} \cdot \log M$$

10. $\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = -0.5$ (base 2)

- $$M = 1 - (6\text{SNR} \cdot \log M)$$

- Είναι ίδιες οι εξισώσεις με το DDM βασικής ζώνης αλλά προσοχή! το SNP είναι

- $$\text{SNR} = \frac{P_r T_s}{LP_t T_s} = \beta^2 L T_s \quad M^2 - 1 \quad (1)$$

Διαμόρφωση Φάσης

- Δεν είμαστε αναγκασμένοι να αποτυπώνουμε την πληροφορία στο πλάτος μόνο.
- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την φάση του σήματος.
- Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για ψηφιακή διαμόρφωση φάσης - phase shift keying (PSK).
- Στην διάρκεια ενός συμβόλου η κυματομορφή PSK είναι

$$x(t) = p(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

- Διακριτές τιμές της φάσης $\phi = \Phi_m$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αποτυπώσουν τα διαφορετικά σύμβολα.
- Η κυματομορφή PSK μπορεί να γραφεί ως:

$$x(t) = \sum_q p(t - qT_s) \cos(2\pi f_0 t + \phi_q)$$

- όπου τα ϕ_q μπορεί να είναι ένα από τα πιθανά Φ_m για $1 \leq m \leq M$.

Αναπαράσταση των συμβόλων

- Μπορούμε να γράψουμε για $(k - 1)T_s \leq t \leq kT_s$:

$$\begin{aligned}x(t) &= Ap(t - kT_s) \cos(2\pi f_0 t + \phi_k) = \\&Ap(t - kT_s) \cos(2\pi f_0 t) \cos(\phi_k) - Ap(t - kT_s) \sin(2\pi f_0 t) \sin(\phi_k)\end{aligned}$$

- Ας θεωρήσουμε αρχικά τις συναρτήσεις

$$p_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(2\pi f_0 t)$$

$$p_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin(2\pi f_0 t)$$

- Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\int_0^{T_s} p_1^2(t) dt = \frac{2}{T_s} \int_0^{T_s} \cos^2(2\pi f_0 t) dt \cong 1$$

Αναπαράσταση των συμβόλων

- Με τον ίδιο τρόπο:

$$\int_0^{T_s} p_2^2(t) dt = \frac{2}{T_s} \int_0^{T_s} \sin^2(2\pi f_0 t) dt \cong 1$$

- Επίσης:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_s} p_1(t) p_2(t) dt &= - \int_0^{T_s} \cos(2\pi t_0 t) \sin(2\pi f_0 t) dt = \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^{T_s} \sin(4\pi f_0 t) dt \cong 0 \quad (2) \end{aligned}$$

- Ορίζουμε το $\langle f, g \rangle = \int_0^{T_s} f(t) g(t) dt$

Εσωτερικό γινόμενο

- Το $\langle f, g \rangle$ το ονομάζουμε *εσωτερικό γινόμενο* των συναρτήσεων f και g .
- Έχει πολλές κοινές ιδιότητες με το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων, $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
- Για τις δύο συναρτήσεις που είδαμε πριν:

$$\langle p_1, p_2 \rangle = 0$$

$$\langle p_1, p_1 \rangle = \langle p_2, p_2 \rangle = 1$$

- Θυμίζει λίγο τα μοναδιαία διανύσματα: $\hat{x} = (1, 0)$ και $\hat{y} = (0, 1)$.

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = 0$$

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = 1$$

Εσωτερικό γινόμενο

- Αν $p(t) = (2/T_s)^{\frac{1}{2}}$ για $0 \leq t \leq T_s$ τότε μπορούμε να θέσουμε το πλάτος $A = \sqrt{T_s/2}$ οπότε:

$$x(t) = \cos(\phi_k)p_1(t) + \sin(\phi_k)p_2(t)$$

- όταν έχουμε ένα διάνυσμα $\hat{\gamma} = \gamma_x \hat{x} + \gamma_y \hat{y}$ τότε οι συντεταγμένες του $\hat{\gamma}$ στον δυσδιάστατο χώρο είναι τα γ_x και γ_y .
- με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να σκεφτόμαστε ότι οι συντεταγμένες του $x(t)$ είναι τα $x_1 = \cos(\phi_k)$ και $x_2 = \sin(\phi_k)$.
- $x_1^2 + x_2^2 = 1$ οπότε τα σύμβολα του PSK αναπαρίστανται με σημεία πάνω σε έναν κύκλο.
- Μπορούμε να επιλέξουμε τις φάσεις ϕ_k από το σύνολο $\Phi_m = 2\pi(m-1)/M$.

Το μιγαδικό επίπεδο

- Δεδομένου ότι έχουμε να κάνουμε με δύο διαστάσεις θα μπορούσαμε να παραστήσουμε τα σύμβολα και στο μιγαδικό επίπεδο.
- Έτσι κάθε σύμβολο αναπαρίσταται με τον μιγαδικό αριθμό $z = x_1 + jx_2$ όπου $j = \sqrt{-1}$.
- Στην περίπτωση του PSK θα έχουμε:

$$z_m = \cos \Phi_m + j \sin \Phi_m = \exp(j\Phi_m)$$

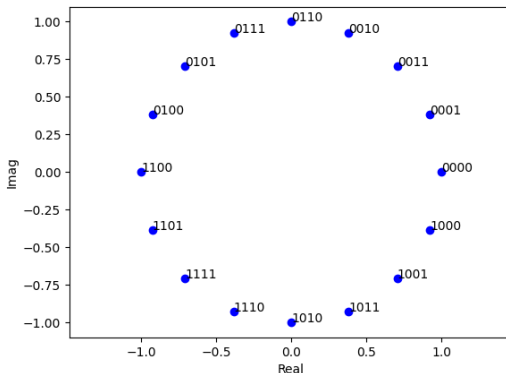
- Το μέτρο των μιγαδικών συμβόλων θα είναι

$$|z_m|^2 = \cos^2 \Phi_m + \sin^2 \Phi_m = 1$$

Μερικές προσθήκες στο comm_lib.py

```
class psk_constellation(constellation):  
  
    def __init__(self, M, R = 1, title = None, SNRbdB = None):  
        super().__init__(title = title)  
  
        self.M = M  
        self.m = np.log2(M).astype(int)  
        self.SNRbdB = SNRbdB  
        self.R = R  
  
        symbols = np.zeros( M, dtype = complex )  
        for i in range( M ):  
            symbols [ i ] = R * np.exp( 1j * 2 * np.pi / M * i )  
  
        self.set_symbols( symbols )  
        self.set_gray_bits( self.m )
```

Αστερισμός του PSK



Θωμάς Καμαλάκης
Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα

- $$x(t) = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_p}} p(t) \cos(2\pi f_0 t) \cos(\phi_k) - \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_p}} p(t) \sin(2\pi f_0 t) \sin(\phi_k)$$

- $$p_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_p}} p(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

$$p_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_p}} p(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

- $$\mathcal{E}_p = \int_0^{T_S} p^2(t) dt$$

Ιδιότητες των $p_1(t)$ και $p_2(t)$

- Η ενέργεια τους είναι ίση με ένα.

$$\langle p_1, p_1 \rangle = \int_0^{T_s} p_1^2(t) dt = \frac{2}{\mathcal{E}_p} \int_0^{T_s} p^2(t) \cos^2(2\pi f_0 t) dt \cong 1$$

$$\langle p_2, p_2 \rangle = \int_0^{T_s} p_2^2(t) dt = \frac{2}{\mathcal{E}_p} \int_0^{T_s} p^2(t) \sin^2(2\pi f_0 t) dt \cong 1$$

- Είναι μεταξύ τους κάθετες, δηλαδή έχουν εσωτερικό γινόμενο ίσο με μηδέν.

$$\langle p_1, p_2 \rangle = \int_0^{T_s} p_1(t) p_2(t) dt = \frac{2}{\mathcal{E}_p} \int_0^{T_s} p^2(t) \cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t) dt \cong 0$$

Ο δέκτης PSK

- Ο δέκτης δέχεται το σήμα ($L = 1$):

$$y(t) = x(t) + n(t) = x_1 p_1(t) + x_2 p_2(t) + n(t)$$

- Θα πρέπει να υπολογίσει κάπως τις συντεταγμένες x_1 και x_2 .
- Ο πιο απλός τρόπος είναι να υπολογίσει τα:

$$y_1 = \langle y(t), p_1(t) \rangle$$

$$y_2 = \langle y(t), p_2(t) \rangle$$

- Αν κάνουμε τις πράξεις θα έχουμε:

$$y_1 = x_1 + n_1$$

$$y_2 = x_2 + n_2$$

Ο δέκτης PSK

- Οι συνιστώσες θορύβου είναι:

$$n_1 = \int_0^{T_s} n(t)p_1(t)dt$$

$$n_2 = \int_0^{T_s} n(t)p_2(t)dt$$

- Για τις συνιστώσες αυτές έχουμε

$$\mathbb{E}\{n_1\} = \mathbb{E}\{n_2\} = 0$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{n_1^2\} &= \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \mathbb{E}\{n(t_1)n(t_2)\} p_1(t_1)p_1(t_2)dt_1dt_2 = \\ &\int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \frac{N_0}{2} \delta(t_1 - t_2) p_1(t_1)p_1(t_2)dt_1dt_2 = \frac{N_0}{2} \int_0^{T_s} p_1^2(t_1)dt_1 = \frac{N_0}{2}\end{aligned}$$

Ο δέκτης PSK

- Με τον ίδιο τρόπο:

$$\mathbb{E} \{n_2^2\} = \frac{N_0}{2}$$

- Η συσχέτιση των δύο μεταβλητών είναι:

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \{n_1 n_2\} &= \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \mathbb{E} \{n(t_1)n(t_2)\} p_1(t_1)p_2(t_2)dt_1dt_2 = \\ \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \frac{N_0}{2} \delta(t_1-t_2)p_1(t_1)p_2(t_2)dt_1dt_2 &= \frac{N_0}{2} \int_0^{T_s} p_1(t_1)p_2(t_1)dt_1 = 0\end{aligned}$$

- Επομένως τα n_1 και n_2 έχουν μέση τιμή μηδέν, διακύμανση $\frac{1}{2}N_0$ είναι Gaussian και ανεξάρτητα!