

# Μάθημα 8: Τυχαίες διαδικασίες

Θωμάς Καμαλάκης

16 Σεπτεμβρίου 2023

## 1 Εισαγωγή

Ο θόρυβος  $n(t)$  στις επικοινωνίες είναι τυχαίος και μεταβάλλεται με τον χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε χρονική στιγμή  $t = t_1, t_2, \dots$ , οι τιμές του,  $n_1 = n(t_1), n_2 = n(t_2), \dots$  είναι τυχαίες μεταβλητές. Ανάλογα με την φύση του θορύβου τα  $n_i$  μπορεί να είναι ανεξάρτητες ή εξαρτημένες τυχαίες μεταβλητές. Τέτοιου είδους σήματα των οποίων οι τιμές σε κάθε χρονική στιγμή είναι τυχαίες μεταβλητές ονομάζονται *τυχαία σήματα* ή *τυχαίες διαδικασίες*. Ας δούμε ένα παράδειγμα. Θεωρούμε το σήμα:

$$X(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \Phi) \quad (1)$$

όπου το  $\Phi$  είναι μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή με πυκνότητας πιθανότητας

$$f_\Phi(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & , 0 \leq \phi < 2\pi \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2)$$

Η τυχαία μεταβλητή  $\Phi$  κάνει την  $X(t)$  να είναι τυχαίο σήμα. Ωστόσο, οι τιμές του  $X(t)$  για διαφορετικά  $t$  είναι συσχετισμένες. Αν  $X_1 = X(t_1)$  και  $X_2 = X(t_2)$  τότε, για την μέση τιμή  $\mu_i$  των  $X_i$ , θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \mu_i &= \mathbb{E}\{X_i\} = \mathbb{E}\{X(t_i)\} = \mathbb{E}\{A \cos(2\pi f_0 t_i + \Phi)\} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} A \cos(2\pi f_0 t_i + \phi) f_\Phi(\phi) d\phi = \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t_i + \phi) d\phi = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Η διακύμανση  $\sigma_i^2$  του  $X_i$  δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= \mathbb{E}\{X_i^2\} = \mathbb{E}\{A^2 \cos^2(2\pi f_0 t_i + \Phi)\} = \frac{A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(2\pi f_0 t_i + \phi) d\phi = \\ &= \frac{A^2}{4\pi} \left( \int_0^{2\pi} d\phi + \int_0^{2\pi} \cos(4\pi f_0 t_i + \phi) d\phi \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Δείχνουμε εύκολα ότι

$$\int_0^{2\pi} \cos(4\pi f_0 t_i + \phi) d\phi = 0 \quad (5)$$

οπότε τελικά:

$$\sigma_i^2 = \frac{A^2}{2} \quad (6)$$

Ο συντελεστής συσχέτισης  $\rho$  των  $X_1$  και  $X_2$  θα είναι:

$$\rho = \frac{\mathbb{E}\{X_1 X_2\}}{\sigma_1 \sigma_2} = 2 \mathbb{E}\{\cos(2\pi f_0 t_1 + \Phi) \cos(2\pi f_0 t_2 + \Phi)\} \quad (7)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos(a - b) + \frac{1}{2} \cos(a + b) \quad (8)$$

γράφουμε το  $\rho$  ως εξής:

$$\rho = \mathbb{E}\{\cos(2\pi f_0(t_1 - t_2))\} + \mathbb{E}\{\cos(2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\Phi)\} \quad (9)$$

Η πρώτη αναμενόμενη τιμή δεν εξαρτάται από το  $\Phi$  οπότε:

$$\mathbb{E} \{ \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2)) \} = \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2)) \quad (10)$$

Η δεύτερη αναμενόμενη τιμή υπολογίζεται περίπου όπως και πριν:

$$\mathbb{E} \{ \cos(2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\Phi) \} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\phi) d\phi = 0 \quad (11)$$

Οπότε το  $\rho$  γράφεται ως εξής:

$$\rho = \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2)) \quad (12)$$

Παρατηρούμε ότι εκτός από συγκεκριμένους συνδυασμούς των  $t_1$  και  $t_2$  όπου  $t_2 - t_1 = \frac{1}{2}(2m+1)/f_0$  που μηδενίζουν το συνημίτονο, γενικά θα έχουμε  $\rho \neq 0$  οπότε τα δείγματα  $X_1 = X(t_1)$  και  $X_2 = X(t_2)$  θα πρέπει να σχετίζονται δεδομένου ότι στο όρισμα του συνημιτόνου έχουν την ίδια τιμή για το  $\Phi$ .

## 2 Ισχύς και Ενέργεια

Είχαμε ορίσει την στιγμιαία ισχύ  $P$  και την ενέργεια ενός μη τυχαίου σήματος  $x(t)$  μέσα στην χρονική διάρκεια  $[t_a, t_b]$ , ως εξής:

$$P(t) = x^2(t) \quad (13)$$

$$E(t_a, t_b) = \int_{t_a}^{t_b} x^2(t) dt \quad (14)$$

Για ένα τυχαίο σήμα  $X(t)$ , θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τους ίδιους ορισμούς και να θεωρήσουμε την στιγμιαία ισχύ  $X^2(t)$  και την ενέργεια  $E_X(t_a, t_b) = \int_{t_a}^{t_b} X^2(t) dt$ . Με τον τρόπο αυτό όμως τα μεγέθη αυτά θα ήταν τυχαίες μεταβλητές και επομένως ίσως είναι καλύτερο να υπολογίσουμε την αναμενόμενη ισχύ και ενέργεια ως εξής:

$$P(t) = \mathbb{E} \{ X^2(t) \} \quad (15)$$

$$\mathcal{E}_X(t_a, t_b) = \mathbb{E} \{ E_X(t_a, t_b) \} = \mathbb{E} \left\{ \int_{t_a}^{t_b} X^2(t) dt \right\} \quad (16)$$

Η συνολική αναμενόμενη ενέργεια θα είναι:

$$\mathcal{E}_X = \mathbb{E} \{ E_X(-\infty, +\infty) \} = \mathbb{E} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} X^2(t) dt \right\} \quad (17)$$

Η μέση ισχύς στο διάστημα  $[t_a, t_b]$  θα είναι απλά:

$$\mathcal{P}_X(t_a, t_b) = \frac{\mathcal{E}_X(t_a, t_b)}{t_b - t_a} \quad (18)$$

Συνήθως για τον υπολογισμό της μέσης ισχύος θέτουμε  $t_a \rightarrow -\infty$  και  $t_b \rightarrow +\infty$  και χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό:

$$\mathcal{P}_X = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{E}_X \left( -\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2} \right)}{\tau} \quad (19)$$

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 plt.rcParams.update({
5     "text.usetex": True,
6     "font.family": "serif",
7     "font.serif": ["Palatino"],
8     "font.size": 14,
9     "lines.linewidth": 2,
10 })
11
12 def carrier(t, f0, A, phi = 0):
13     return A * np.cos( 2 * np.pi * f0 * t + phi )
14
15 def inst_power(x):
16     return np.abs(x) ** 2
17
18 def energy(t, x):

```

```

19     return np.trapz(inst_power(x), t)
20
21 def avg_power(t, x):
22     ta = min(t)
23     tb = max(t)
24     return energy(t, x) / (tb - ta)
25
26 f0 = 1e9
27 T = 1/f0
28 ta = 0
29 tb = T
30 Nt = 1000
31 Ni = 100
32 Nplot = 20
33 A = 1
34
35 t = np.linspace(ta, tb, Nt)
36 Xts = []
37 EX = np.zeros( Ni )
38 PX = np.zeros( Ni )
39
40 for ni in range(Ni):
41     phi = 2 * np.pi * np.random.rand()
42     Xt = carrier(t, f0, A, phi = phi)
43     Xts.append( Xt )
44     EX[ni] = energy(t, Xt)
45     PX[ni] = avg_power(t, Xt)
46
47 plt.close('all')
48 plt.figure()
49
50 for n in range(Nplot):
51     plt.plot(t, Xts[n], '-')
52
53 plt.ylabel('$X(t)$')
54 plt.xlabel('$t$')
55 plt.tight_layout()
56
57 EXmean = np.mean(EX)
58 PXmean = np.mean(PX)
59
60 print('Mean Energy:', EXmean)
61 print('Mean Power:', PXmean)

```

Listing 1: randomcarrier.py

Χρησιμοποιούμε το [listing 1](#) για να γεννήσουμε  $N$  διαφορετικές πραγματοποιήσεις  $X_i(t)$  του  $X(t)$ , θεωρώντας  $A = 1$ . Η μέση ενέργεια  $\mathcal{E}_X$  υπολογίζεται από την αναμενόμενη τιμή των ενεργειών  $\int_{t_a}^{t_b} X_i^2(t)dt$  όλων των σημάτων  $X_i(t)$ .

$$\mathcal{E}_X(t_a, t_b) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{t_a}^{t_b} X_i^2(t)dt \quad (20)$$

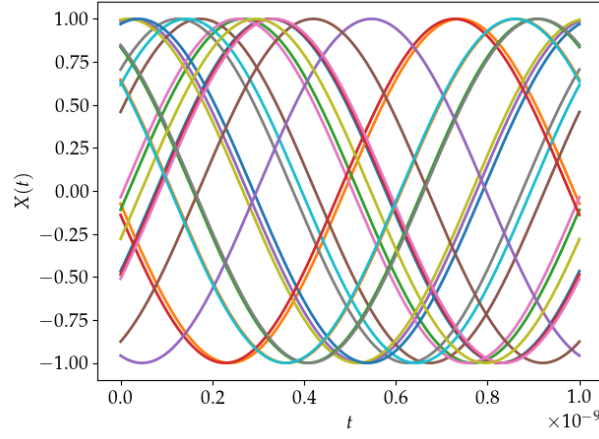
Στο [listing 1](#) κάνουμε `plot` και τις πρώτες 20 πραγματοποιήσεις  $X_i(t)$  που φαίνονται στην εικόνα 1 για συχνότητα φέροντος  $f_0 = 1\text{GHz}$ . Το [listing](#) υπολογίζει  $\approx 5 \times 10^{-10}$  για την μέση ενέργεια του σήματος όταν θεωρούμε μία πλήρη περίοδο του σήματος  $T = 1/f_0$ , από  $t_a = 0$  μέχρι  $t_b = T$ . Η μέση ισχύς στο ίδιο διάστημα υπολογίζεται σε  $\approx 0.5$ .

Ας υπολογίσουμε και μαθηματικά την μέση ενέργεια και την μέση ισχύ του σήματος για να δούμε πως συγκρίνονται με τα αριθμητικά αποτελέσματα. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t_a, t_b) &= \mathbb{E} \left\{ \int_{t_a}^{t_b} X^2(t)dt \right\} = \mathbb{E} \left\{ \int_0^T A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \Phi)dt \right\} = \\ &= A^2 \mathbb{E} \left\{ \int_0^T \frac{\cos(4\pi f_0 t + 2\Phi) + 1}{2} dt \right\} = \frac{A^2 T}{2} \quad (21) \end{aligned}$$

Στην παραπάνω χρησιμοποιήσαμε την σχέση  $\cos^2 a = \frac{1}{2}[1 + \cos(2a)]$ . Επίσης, εφόσον το  $\cos(4\pi f_0 t + 2\Phi)$  έχει περίοδο  $1/(2f_0) = T/2$ , το ολοκλήρωμα του μέσ σε δύο περιόδους στο διάστημα  $[0, T]$  θα είναι ίσο με μηδέν,

$$\int_0^T \cos(4\pi f_0 t + 2\Phi) dt = 0 \quad (22)$$



Εικόνα 1: Υλοποιήσεις  $X_i(t)$  του τυχαίου σήματος  $X(t)$  στην (1).

οπότε προκύπτει η (21). Η μέση ισχύς είναι:

$$\mathcal{P}_X(t_a, t_b) = \frac{\mathcal{E}_X(t_a, t_b)}{t_b - t_a} = \frac{A^2}{2} \quad (23)$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε ότι οι θεωρητικές τιμές των  $\mathcal{P}_X(t_a, t_b)$  και  $\mathcal{E}_X(t_a, t_b)$  είναι 0.5 και  $5 \times 10^{-10}$  αντίστοιχα, δηλαδή πολύ κοντά στις αριθμητικές τους τιμές.

Ας θεωρήσουμε και ένα δεύτερο παράδειγμα όπου έχουμε τετραγωνικούς παλμούς  $p(t)$  οι οποίοι πολλαπλασιάζονται με τυχαίο πλάτος  $A$ . Το τυχαίο σήμα μπορεί να γραφτεί:

$$X(t) = Ap(t) \quad (24)$$

όπου το  $p(t)$  είναι ένας τετραγωνικός παλμός με πλάτος 1

$$p(t) = \begin{cases} 1 & , -T_1/2 \leq t \leq T_1/2 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (25)$$

και θεωρούμε ότι το  $A$  είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή που παίρνει τέσσερις διαφορετικές τιμές τα  $\pm 1$  και  $\pm 3$  με την ίδια πιθανότητα, δηλαδή:

$$\Pr\{A = 1\} = \Pr\{A = -1\} = \Pr\{A = 3\} = \Pr\{A = -3\} = \frac{1}{4} \quad (26)$$

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 plt.rcParams.update({
5     "text.usetex": True,
6     "font.family": "serif",
7     "font.serif": ["Palatino"],
8     "font.size" : 14,
9     "lines.linewidth" : 2,
10 })
11
12 def square_pulse(t, T1, A = 1):
13     samples = np.zeros(t.size)
14     i = np.where( np.abs(t) <= 0.5 * T1)
15     samples[ i ] = A
16     return samples
17
18 def inst_power(x):
19     return np.abs(x) ** 2
20
21 def energy(t, x):
22     return np.trapz(inst_power(x), t)
23
24 def avg_power(t, x):
25     ta = min(t)

```

```

26     tb = max(t)
27     return energy(t, x) / (tb - ta)
28
29 Tp = 1e-9
30 Np = 100
31 Ni = 10000
32 Nplot = 10
33 amps = np.array([-3, -1, 1, 3])
34 t = np.linspace(-0.5 * Tp, 0.5 * Tp, Np)
35 Xts = []
36 EX = np.zeros( Ni )
37 PX = np.zeros( Ni )
38
39 for ni in range(Ni):
40     ampi = np.random.randint(0, 4)
41     Xt = square_pulse(t, Tp, A = amps[ampi])
42     Xts.append( Xt )
43     EX[ni] = energy(t, Xt)
44     PX[ni] = EX[ni] / Tp
45
46 plt.close('all')
47 plt.figure()
48
49 for n in range(Nplot):
50     plt.plot(t, Xts[n], '-')
51
52 plt.ylabel('$X(t)$')
53 plt.xlabel('$t$')
54 plt.tight_layout()
55
56 EXmean = np.mean(EX)
57 PXmean = np.mean(PX)
58
59 print('Mean Energy:', EXmean)
60 print('Mean Power:', PXmean)

```

Listing 2: randomamp.py

Για να υπολογίσουμε την μέση ενέργεια και την ισχύ του  $X(t)$  χρησιμοποιούμε το [listing 2](#) το οποίο είναι παρόμοιο σε λογική με το [listing 1](#). Χρησιμοποιούμε την `square_pulse` όπου έχουμε κάνει μία μικρή προσθήκη ώστε να μπορούμε να θέτουμε το πλάτος του παλμού τιμές οι οποίες να διαφέρουν από το 1 όπως φαίνεται και στο [listing 2](#). Η μεταβλητή εισόδου  $A$  καθορίζει το πλάτος του παλμού που μπορεί να διαφέρει από το 1.

Ο κώδικας στο [listing 2](#) υπολογίζει τις τιμές  $\approx 5 \times 10^{-9}$  και  $\approx 5$  για τις τιμές της μέσης ενέργειας  $\mathcal{E}_X(t_a, t_b)$  και την ισχύος  $\mathcal{P}_X(t_a, t_b)$  αντίστοιχα, στο διάστημα  $t_a = -T_1/2$  και  $t_b = T_1/2$ . Θεωρητικά οι τιμές αυτές υπολογίζονται ως εξής:

$$\mathcal{E}_X(t_a, t_b) = \mathbb{E} \left\{ \int_{-T_1/2}^{T_1/2} X^2(t) dt \right\} = \mathbb{E} \left\{ A^2 \int_{-T_1/2}^{T_1/2} p^2(t) dt \right\} = \mathbb{E} \{ A^2 T_1 \} = T_1 \mathbb{E} \{ A^2 \} \quad (27)$$

Η μέση ισχύς δίνεται από την σχέση:

$$\mathcal{P}_X(t_a, t_b) = \frac{\mathcal{E}_X(t_a, t_b)}{t_b - t_a} = \frac{\mathcal{E}_X(t_a, t_b)}{T_1} \mathbb{E} \{ A^2 \} \quad (28)$$

Για το  $\mathbb{E} \{ A^2 \}$  θα έχουμε:

$$\mathbb{E} \{ A^2 \} = (-3)^2 \times \frac{1}{4} + (-1)^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{4} = 5 \quad (29)$$

Οπότε από την (27) και (29) καταλήγουμε στην τιμή  $\mathcal{E}_X(t_a, t_b) = 5T_1 = 5 \times 10^{-9}$  ενώ η μέση ισχύς είναι  $\mathcal{P}_X(t_a, t_b) = 5$ , οπότε οι αριθμητικές τιμές που υπολογίσαμε πριν συμφωνούν πολύ καλά με τις θεωρητικές τους τιμές.

Συχνά ενδιαφερόμαστε για την μέση ισχύ στο διάστημα  $(-\infty, +\infty)$  για την περίπτωση ενός περιοδικού τυχαίου σήματος όπως το (1). Θεωρούμε πάλι την ακολουθία  $\tau_n = 2nT$  όπου  $T$  είναι η περίοδος του σήματος. Θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2nT} \int_{-nT}^{nT} X^2(t) dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2nT} \underbrace{\left( \int_{-nT}^{-(n-1)T} |X(t)|^2 dt + \dots + \int_{(n-1)T}^{nT} |X(t)|^2 dt \right)}_{2n \text{ όροι}} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T |X(t)|^2 dt \quad (30) \end{aligned}$$

οπότε και:

$$\mathcal{P}_X = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{E}_X\left(-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right)}{\tau} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{E}_X\left(-\frac{\tau_n}{2}, \frac{\tau_n}{2}\right)}{\tau_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{E}_X(-nT, nT)}{2nT} = \mathbb{E} \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2nT} \int_{-nT}^{nT} X^2(t) dt \right\} = \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T |X(t)|^2 dt \right\} = \mathcal{P}_X(0, T) \quad (31)$$

Όπως λοιπόν και στην περίπτωση των μη τυχαίων περιοδικών σημάτων, η μέση ισχύς  $\mathcal{P}_X$  στο διάστημα  $(-\infty, +\infty)$  ισούται με την μέση ισχύ στο διάστημα της βασικής περιόδου  $[0, T]$ ,  $\mathcal{P}_X(0, T)$ .

### 3 Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης και Στατικά Σήματα

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης  $R_{XX}(t_1, t_2)$  ορίζεται ως η αναμενόμενη τιμή του γινομένου των τιμών του τυχαίου σήματος  $X_1 = X(t_1)$  και  $X_2 = X(t_2)$ ,

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \mathbb{E}\{X_1 X_2\} = \mathbb{E}\{X(t_1)X(t_2)\} \quad (32)$$

Αν τα  $X_1$  και  $X_2$  είναι ανεξάρτητα τότε θα έχουμε

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \mathbb{E}\{X(t_1)\} \mathbb{E}\{X(t_2)\} \quad (33)$$

οπότε αν συμβολίσουμε την μέση τιμή της  $X$  την χρονική στιγμή  $t$  ως:

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}\{X(t)\} \quad (34)$$

θα έχουμε:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \mu_X(t_1)\mu_X(t_2) \quad (35)$$

#### 3.1 Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης φέροντος σήματος

Ας υπολογίσουμε την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης για το τυχαίο σήμα (1). Χρησιμοποιώντας την (8), Θα έχουμε:

$$\begin{aligned} R_{XX}(t_1, t_2) &= \mathbb{E}\{X(t_1)X(t_2)\} = \mathbb{E}\{A^2 \cos(2\pi f_0 t_1 + \Phi) \cos(2\pi f_0 t_2 + \Phi)\} = \\ &A^2 \mathbb{E}\left\{\frac{1}{2} \cos(2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\Phi) + \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2))\right\} = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2)) \end{aligned} \quad (36)$$

Στην παραπάνω σχέση χρησιμοποιήσαμε το ότι η αναμενόμενη τιμή του  $\cos(2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\Phi)$  είναι μηδέν:

$$\mathbb{E}\{\cos(2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\Phi)\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\phi) d\phi = 0 \quad (37)$$

#### 3.2 Στατικά σήματα

Παρατηρούμε ότι η  $R_{XX}(t_1, t_2)$  στην περίπτωση αυτή εξαρτάται μόνο από την διαφορά των χρονικών στιγμών  $t_1 - t_2$ ,

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1 - t_2) \quad (38)$$

Τυχαία σήματα που παρουσιάζουν την συμπεριφορά  $R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1 - t_2)$  όπως στο παράδειγμα 3.2, ονομάζονται *στατικά*. Η στατικότητα έχει ορισμένες ενδιαφέρουσες επιπτώσεις στην στατιστική συμπεριφορά του σήματος. Για παράδειγμα, η αναμενόμενη ισχύς ενός στατικού τυχαίου σήματος σύμφωνα με την (13) θα είναι:

$$P(t) = \mathbb{E}\{X^2(t)\} = \mathbb{E}\{X(t)X(t)\} = R_{XX}(t, t) = R_{XX}(t - t) = R_{XX}(0) \quad (39)$$

Σύμφωνα με την (39), για ένα στατικό σήμα  $X(t)$ , η αναμενόμενη ισχύς δεν εξαρτάται από τον χρόνο  $t$ . Η μέση ενέργεια σε ένα διάστημα  $[t_a, t_b]$  είναι:

$$\mathcal{E}_X(t_a, t_b) = \mathbb{E}\left\{\int_{t_a}^{t_b} X^2(t) dt\right\} = \int_{t_a}^{t_b} \mathbb{E}\{X^2(t)\} dt = \int_{t_a}^{t_b} R_{XX}(0) dt = (t_b - t_a) R_{XX}(0) \quad (40)$$

Η (40) δείχνει ότι για ένα στατικό σήμα η ενέργεια σε ένα οποιοδήποτε διάστημα  $[t_a, t_b]$  εξαρτάται μόνο από τη διάρκεια  $t_b - t_a$  του διαστήματος. Η μέση ισχύς δίνεται από την (18),

$$\mathcal{P}_X(t_a, t_b) = \frac{\mathcal{E}_X(t_a, t_b)}{t_b - t_a} = R_{XX}(0) \quad (41)$$

και επομένως όπως θα περίμενε και κανείς, δεν εξαρτάται από το χρονικό διάστημα  $[t_a, t_b]$  που την θεωρούμε.

### 3.3 Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ενός ψηφιακού σήματος με τυχαία πλάτη

Στο πρώτο μάθημα είδαμε ότι ένα ψηφιακό σήμα μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα άθροισμα της μορφής:

$$X(t) = \sum_k A_k p(t - kT_s) \quad (42)$$

όπου τα  $A_k$  θεωρούμε ότι είναι τα διαδοχικά σύμβολα του ψηφιακού σήματος και  $T_s$  η διάρκεια κάθε συμβόλου. Θα υπολογίσουμε την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης  $R_{XX}(t_1, t_2)$  θεωρώντας ότι τα  $A_k$  είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή  $\mathbb{E}\{A_k\} = 0$  και έχουν την ίδια διακύμανση  $\sigma_A^2 = \mathbb{E}\{A_k^2\}$ . Στο παράδειγμα αυτό δεν κάνουμε κάποια υπόθεση για την εξίσωση που καθορίζει τους παλμούς  $p(t)$  (π.χ. δεν θεωρούμε ότι είναι οπωσδήποτε τετραγωνικοί).

Υπολογίζουμε την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ως εξής:

$$\begin{aligned} R_{XX}(t_1, t_2) &= \mathbb{E}\{X(t_1)X(t_2)\} = \mathbb{E}\left\{\sum_k A_k p(t_1 - kT_s) \sum_q A_q p(t_2 - qT_s)\right\} = \\ &= \mathbb{E}\left\{\sum_{kq} A_k A_q p(t_1 - kT_s) p(t_2 - qT_s)\right\} = \sum_{kq} \mathbb{E}\{A_k A_q\} p(t_1 - kT_s) p(t_2 - qT_s) \end{aligned} \quad (43)$$

Δεδομένου ότι οι μεταβλητές  $A_k$  είναι ανεξάρτητες θα έχουμε:

$$\mathbb{E}\{A_k A_q\} = 0 \quad \text{όταν } k \neq q \quad (44)$$

ενώ όταν  $k = q$ , θα έχουμε  $\mathbb{E}\{A_k A_q\} = \mathbb{E}\{A_k^2\} = \sigma_A^2$ . Οπότε στο άθροισμα (43) κρατάμε μόνο τους όρους που έχουν  $k = q$  και το άθροισμα γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} R_{XX}(t_1, t_2) &= \mathbb{E}\{X(t_1)X(t_2)\} = \sum_k \mathbb{E}\{A_k^2\} p(t_1 - kT_s) p(t_2 - kT_s) = \\ &= \sigma_A^2 \sum_k p(t_1 - kT_s) p(t_2 - kT_s) \end{aligned} \quad (45)$$

Αν θέτουμε  $t_1 = t$  και  $t_2 = t + t'$ , τότε θα έχουμε:

$$R_{XX}(t, t + t') = \sigma_A^2 \sum_k p(t - kT_s) p(t + t' - kT_s) \quad (46)$$

Από την παραπάνω εξίσωση δεν είναι προφανές ότι το  $R_{XX}(t, t + t')$  εξαρτάται μόνο από το  $t'$  οπότε δεν προκύπτει ότι η  $X(t)$  είναι στατική.

### 3.4 Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης τετραγωνικής παλμοσειράς

Θέλουμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης  $R_{XX}(t_1, t_2)$  στην περίπτωση του παραδείγματος 3.3 όταν οι παλμοί είναι τετραγωνικοί με

$$p(t) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq t < T_s \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (47)$$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει η σχέση στην οποία καταλήξαμε στο παράδειγμα 3.3, δηλαδή:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \sigma_A^2 \sum_k p(t_1 - kT_s) p(t_2 - kT_s) \quad (48)$$

Όσotόσο στην περίπτωση μας μπορούμε να δούμε ότι το  $p(t_1 - kT_s)$  είναι μη μηδενικό και ίσο με ένα μόνο όταν  $kT_s \leq t_1 < (k+1)T_s$ . Για να έχουμε  $p(t - kT_s) p(t + t' - kT_s) \neq 0$ , θα πρέπει και  $kT_s \leq t_2 < (k+1)T_s$ . Επομένως το  $R_{XX}(t_1, t_2)$  είναι μη μηδενικό όταν το  $t_1$  και το  $t_2$  ανήκουν στην ίδια διάρκεια συμβόλου, δηλαδή υπάρχει ένας ακέραιος  $k$  για τον οποίο να ισχύουν ταυτόχρονα  $kT_s \leq t_1, t_2 < (k+1)T_s$  οπότε τότε θα έχουμε  $R_{XX}(t_1, t_2) = \sigma_A^2$  ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση θα έχουμε  $R_{XX}(t_1, t_2) = 0$ .

### 3.5 Φασματική πυκνότητα ισχύος

Στην περίπτωση των τυχαίων σημάτων, μας ενδιαφέρει η *φασματική πυκνότητα ισχύος* (power spectral density - PSD) που καθορίζει σε ποιο μέρος του φάσματος έχει ισχυρή ή ασθενή παρουσία ένα τυχαίο σήμα  $X(t)$ . Ανάλογα με την περίπτωση των μη τυχαίων σημάτων ας ορίσουμε μία “παραθυρωμένη” έκδοση  $X_\tau(t)$  ενός τυχαίου σήματος  $X(t)$  ως εξής:

$$X_\tau(t) = \begin{cases} X(t) & , |t| \leq \tau/2 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (49)$$

Η μέση ισχύς στο  $(-\infty, +\infty)$  δίνεται από την (19),

$$\mathcal{P}_X = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} |X(t)|^2 dt \right\} = \mathbb{E} \left\{ \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} |X_\tau(t)|^2 dt \right\} \quad (50)$$

Αν ορίσουμε το  $\tilde{X}_\tau(f)$  να είναι ο μετασχηματισμός Fourier της τυχαίας μεταβλητής  $X_\tau(t)$ ,

$$\tilde{X}_\tau(f) = \mathcal{F}\{X_\tau(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X_\tau(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (51)$$

τότε χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval θα έχουμε:

$$\mathcal{P}_X = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \mathbb{E} \{ |\tilde{X}_\tau(f)|^2 \} df \quad (52)$$

Αν ορίσουμε το  $S_X(f)$  να δίνεται από την σχέση:

$$S_X(f) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \mathbb{E} \{ |\tilde{X}_\tau(f)|^2 \} \quad (53)$$

τότε προκύπτει ότι:

$$\mathcal{P}_X = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df \quad (54)$$

Η  $S_X(f)$  είναι η PSD του  $X(t)$ . Μπορούμε να δείξουμε ότι συνδέεται με την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης  $R_{XX}(t_1, t_2)$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} |\tilde{X}_\tau(f)|^2 &= \tilde{X}_\tau(f) \tilde{X}_\tau^*(f) = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} X_\tau(t) e^{-j2\pi ft} dt \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} X_\tau(t) e^{-j2\pi ft} dt \right)^* = \\ &= \left( \int_{-\infty}^{+\infty} X_\tau(t_1) e^{-j2\pi ft_1} dt_1 \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} X_\tau^*(t_2) e^{j2\pi ft_2} dt_2 \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X_\tau(t_1) X_\tau^*(t_2) e^{j2\pi f(t_2-t_1)} dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (55)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \mathbb{E} \{ |\tilde{X}_\tau(f)|^2 \} &= \frac{1}{\tau} \mathbb{E} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X_\tau(t_1) X_\tau^*(t_2) e^{j2\pi f(t_2-t_1)} dt_1 dt_2 \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau} \mathbb{E} \{ X_\tau(t_1) X_\tau^*(t_2) \} e^{j2\pi f(t_2-t_1)} dt_1 dt_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau} R'_{XX}(t_1, t_2) e^{j2\pi f(t_2-t_1)} dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (56)$$

όπου με

$$R'_{XX}(t_1, t_2) = \mathbb{E} \{ X_\tau(t_1) X_\tau^*(t_2) \} \quad (57)$$

έχουμε συμβολίσει την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του  $X_\tau(t)$ . Εφόσον  $X_\tau(t) = 0$  για  $|t| > \frac{\tau}{2}$ , έπεται ότι θα έχουμε και  $R'_{XX}(t_1, t_2) = 0$  για  $|t_1| > \frac{\tau}{2}$  ή  $|t_2| > \frac{\tau}{2}$ . Στην παραπάνω σχέση θέτουμε  $t' = t_1 - t_2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \mathbb{E} \{ |\tilde{X}_\tau(f)|^2 \} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} R'_{XX}(t' + t_2, t_2) e^{-j2\pi ft'} dt' dt_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} R'_{XX}(t' + t_2, t_2) dt_2 \right\} e^{-j2\pi ft'} dt' \end{aligned} \quad (58)$$

Για το εσωτερικό ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R'_{XX}(t' + t_2, t_2) e^{-j2\pi ft'} dt_2 \quad (59)$$

χρησιμοποιούμε το ότι  $R'_{XX}(t' + t_2, t_2) = 0$ , όταν  $|t_2| > \tau/2$  οπότε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R'_{XX}(t' + t_2, t_2) e^{-j2\pi f t'} dt_2 = \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} R'_{XX}(t' + t_2, t_2) e^{-j2\pi f t'} dt_2 \quad (60)$$

Ορίζουμε την

$$\bar{R}_{XX}(t') = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} R'_{XX}(t' + t_2, t_2) dt_2 \quad (61)$$

και θα έχουμε:

$$\bar{R}_{XX}(t') = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} R'_{XX}(t' + t_2, t_2) dt_2 = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} R_{XX}(t' + t_2, t_2) dt_2 \quad (62)$$

και γράφουμε:

$$S_X(f) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \mathbb{E} \left\{ |\tilde{X}_\tau(f)|^2 \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{R}_{XX}(t') e^{-j2\pi f t'} dt' = \mathcal{F} \{ \bar{R}_{XX} \} \quad (63)$$

Επομένως προκύπτει το συμπέρασμα ότι η **PSD** ενός τυχαίου σήματος  $X_\tau(t)$  υπολογίζεται από τον μετασχηματισμό **Fourier** της μέσης τιμής  $\bar{R}_{XX}$  της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης  $R_{XX}$ :

$$\bar{R}_{XX}(t') = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} R_{XX}(t' + t_2, t_2) dt_2 \quad (64)$$

Για μία στατική τυχαία διαδικασία θα έχουμε  $\bar{R}_{XX}(t') = R_{XX}(t')$  οπότε στην περίπτωση αυτή η **PSD** είναι απλώς ο μετασχηματισμός **Fourier** της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης  $R_{XX}$ . Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα υπολογισμού.

### 3.6 PSD του φέροντος σήματος

Θα υπολογίσουμε την **PSD**  $S_X(f)$ , του φέροντος σήματος (1). Το τυχαίο σήμα που δίνεται από τον (1) είδαμε στο παράδειγμα 3.2 ότι έχει συνάρτηση αυτοσυσχέτισης που δίνεται από την σχέση

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_X X(t_1 - t_2) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2)) \quad (65)$$

Εφόσον η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης εξαρτάται μόνο από την διαφορά  $t' = t_1 - t_2$ , πρόκειται για ένα στατικό τυχαίο σήμα, οπότε η **PSD** προκύπτει από τον μετασχηματισμό **Fourier** της  $R_{XX}(t')$ ,

$$R_{XX}(t') = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 t') \quad (66)$$

οπότε:

$$S_X(f) = \mathcal{F} \{ R_{XX}(t') \} = \frac{A^2}{4} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) \quad (67)$$

Η (67) μας δίνει την ζητούμενη **PSD** του σήματος.

### 3.7 PSD του ψηφιακού σήματος του παραδείγματος 3.3

Θα θεωρήσουμε πάλι, το ψηφιακό σήμα της μορφής:

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k p(t - kT_S) \quad (68)$$

όπου τα  $A_k$  θεωρούμε ότι είναι οι τιμές του ψηφιακού σήματος για  $kT_S \leq t < (k+1)T_S$ . Θα υπολογίσουμε την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης  $R_{XX}(t_1, t_2)$  θεωρώντας ότι τα  $A_k$  είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή  $\mathbb{E} \{ A_k \} = 0$  και έχουν την ίδια διακύμανση  $\sigma_A^2 = \mathbb{E} \{ A_k^2 \}$ . Θέλουμε να βρούμε την **PSD** του  $X(t)$ . Γνωρίζουμε από το παράδειγμα 3.3 ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος δίνεται από την σχέση:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \sigma_A^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t_1 - kT_S) p(t_2 - kT_S) \quad (69)$$

Για να βρούμε την PSD  $S_X(f)$  πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την  $\bar{R}_X X(t')$  που δίνεται από την σχέση (64)

$$\bar{R}_{XX}(t') = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} R_{XX}(t' + t_2, t_2) dt_2 = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\sigma_A^2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t' + t_2 - kT_S) p(t_2 - kT_S) dt_2 \quad (70)$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση  $R(t_2)$  όπου

$$R(t_2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t' + t_2 - kT_S) p(t_2 - kT_S) \quad (71)$$

είναι περιοδική με περίοδο  $T_S$ ,

$$R(t_2 + T_S) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t' + t_2 + T_S - kT_S) p(t_2 + T_S - kT_S) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} p(t' + t_2 - mT_S) p(t_2 - mT_S) = R(t_2) \quad (72)$$

όπου έχουμε θέσει  $m = k - 1$ . Εφόσον η  $R(t_2)$  είναι περιοδική, η μέση τιμή της στο διάστημα  $(-\infty, +\infty)$  θα είναι ίση με την μέση της τιμή στο  $(0, T_S)$ ,

$$\begin{aligned} \bar{R}_{XX}(t') &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t' + t_2 - kT_S) p(t_2 - kT_S) dt_2 = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} R(t_2) dt_2 = \frac{1}{T_S} \int_0^{T_S} R(t_2) dt_2 = \\ &= \frac{1}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^{T_S} p(t' + t_2 - kT_S) p(t_2 - kT_S) dt_2 \end{aligned} \quad (73)$$

Θέτοντας  $t = t_2 - kT_S$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων και να δείξουμε ότι:

$$\int_0^{T_S} p(t' + t_2 - kT_S) p(t_2 - kT_S) dt_2 = \int_{kT_S}^{(k+1)T_S} p(t + t') p(t) dt \quad (74)$$

οπότε:

$$\bar{R}_{XX}(t') = \frac{\sigma_A^2}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{kT_S}^{(k+1)T_S} p(t + t') p(t) dt = \frac{\sigma_A^2}{T_S} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t + t') p(t) dt \quad (75)$$

Η (75) γράφεται:

$$\bar{R}_{XX}(t') = \frac{\sigma_A^2}{T_S} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t + t') p(t) dt = \frac{\sigma_A^2}{T_S} \int_{-\infty}^{+\infty} p(-t + t') p(t) dt \quad (76)$$

Στην παραπάνω σχέση το ολοκλήρωμα είναι ο συγκερασμός του  $p(-t')$  με το  $p(t)$ ,

$$p(t') * p(-t') = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) p(-t + t') dt \quad (77)$$

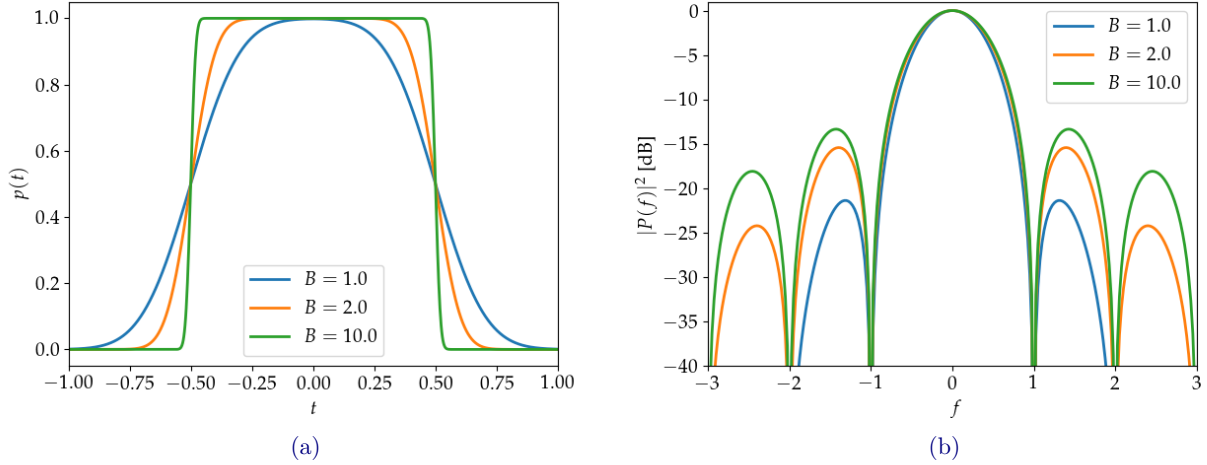
οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\bar{R}_{XX}(t') = \frac{\sigma_A^2}{T_S} p(t') * p(-t') \quad (78)$$

Η PSD του σήματος είναι ο μετασχηματισμός Fourier του  $R_{XX}(t')$ ,

$$S_X(f) = \frac{\sigma_A^2}{T_S} \mathcal{F} \{p(t) * p(-t)\} = \frac{\sigma_A^2}{T_S} \mathcal{F} \{p(t')\} \mathcal{F} \{p(-t')\} = \frac{\sigma_A^2}{T_S} |P(f)|^2 \quad (79)$$

όπου  $P(f) = \mathcal{F} \{p(t')\}$  είναι το φάσμα του  $p(t')$  και έχουμε χρησιμοποιήσει την ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier,  $\mathcal{F} \{p(-t')\} = P^*(f)$ . Η (79) είναι η ζητούμενη PSD του σήματος  $X(t)$ .



Εικόνα 2: Η μορφή του παλμού  $p(t)$  και το φάσμα  $|P(f)|^2$ .

Η (79) είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στα παρακάτω. Δείχνει ότι η κυματομορφή  $p(t)$  καθορίζει την PSD και επομένως τα φασματικά χαρακτηριστικά του σήματος.

Στο listing 3 υπολογίζουμε το  $|P(f)|^2$ , που είναι ανάλογο της PSD για διαφορετικές κυματομορφές  $p(t)$  που θεωρώντας ότι οι παλμοί  $p(t)$  η έξοδος ενός LTI συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(f) = \exp\left(-\frac{f^2}{2B^2}\right) \quad (80)$$

όπου είσοδος του είναι ένας τετραγωνικός παλμός για διάφορες τιμές του  $B$  που καθορίζει το εύρος ζώνης του τελικού παλμού  $p(t)$ . Η κατάσταση αυτή εμφανίζεται και στην πράξη όπου οι παλμοί που παράγονται από μία ψηφιακή γεννήτρια δεν μπορεί ποτέ να γίνουν απολύτως τετραγωνικοί. Στην εικόνα ?? δείχνουμε τον παλμό  $p(t)$  στο πεδίο του χρόνου και την αντίστοιχη  $S_X(f)$ . Προφανώς όσο μικρότερο το εύρος τόσο πιο εξασθενημένες είναι οι υψηλές συχνότητες και τόσο πιο αργές είναι οι μεταβάσεις του παλμού.

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 plt.rcParams.update({
5     "text.usetex": True,
6     "font.family": "serif",
7     "font.serif": ["Palatino"],
8     "font.size" : 14,
9     "lines.linewidth" : 2,
10 })
11
12 def square_pulse(t, T1):
13     samples = np.zeros(t.size)
14     i = np.where( np.abs(t) <= 0.5 * T1)
15     samples[ i ] = 1
16     return samples
17
18 def calc_spectrum(x, t):
19     Dt = t[1] - t[0]
20     N = t.size
21     Df = 1 / Dt / N
22     f = np.arange( -N / 2, N / 2 ) * Df
23     X = Dt * np.fft.fftshift(
24         np.fft.fft(
25             np.fft.fftshift(x) ) )
26     return X, f
27
28 def calc_inv_spectrum(X, f):
29     Df = f[1] - f[0]
30     N = f.size
31     Dt = 1 / Df / N
32     t = np.arange( -N / 2, N/2 ) * Dt
33     x = 1 / Dt * np.fft.fftshift(

```

```

34         np.fft.ifft(
35             np.fft.fftshift(X) ) )
36     return x, t
37
38 def system_output(x, t, H):
39     X, f = calc_spectrum(x, t)
40     Y = X * H(f)
41     return calc_inv_spectrum(Y, f)
42
43 Tmax = 20
44 Np = 16384
45 T1 = 1
46 Bs = np.array([1, 2, 10]) / T1
47
48 t = np.linspace(-Tmax, Tmax, Np)
49 s = square_pulse(t, T1)
50
51 plt.close('all')
52 plt.figure(1)
53
54 for B in Bs:
55     H = lambda f : np.exp( -f ** 2.0 / 2 / B ** 2)
56     s = square_pulse(t, T1)
57     p, _ = system_output(s, t, H )
58     plt.figure(1)
59     plt.plot(t, p, label='$B=' + str(B) + '$')
60     plt.xlabel('$t$')
61     plt.ylabel('$p(t)$')
62     plt.xlim([-1, 1])
63
64     plt.figure(2)
65     Pspec, f = calc_spectrum( p, t )
66     Pf_dB = 20 * np.log10(np.abs(Pspec))
67
68     plt.plot(f, Pf_dB, label = '$B=' + str(B) + '$')
69     plt.xlabel('$f$')
70     plt.ylabel('$|P(f)|^2$ [dB]', )
71     plt.xlim([-3, 3])
72     plt.ylim([-40, 1])
73 plt.figure(1)
74 plt.legend()
75
76 plt.figure(2)
77 plt.legend()

```

Listing 3: SXpulsetrain.py

## 4 Τυχαία σήματα και LTI συστήματα

Έχει ενδιαφέρον να δούμε τι συμβαίνει όταν ένα τυχαίο σήμα  $X(t)$  περνάει από ένα γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο σύστημα (LTI). Η έξοδος του συστήματος θα δίνεται από την σχέση:

$$Y(t) = X(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)H(t - \tau)d\tau \quad (81)$$

Για να υπολογίσουμε την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του  $Y(t)$  θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 R_{YY}(t_1, t_2) &= \mathbb{E}\{Y(t_1)Y(t_2)\} = \mathbb{E}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau_1)h(t_1 - \tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau_2)h(t_2 - \tau_2)d\tau_2\right\} = \\
 &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\{X(\tau_1)X(\tau_2)\} h(t_1 - \tau_1)h(t_2 - \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = \\
 &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau_1, \tau_2)h(t_1 - \tau_1)h(t_2 - \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \quad (82)
 \end{aligned}$$

Αν υποθέσουμε ότι το σήμα είναι στατικό, τότε ισχύει  $R_{XX}(\tau_1, \tau_2) = R_{XX}(\tau_1 - \tau_2)$ . Επομένως η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$R_{YY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau_1 - \tau_2)h(t_1 - \tau_1)h(t_2 - \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \quad (83)$$

Στο εσωτερικό ολοκλήρωμα θέτουμε  $\tau = \tau_1 - \tau_2$ , οπότε:

$$R_{YY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) h(t_1 - \tau + \tau_2) h(t_2 - \tau_2) d\tau d\tau_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_2 - \tau_2) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) h(t_1 - \tau + \tau_2) d\tau \right] d\tau_2 \quad (84)$$

Αν θυμηθούμε τον ορισμό του συγκερασμού τότε το εσωτερικό ολοκλήρωμα γράφεται και ως εξής:

$$z(t_1 + \tau_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) h(t_1 - \tau + \tau_2) d\tau = R_{XX}(t_1 + \tau_2) * h(t_1 + \tau_2) \quad (85)$$

και έχουμε:

$$R_{YY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_2 - \tau_2) z(t_1 + \tau_2) d\tau_2 \quad (86)$$

Αν κάνουμε μία αλλαγή μεταβλητής  $\tau' = t_2 - \tau_2$  τότε το παραπάνω ολοκλήρωμα πάλι θα γραφεί με την μορφή συγκερασμού:

$$R_{YY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(-\tau') z(t_1 - t_2 - \tau') d\tau' = z(t_1 - t_2) \otimes h(-(t_1 - t_2)) = R_{XX}(t_1 - t_2) \otimes h(t_1 - t_2) \otimes h(-(t_1 - t_2)) \quad (87)$$

Από την παραπάνω σχέση επομένως προκύπτει ότι το  $R_{YY}(t_1, t_2)$  εξαρτάται μόνο από το  $t_1 - t_2$  οπότε το  $Y$  είναι ένα στατικό σήμα και έχουμε:

$$R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau) \quad (88)$$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την **PSD** της εξόδου  $S_Y(f)$  τότε θα πρέπει να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό **Fourier** της παραπάνω σχέσης,

$$S_Y(f) = \mathcal{F}\{R_{XX}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)\} = \mathcal{F}\{R_{XX}(\tau)\} \mathcal{F}\{h(\tau)\} \mathcal{F}\{h(-\tau)\} \quad (89)$$

Αν  $H(f) = \mathcal{F}\{h(\tau)\}$  είναι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος και  $S_X(f) = \mathcal{F}\{R_{XX}(\tau)\}$  είναι η **PSD** του σήματος εισόδου, θα έχουμε:

$$S_Y(f) = S_X(f) H(f) H^*(f) = S_X(f) |H(f)|^2 \quad (90)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός **Fourier** του  $h(-\tau)$  είναι το συζυγές  $H^*(f)$  του  $H(f)$ .

Επομένως:“ όταν ένα στατικό τυχαίο σήμα  $X(t)$  τοποθετείται στην είσοδο ενός **LT** συστήματος με κρουστική απόκριση  $h(t)$ , τότε η έξοδος του  $Y(t)$  είναι επίσης στατική και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δίνεται από τον διπλό συγκερασμό:

$$R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \quad (91)$$

ενώ η **PSD** εξόδου  $S_Y(f)$  συνδέεται με την **PSD** εισόδου  $S(f)$  βάσει της σχέσης:

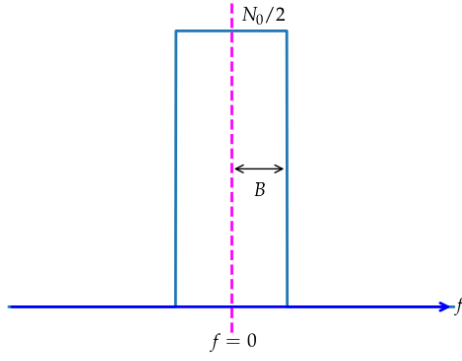
$$S_Y(f) = S_X(f) H(f) H^*(f) = S_X(f) |H(f)|^2 \quad (92)$$

## 5 Θόρυβος

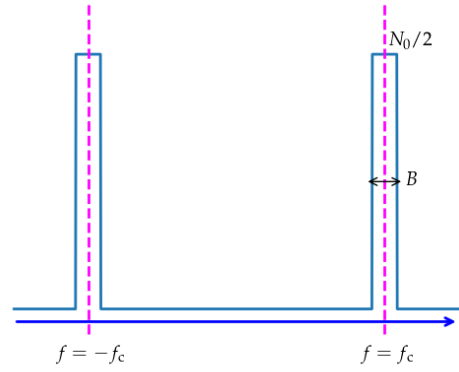
Στις επικοινωνίες θα δούμε ότι στον δέκτη πάντα προστίθεται ένα τυχαίο σήμα  $n(t)$  που ονομάζεται θόρυβος. Η φασματική πυκνότητα ισχύος του  $n(t)$ ,  $S_n(f)$  παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στις επιδόσεις του συστήματος. Συχνά θεωρούμε ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος είναι σταθερή στο διάστημα των συχνοτήτων που μας ενδιαφέρει και γράφουμε

$$S_n(f) = \frac{N_0}{2} \quad (93)$$

Στην παραπάνω εξίσωση το  $N_0$  ονομάζεται συχνά *φασματική πυκνότητα ισχύος θορύβου*. Θεωρούμε ότι ο θόρυβος  $n(t)$  είναι ένα πραγματικό σήμα οπότε το φάσμα του θα εκτείνεται και στις θετικές και στις αρνητικές συχνότητες. Στην εικόνα 3, δείχνουμε δύο παραδείγματα φάσματος λευκού θορύβου ο οποίος όμως έχει περιοριστεί σε ένα μικρό εύρος ζώνης  $B$  στις χαμηλές συχνότητες (εικόνα 3a) ή γύρω από ένα μικρό εύρος ζώνης στις υψηλές συχνότητες (εικόνα 3b). Και στις δύο περιπτώσεις είναι εύκολο να δούμε ότι η αναμενόμενη ισχύς του θορύβου  $\mathbb{E}\{n^2(t)\}$  θα

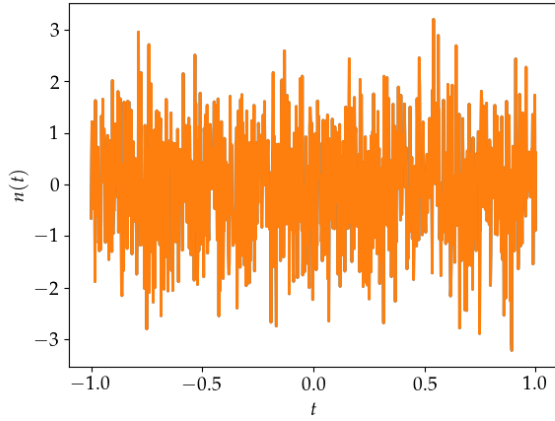


(a)

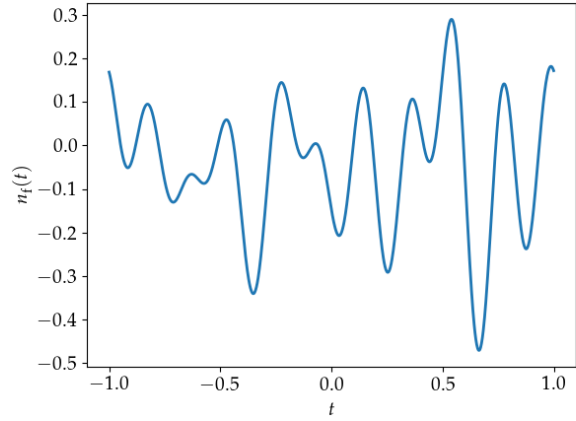


(b)

Εικόνα 3: Λευκός θόρυβος στις χαμηλές και στις υψηλές συχνότητες.



(a)



(b)

Εικόνα 4: (a) Λευκός και (b) χρωματισμένος θόρυβος.

είναι το εμβαδό  $\int S_X(f)df$  της  $S_X(f) = N_0/2$  μέσα στο εύρος των συχνοτήτων που μας ενδιαφέρουν, δηλαδή η ισχύς του  $P(t)$  δίνεται από την:

$$P(t) = \mathbb{E} \{n^2(t)\} = N_0 B \quad (94)$$

Αν θεωρήσουμε ότι ο θόρυβος είναι στατικός, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος:

$$R_{nn}(t_1, t_2) = R_{nn}(t_1 - t_2) = \mathbb{E} \{n(t_1)n(t_2)\} = \frac{N_0}{2} \delta(t_1 - t_2) \quad (95)$$

όπου χρησιμοποίησαμε ότι ο μετασχηματισμός **Fourier** μίας σταθερά είναι μία συνάρτηση  $\delta(t)$ .

Εξετάζοντας την (95), προκύπτουν δύο ενδιαφέροντα συμπεράσματα. Το πρώτο είναι ότι εάν  $t_1 \neq t_2$  τότε θα έχουμε  $R_{nn}(t_1, t_2) = 0$  και επομένως η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι μηδέν. Στην περίπτωση όπου τα  $n(t)$  έχουν κανονική κατανομή (κάτι που θα υποθέσουμε και παρακάτω στις επόμενες ενότητες), τότε έπεται ότι το  $n(t_1)$  είναι ανεξάρτητο του  $n(t_2)$ . Επομένως αν παρατηρούμε το θόρυβο την στιγμή  $t = t_1$  και  $t_2 > t_1$  τότε η μελλοντική τιμή του θορύβου  $n(t_2)$  δεν εξαρτάται καθόλου από την τιμή του σε μία προηγούμενη χρονική στιγμή όπως η  $t_1$ .

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 plt.rcParams.update({
5     "text.usetex": True,
6     "font.family": "serif",
```

```

7     "font.serif": ["Palatino"],
8     "font.size" : 12,
9     "lines.linewidth" : 2,
10 })
11
12
13 B = 10
14 H = lambda f: (np.abs(f)<=B/2).astype(float)
15 Tmax = 1
16 Nsamples = 1024
17 t = np.linspace(-Tmax, Tmax, Nsamples)
18
19 plt.rcParams.update({
20     "text.usetex": True,
21     "font.family": "serif",
22     "font.serif": ["Palatino"],
23     "font.size" : 14,
24     "lines.linewidth" : 2,
25 })
26
27 # Calculate spectrum using FFT
28 def calc_spectrum(x, t):
29     Dt = t[1] - t[0]
30     N = t.size
31     Df = 1 / Dt / N
32     f = np.arange( -N / 2, N / 2 ) * Df
33     X = Dt * np.fft.fftshift(
34         np.fft.fft(
35             np.fft.fftshift(x) ) )
36     return X, f
37
38 # Inverse the spectrum using IFFT
39 def calc_inv_spectrum(X, f):
40     Df = f[1] - f[0]
41     N = f.size
42     Dt = 1 / Df / N
43     t = np.arange( -N / 2, N / 2 ) * Dt
44     x = 1 / Dt * np.fft.fftshift(
45         np.fft.ifft(
46             np.fft.fftshift(X) ) )
47     return x, t
48
49 # System output
50 def system_output(x, t, H):
51     X, f = calc_spectrum(x, t)
52     Y = X * H(f)
53     return calc_inv_spectrum(Y, f)
54
55
56 # white noise samples
57 n = np.random.randn( Nsamples )
58
59 plt.close('all')
60 plt.figure(1)
61 plt.plot(t, n)
62 plt.xlabel('$t$')
63 plt.ylabel('$n(t)$')
64 plt.plot(t, n)
65
66 # filtered noise samples
67 nf, t = system_output(n, t, H)
68 plt.figure(2)
69 plt.plot(t, nf)
70 plt.xlabel('$t$')
71 plt.ylabel('$n_{\mathrm{f}}(t)$')

```

Listing 4: noises.py

Στην εικόνα 4 δείχνουμε παραδείγματα σημάτων θορύβου που παράγονται χρησιμοποιώντας το [listing 4](#). Στην περίπτωση της εικόνας 4a, τα δείγματα του θορύβου έχουν παραχθεί απευθείας από την `randn` η οποία παράγει ανεξάρτητα μεταξύ τους δείγματα με μέση τιμή μηδέν και επομένως η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης τους θα είναι μηδέν, όπως δηλαδή και στην περίπτωση του λευκού θορύβου. Στην περίπτωση της εικόνας 4b, περνάμε τα δείγματα του θορύβου από ένα σύστημα το οποίο έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| < B/2 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (96)$$

Με τον τρόπο αυτό, κόβουμε τις υψηλές συχνότητες και φιλτράρονται οι πολύ γρήγορες μεταβάσεις των δειγμάτων της εικόνας 4a και δημιουργείται μία συσχέτιση μεταξύ τους όπως φαίνεται στην εικόνα 4b. Θυμηθείτε η PSD δίνεται από την σχέση (92) και επομένως θα έχουμε:

$$S_Y(f) = \begin{cases} S_X(f), & |f| < B/2 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (97)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, η PSD του σήματος  $Y(t)$  στην έξοδο του συστήματος ταυτίζεται με την PSD στην είσοδο όταν η συχνότητα είναι μικρότερη του  $B$ . Για συχνότητες μεγαλύτερες του  $B$ , το  $S_Y(f)$  είναι μηδέν. Για τον λόγο αυτό παρατηρείται η συμπεριφορά στην εικόνα 4b.

Ένα δεύτερο συμπέρασμα το οποίο αρχικά μπορεί να μας ξενίσει είναι ότι όταν  $t_1 = t_2$  τότε θα έχουμε  $R_{nn}(t_1, t_1) = \mathbb{E}\{n^2(t_1)\} = \frac{N_0}{2}\delta(0)$  και αν θυμηθούμε ότι το  $\delta(t)$  τείνει στο άπειρο ( $\infty$ ) όταν το  $t$  τείνει στο μηδέν οπότε και το  $\mathbb{E}\{n^2(t_1)\}$  θα είναι άπειρο,  $\mathbb{E}\{n^2(t_1)\} \rightarrow \infty$ . Επομένως η στιγμιαία ισχύς του  $n(t)$ ,  $P(t) = \mathbb{E}\{n^2(t)\}$  είναι και αυτή άπειρη. Πως γίνεται αυτό; Ας ξαναδούμε την (94). Όταν το εύρος ζώνης που κοιτάμε τον θόρυβο είναι  $B$  τότε η ισχύς του είναι ανάλογη του  $B$ . Αν κοιτάζαμε τον θόρυβο σε όλη τον άξονα των συχνοτήτων ( $B \rightarrow \infty$ ) επομένως θα έχουμε και  $P(t) \rightarrow \infty$ . Στην πράξη βέβαια δεν μπορούμε να μετρήσουμε το θόρυβο σε ολόκληρο τον άξονα των συχνοτήτων. Για παράδειγμα αν ο θόρυβος είναι ένα σήμα τάσης, τότε ο παλμογράφος που θα χρησιμοποιήσουμε θα έχει μία απόκριση σαν αυτήν της σχέσης (96), οπότε θα μπορεί να "ακούσει" ένα εύρος συχνοτήτων  $f \in [-B, B]$  όπου για κοινούς παλμογράφους συνήθως το  $B$  είναι της τάξης των μερικών MHz ενώ για πιο εξελιγμένους παλμογράφους (και πιο ακριβούς) το  $B$  μπορεί να φτάσει τα μερικές δεκάδες GHz. Επομένως είμαστε περιορισμένοι σε ένα φασματικό εύρος όπως δείχνει η εικόνα 3a ή κάποιες άλλες φορές η εικόνα 3b και τελικά η ισχύς του θορύβου είναι πεπερασμένη και όχι άπειρη.

## 5.1 Θόρυβος AWGN

Στις επικοινωνίες συχνά θεωρούμε ότι ο θόρυβος είναι προσθετικός *Gaussian* λευκός (additive white Gaussian noise - AWGN) με μηδενική μέση τιμή. Αυτό σημαίνει ότι:

- *Μηδενική μέση τιμή*: οι τυχαίες μεταβλητές  $N_i = N(t_i)$  έχουν μηδενική αναμενόμενη τιμή:

$$\mathbb{E}\{N_i\} = 0 \quad (98)$$

- *Λευκός θόρυβος*: Η PSD του θορύβου δίνεται από την (93) και ως εκ τούτου έχει στατική συμπεριφορά και η διακύμανση είναι ίδια για όλα τα  $N_i = N(t_i)$ ,

$$\sigma_n^2 = \mathbb{E}\{N_i^2\} \quad (99)$$

Επίσης δεδομένου ότι για  $t_p \neq t_q$  θα έχουμε  $R_{NN}(t_p, t_q) = 0$ , έπεται ότι

$$\rho = \frac{1}{\sigma_n^2} \mathbb{E}\{N_p N_q\} = \mathbb{E}\{N(t_p)N(t_q)\} = 0 \quad (100)$$

οπότε ο συντελεστής συσχέτισης είναι μηδέν,  $\rho = 0$ .

- *Προσθετικός θόρυβος*. Ο θόρυβος  $N(t)$  προστίθεται στο σήμα. Δηλαδή εάν το αρχικό σήμα στον πομπό είναι το  $x(t)$  τότε το σήμα παρουσία θορύβου  $Y(t)$  είναι  $Y(t) = x(t) + N(t)$ .
- *Gaussian* θόρυβος. Αυτό σημαίνει ότι οι τυχαίες μεταβλητές  $N_i = n(t_i)$  ακολουθούν κανονική κατανομή. Δεδομένου ότι έχουν μηδενική μέση τιμή, διακύμανση  $\sigma_n^2$  και συντελεστή συσχέτισης  $\rho = 0$ , η συνδυασμένη πυκνότητα πιθανότητας τους θα είναι

$$f_{NN}(n_p, n_q) = \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{n_p^2 + n_q^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (101)$$

Αν υποθέσουμε ότι ένας AWGN θόρυβος  $n(t)$  περνάει από ένα σύστημα LTI, υπάρχουν μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες για την έξοδο του συστήματος  $Y(t)$  που θα την χρησιμοποιήσουμε και στα παρακάτω. Σύμφωνα με τα όσα ξέρουμε για τα LTI συστήματα, θα πρέπει να έχουμε:

$$Y(t) = N(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} N(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (102)$$

όπου  $h(t)$  είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος. Τότε η αναμενόμενη τιμή της εξόδου  $Y(t)$  θα είναι:

$$\mu_Y(t) = \mathbb{E}\{Y(t)\} = \mathbb{E}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} N(\tau)h(t-\tau)d\tau\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}\{N(\tau)\}h(t-\tau)d\tau = 0 \quad (103)$$

Όπως γνωρίζουμε από τα προηγούμενα, η φασματική πυκνότητα της εξόδου θα είναι

$$S_Y(f) = S_N(f)|H(f)|^2 = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2 \quad (104)$$

Η διακύμανση  $\sigma_Y^2(t)$  της  $Y(t)$  δίνεται από την σχέση:

$$\sigma_Y^2(t) = \mathbb{E}\{Y^2(t)\} = R_{YY}(0) \quad (105)$$

Δεδομένου ότι το  $R_{YY}(\tau)$  είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός **Fourier** του  $S_Y(f)$  θα έχουμε

$$\sigma_Y^2(t) = R_{YY}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f)df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt \quad (106)$$

Όσο και αν φαίνεται δύσκολο, είναι δυνατόν να υπολογίσουμε και την **PDF** του  $Y(t)$ . Ξεκινάμε από το γεγονός ότι ένα οποιοδήποτε ολοκλήρωμα μπορεί να προσεγγιστεί από ένα άθροισμα, π.χ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)d\tau \cong \sum_{q=-\infty}^{\infty} g(\tau_q)\Delta\tau \quad (107)$$

όπου τα  $\tau_q$  είναι της μορφής  $\tau_q = q\Delta\tau$  και έχουμε επιλέξει το  $\Delta\tau$  αρκετά μικρό για να προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα με ακρίβεια. Επομένως θα έχουμε:

$$Y(t) \cong \sum_{q=-\infty}^{\infty} N(\tau_q)h(t-\tau_q)\Delta\tau \quad (108)$$

Σύμφωνα με την (108), η  $Y(t)$  προκύπτει ως άθροισμα των μεταβλητών  $N(t_q)h(t-t_q)\Delta\tau$ . Εφόσον οι  $N(t_q)$  είναι κανονικές τυχαίες μεταβλητές και οι  $N(t_q)h(t-t_q)\Delta\tau$  θα είναι κανονικές και ως εκ τούτου το  $(t)$  θα ακολουθεί κανονική κατανομή με **PDF**,

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_Y^2}\right) \quad (109)$$

## 6 Ώρα για σπαζοκεφαλίες

1. Αλλάξτε το **listing 3** έτσι ώστε το  $p(t)$  να είναι ένας παλμός που λαμβάνεται στην αντίσταση ή στον πυκνωτή ενός κυκλώματος  $RC$  και κάντε γραφική παράσταση της φασματικής πυκνότητας ισχύος της παλμοσειράς  $S_X(f)$ . Τι παρατηρείτε;
2. Γράψτε ένα **Python script** για να μελετήσετε την έξοδο  $Y(t)$  ενός **LTI** συστήματος όταν στην είσοδο του έχουμε **AWGN**. Υπολογίστε με προσομοίωση **Monte Carlo** την **PDF** του  $Y$  και συγκρίνετε την με την (109).