Κβαντικοί Υπολογιστές και Αλγόριθμοι

Διάλεξη 3η

Θωμάς Καμαλάκης

Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο Αθηνών

2026

Περιεχόμενα

1 Οι βασικές αρχές

2 Καταστάσεις Bell και διεμπλοκή

3 Ερμηνείες της κυματοσυνάρτησης

4 Η γάτα του Schrödinger

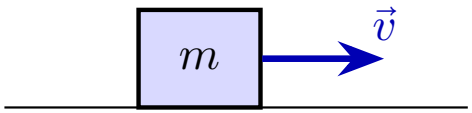
5 Αποσυμφωνία

Αξιώματα στη φυσική

- Κάθε θεωρία στηρίζεται σε *αξιώματα*: αλήθειες που δεχόμαστε χωρίς απόδειξη και χρησιμοποιούμε για να εξηγήσουμε φαινόμενα.
- Η κλασική φυσική έχει τους τρεις νόμους του Νεύτωνα:
  1. *Αδράνεια*: ένα σώμα παραμένει ακίνητο ή κινείται με σταθερή ταχύτητα αν δεν ασκείται συνισταμένη δύναμη.
  2. *Δυναμική*: η μεταβολή της κίνησης καθορίζεται από τη συνισταμένη δύναμη, $\vec{F} = m\vec{a}$.
  3. *Δράση – αντίδραση*: οι δυνάμεις μεταξύ δύο σωμάτων είναι ίσες και αντίθετες.
- Δεν μας εξηγούν *γιατί* ισχύουν: τους εφαρμόζουμε για να προβλέψουμε την κίνηση των σωμάτων.

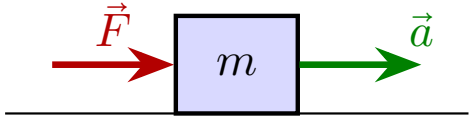
Οι νόμοι του Νεύτωνα

1ος νόμος



$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{σταθ.}$

2ος νόμος



$\vec{F} = m\vec{a}$

3ος νόμος



$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Και η κβαντική θεωρία έχει αξιώματα

- Στο προηγούμενο μάθημα χρησιμοποιήσαμε πολλά πράγματα χωρίς να τα δικαιολογήσουμε, π.χ. ότι το σύστημα περιγράφεται από μια κυματοσυνάρτηση $|\psi\rangle$.
- Η κβαντική θεωρία έχει επίσης τα *αξιώματά* της: είναι καιρός να τα βάλουμε σε μια σειρά.

Το πρώτο αξίωμα: χώρος Hilbert

Αξίωμα 1

Σε κάθε απομονωμένο φυσικό σύστημα αντιστοιχεί ένας χώρος κυματοσυναρτήσεων με εσωτερικό γινόμενο, και η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από μια κυματοσυνάρτηση $|\psi\rangle$ του χώρου αυτού.

- Ένας *διανυσματικός χώρος* αποτελείται από διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ και βαθμωτούς (στην κβαντική μηχανική μιγαδικούς αριθμούς).
- Συνδέονται με δύο πράξεις: την πρόσθεση διανυσμάτων και τον πολλαπλασιασμό διανύσματος με βαθμωτό.
- Παράδειγμα: ο $\mathbb{R}^2$ των διανυσμάτων του επιπέδου $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$.

Ιδιότητες του διανυσματικού χώρου

- Κλειστότητα: τα $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ και $a\mathbf{u}$ ανήκουν στον χώρο
- Αντιμεταθετικότητα: $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
- Προσεταιριστικότητα της πρόσθεσης: $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$
- Μηδενικό διάνυσμα: $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$
- Αντίθετο διάνυσμα: $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$
- Επιμεριστικότητα ως προς τα διανύσματα: $a(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$
- Επιμεριστικότητα ως προς τα βαθμωτά: $(a+b)\mathbf{u}=a\mathbf{u}+b\mathbf{u}$
- Προσεταιριστικότητα των βαθμωτών: $(ab)\mathbf{u}=a(b\mathbf{u})$
- Μοναδιαίος βαθμωτός: $1\,\mathbf{u}=\mathbf{u}$

Εσωτερικό γινόμενο, νόρμα, πληρότητα

- Το *εσωτερικό γινόμενο* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ αντιστοιχίζει σε κάθε ζεύγος διανυσμάτων έναν αριθμό. Σε πραγματικό χώρο ισχύουν:
  - γραμμικότητα: $\langle a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$,
  - συμμετρία: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$,
  - θετικότητα: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$, με ισότητα μόνο για $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- Η *νόρμα* (μήκος) είναι $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$ και για καταστάσεις $\| |\psi\rangle \| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}$.
- Ο χώρος είναι *πλήρης* αν κάθε ακολουθία διανυσμάτων που συγκλίνει σε κάποιο $\mathbf{v}$ έχει όριο μέσα στον χώρο: δεν έχει "κενά".

Χώρος Hilbert

Διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, πλήρης ως προς τη νόρμα του.

Ο χώρος Hilbert ενός και δύο qubit

- Ένα qubit: ο $\mathbb{C}^2$, με

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle\,, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

- Δύο qubit: ο $\mathbb{C}^4$, με βάση τις καταστάσεις $|c_1 c_2\rangle = |c_1\rangle\,|c_2\rangle$:

$$|00\rangle\,,\ |01\rangle\,,\ |10\rangle\,,\ |11\rangle$$

- Οι $|c_1 c_2\rangle$ *είναι καθαρές καταστάσεις: η μέτρηση κατά* z *δίνει με βεβαιότητα το αποτέλεσμα. Η γενική κατάσταση είναι υπέρθεση:*

$$|\psi\rangle = a\,|00\rangle + b\,|01\rangle + c\,|10\rangle + d\,|11\rangle\,, \qquad |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$$

- Για τη θέση ενός ηλεκτρονίου ο χώρος Hilbert έχει άπειρη διάσταση: οι καταστάσεις είναι συναρτήσεις $\psi(x)$.

Το δεύτερο αξίωμα: εξέλιξη

Αξίωμα 2

Η εξέλιξη ενός απομονωμένου κβαντικού συστήματος περιγράφεται από έναν μοναδιαίο τελεστή $\hat{U}$:

$$|\psi(t_1)\rangle = \hat{U}\,|\psi(t_0)\rangle$$

- Η θεωρία δεν λέει ποιος είναι ο $\hat{U}$, μόνο ότι υπάρχει.
- Παράδειγμα: η πύλη NOT, $\hat{X}\,(a\,|0\rangle + b\,|1\rangle) = b\,|0\rangle + a\,|1\rangle$, με πίνακα $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
- Ο $\hat{U}$ περιγράφεται με μοναδιαίο πίνακα $\mathbf{U}$ ως προς μια ορθοκανονική βάση, με στοιχεία $u_{pq} = \langle\psi_p|\,\hat{U}\,|\psi_q\rangle$.

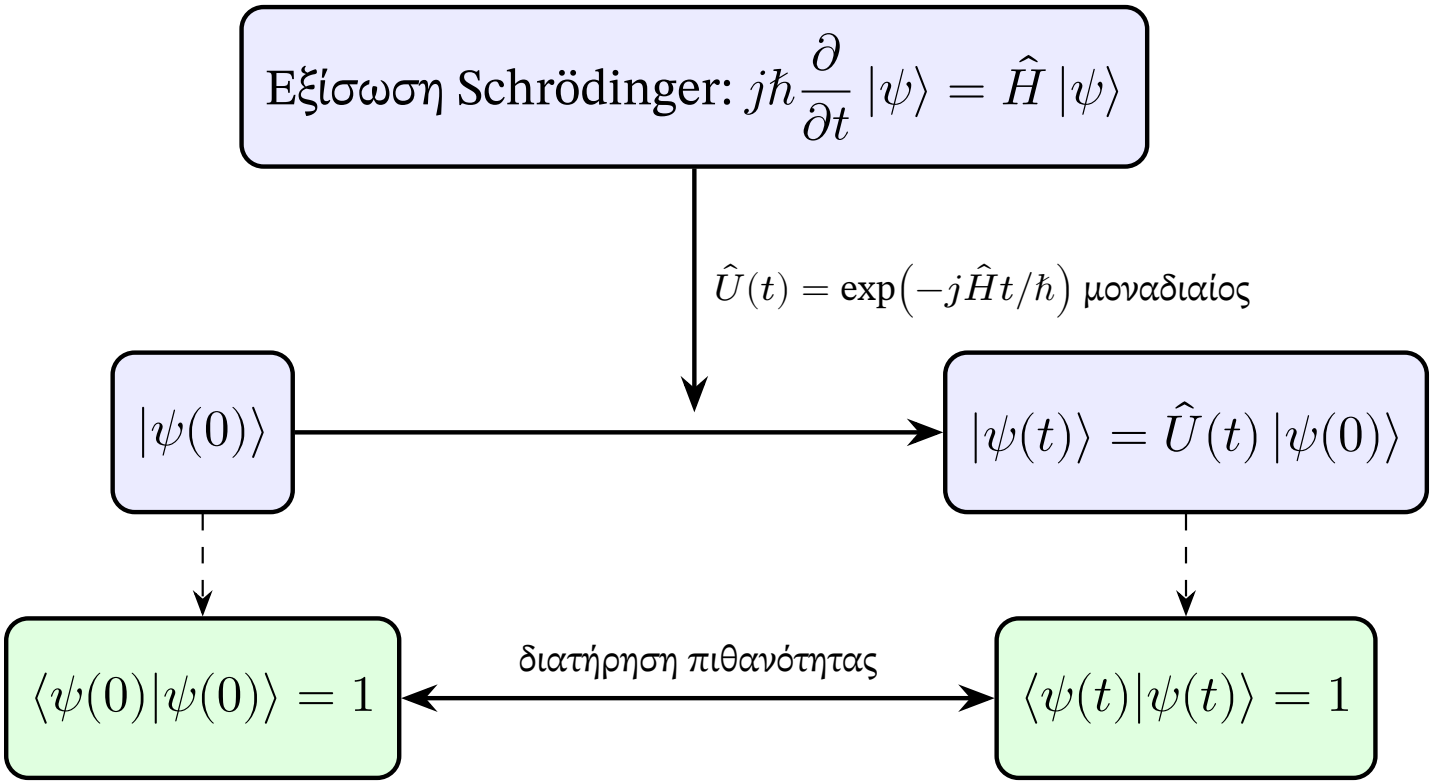
Παράδειγμα: πύλη δύο qubit

Η πύλη αφήνει το πρώτο qubit αμετάβλητο και εφαρμόζει NOT στο δεύτερο: $\hat{U}\left|c_1 c_2\right\rangle = \left|c_1\right\rangle\left|\overline{c_2}\right\rangle$. Άρα $\left|00\right\rangle \leftrightarrow \left|01\right\rangle$ και $\left|10\right\rangle \leftrightarrow \left|11\right\rangle$, και $u_{pq} = 1$ όταν $\hat{U}\left|\psi_q\right\rangle = \left|\psi_p\right\rangle$, αλλιώς 0:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{U}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a \\ d \\ c \end{bmatrix}$$

για $\left|\psi\right\rangle = a\left|00\right\rangle + b\left|01\right\rangle + c\left|10\right\rangle + d\left|11\right\rangle$. Τα πλάτη ανταλλάσσονται μόνο μεταξύ καταστάσεων με το ίδιο c_1.

Η εξίσωση Schrödinger οδηγεί σε μοναδιαία εξέλιξη



Το τρίτο αξίωμα: μέτρηση

Αξίωμα 3

Κάθε μετρήσιμο μέγεθος περιγράφεται από Ερμιτιανό τελεστή $\hat{H}$, με $\hat{H}\,|\psi_m\rangle = \lambda_m\,|\psi_m\rangle$. Οι ιδιοτιμές λ_m είναι τα πιθανά αποτελέσματα και, αν μετρήσουμε το λ_m, το σύστημα βρίσκεται μετά στην ιδιοκατάσταση $|\psi_m\rangle$.

- Η πιθανότητα του αποτελέσματος λ_m για σύστημα στην $|\psi\rangle$ είναι

$$P_m = \langle\psi|\,\hat{\mathcal{P}}_m\,|\psi\rangle = |\,\langle\psi_m|\psi\rangle\,|^2, \qquad \hat{\mathcal{P}}_m = |\psi_m\rangle\,\langle\psi_m|$$

- Η κατάσταση μετά τη μέτρηση: $\dfrac{\hat{\mathcal{P}}_m\,|\psi\rangle}{\sqrt{P_m}} = |\psi_m\rangle$ (ως προς φάση).
- Επίσης $\hat{H} = \sum_m \lambda_m \hat{\mathcal{P}}_m$ και $\mathbb{E}\{f(H)\} = \langle\psi|\,f(\hat{H})\,|\psi\rangle$.

Συμβιβαστά μεγέθη

- Μετράμε διαδοχικά τα A και B. Αν οι $\hat{A}$, $\hat{B}$ έχουν *κοινή* βάση ιδιοδιανυσμάτων, μετά τη μέτρηση του A το B δίνει με βεβαιότητα το αντίστοιχο β_m και τα μεγέθη είναι *συμβιβαστά*.
- Αλλιώς η μέτρηση του ενός εισάγει αβεβαιότητα στο άλλο.
  Παράδειγμα (spin κατά z και x):

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{μέτρηση } z} |1\rangle \xrightarrow{\text{μέτρηση } x} \begin{cases} |+x\rangle & \text{με πιθανότητα } 50\% \\ |-x\rangle & \text{με πιθανότητα } 50\% \end{cases}$$

και τα $|\pm x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$ είναι υπερθέσεις, άρα χάνεται η βεβαιότητα για το z.

Κριτήριο

Τα A, B είναι συμβιβαστά όταν αντιμετατίθενται: $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$.

Μεταθέτες των πινάκων Pauli

Για τους $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ έχουμε $\mathbf{XY} = j\mathbf{Z}$, $\mathbf{YX} = -j\mathbf{Z}$, άρα:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = 2j\mathbf{Z}, \qquad [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] = 2j\mathbf{X}, \qquad [\mathbf{Z}, \mathbf{X}] = 2j\mathbf{Y}$$

- Οι δείκτες ακολουθούν την κυκλική σειρά $x \to y \to z \to x$.
- Κανένας μεταθέτης δεν μηδενίζεται: το spin κατά δύο διαφορετικούς άξονες δεν είναι ποτέ συμβιβαστό.
- Η μέτρηση του spin σε έναν άξονα εισάγει πάντα αβεβαιότητα στο spin κατά οποιονδήποτε άλλο μη παράλληλο άξονα.

Η σχέση αβεβαιότητας

- Μέση τιμή και διασπορά στην κατάσταση $|\psi\rangle$:

$$\mu_A = \langle\psi| \hat{A} |\psi\rangle , \qquad \sigma_A^2 = \langle\psi| (\hat{A} - \mu_A)^2 |\psi\rangle$$

- Αν είμαστε απόλυτα βέβαιοι για την τιμή του A, τότε $\sigma_A^2 = 0$. Η τυπική απόκλιση σ_A μετρά την αβεβαιότητά μας για το A.

Σχέση αβεβαιότητας

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle\psi| [\hat{A}, \hat{B}] |\psi\rangle \right|^2$$

- Ο μεταθέτης θέτει κάτω όριο στο γινόμενο των αβεβαιοτήτων: όταν οι τελεστές δεν αντιμετατίθενται, τα δύο μεγέθη δεν μπορούν να είναι ταυτόχρονα απολύτως καθορισμένα.

Η σχέση αβεβαιότητας: σχόλια και παράδειγμα

- Τα σ_A, σ_B προκύπτουν από *διαφορετικά* πειράματα: επαναλαμβάνουμε την προετοιμασία της ίδιας $|\psi\rangle$, μετράμε άλλοτε το A και άλλοτε το B, και υπολογίζουμε στατιστικά μέση τιμή και διασπορά. Δεν μετράμε τα δύο μεγέθη ταυτόχρονα στο ίδιο σύστημα.
- Η αβεβαιότητα δεν είναι σφάλμα των οργάνων ή έλλειψη γνώσης: είναι η στατιστική διασπορά που προκύπτει από την ίδια την κβαντική κατάσταση.
- Spin στους άξονες x, z: $[\hat{H}_x, \hat{H}_z] = -j\hbar\hat{H}_y$, άρα

$$\sigma_{H_x}\sigma_{H_z} \geq \frac{\hbar}{2}\left|\langle\psi|\,\hat{H}_y\,|\psi\rangle\right|$$

- Για $|\psi\rangle = |{+y}\rangle$ το όριο είναι $\hbar^2/4$. Πράγματι $\sigma_{H_x} = \sigma_{H_z} = \hbar/2$ (τιμές $\pm\hbar/2$ με πιθανότητα 50%), άρα η σχέση γίνεται ισότητα.
- Το κάτω όριο εξαρτάται από την κατάσταση $|\psi\rangle$ μέσω της $\langle\psi|\,\hat{H}_y\,|\psi\rangle$.

Το τέταρτο αξίωμα: τανυστικό γινόμενο

Αξίωμα 4

Ο χώρος Hilbert ενός σύνθετου συστήματος είναι το τανυστικό γινόμενο $\otimes$ των χώρων των επιμέρους συστημάτων. Αν τα συστήματα είναι ανεξάρτητα, με καταστάσεις $|\psi\rangle$ και $|\phi\rangle$, η συνολική κατάσταση είναι $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = |\psi\phi\rangle$.

- Για δύο qubit $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ και $|\phi\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle$ (επιμεριστική ιδιότητα):

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$$

- Οι πιθανότητες πολλαπλασιάζονται: $\Pr\{c_1 = 0, c_2 = 0\} = |a|^2|c|^2$, κ.ο.κ., άρα τα qubit είναι ανεξάρτητα.
- Γενικά: $\left(\sum_p a_p |\psi_p\rangle\right) \otimes \left(\sum_q b_q |\phi_q\rangle\right) = \sum_{p,q} a_p b_q |\psi_p\rangle \otimes |\phi_q\rangle$.

Διαχωρίσιμες και διεμπλεγμένες καταστάσεις

- Δεν γράφεται κάθε κατάσταση δύο qubit ως $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$. Η κατάσταση Bell
$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$$
θα απαιτούσε $ac = bd = \frac{1}{\sqrt{2}}$ και $ad = bc = 0$, αδύνατο (αν $a = 0$ τότε $ac = 0$, αν $d = 0$ τότε $bd = 0$).
- *Διαχωρίσιμες* (separable) καταστάσεις: $|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$.
- *Διεμπλεγμένες* (entangled) καταστάσεις: $|\Psi\rangle \neq |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$, χωρίς κλασικό ανάλογο.
- Εσωτερικό γινόμενο διαχωρίσιμων καταστάσεων:
$$\langle \phi_1 \otimes \phi_2 | \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle = \langle \phi_1 | \psi_1 \rangle \langle \phi_2 | \psi_2 \rangle$$
Άρα τα $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ είναι ορθοκανονική βάση του συστήματος δύο qubit.

Τανυστικό γινόμενο τελεστών

- Αν στο πρώτο qubit δρα ο $\hat{U}_1$ και στο δεύτερο ο $\hat{U}_2$, ο συνολικός τελεστής $\hat{U} = \hat{U}_1 \otimes \hat{U}_2$ ικανοποιεί

$$\hat{U}\left(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle\right) = \hat{U}_1 |\psi\rangle \otimes \hat{U}_2 |\phi\rangle$$

- Ο πίνακάς του έχει στοιχεία $U_{pq} = \alpha_{p_1 q_1} \beta_{p_2 q_2}$, δηλαδή μπλοκ:

$$\mathbf{U}_1 \otimes \mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_{11}\mathbf{U}_2 & \alpha_{12}\mathbf{U}_2 \\ \alpha_{21}\mathbf{U}_2 & \alpha_{22}\mathbf{U}_2 \end{bmatrix}$$

- Παράδειγμα: ο $\hat{X} \otimes \hat{I}$ αναστρέφει το πρώτο qubit,

$$\mathbf{X} \otimes \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

με $|00\rangle \to |10\rangle$, $|01\rangle \to |11\rangle$, $|10\rangle \to |00\rangle$, $|11\rangle \to |01\rangle$.

Οι καταστάσεις Bell

- Αλλάζοντας το πρόσημο ή/και τις βασικές καταστάσεις ($|01\rangle, |10\rangle$ αντί των $|00\rangle, |11\rangle$) προκύπτουν οι τέσσερις *καταστάσεις Bell*:

$$|\Phi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle \pm |11\rangle\right), \qquad |\Psi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle \pm |10\rangle\right)$$

- Και οι τέσσερις είναι διεμπλεγμένες (η απόδειξη είναι ίδια με της $|\Phi^{+}\rangle$).
- Είναι ανά δύο ορθογώνιες και έχουν νόρμα 1, άρα αποτελούν *ορθοκανονική βάση* του συστήματος δύο qubit, εναλλακτική της $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$. Π.χ.

$$\langle\Phi^{+}|\Phi^{-}\rangle = \tfrac{1}{2}\left(1 - 0 + 0 - 1\right) = 0, \qquad \langle\Phi^{+}|\Psi^{+}\rangle = \tfrac{1}{2}(0+0+0+0) = 0$$

Μέτρηση του πρώτου qubit της $|\Phi^+\rangle$

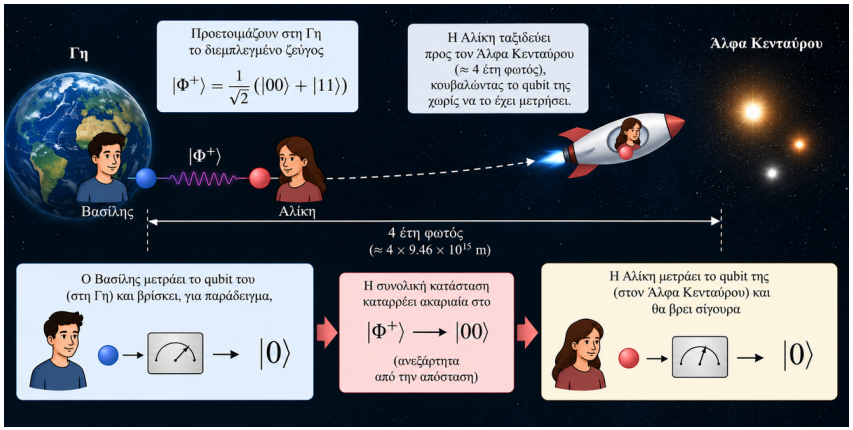
- Με τους προβολείς $\hat{\mathcal{P}}_{+1} = |0\rangle\langle 0| \otimes \hat{I}$ και $\hat{\mathcal{P}}_{-1} = |1\rangle\langle 1| \otimes \hat{I}$ (μέτρηση μόνο του πρώτου qubit):

$$\hat{\mathcal{P}}_{+1}|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle, \qquad \hat{\mathcal{P}}_{-1}|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

- Πιθανότητες $P_{+1} = P_{-1} = \frac{1}{2}$, και μετά τη μέτρηση το σύστημα βρίσκεται στο $|00\rangle$ ή στο $|11\rangle$ αντίστοιχα.
- Χωρίς να μετρήσουμε το δεύτερο qubit, γνωρίζουμε με βεβαιότητα την κατάστασή του: αν το πρώτο βρεθεί στο $|0\rangle$, το δεύτερο είναι στο $|0\rangle$, και αν στο $|1\rangle$, στο $|1\rangle$.
- Πριν τη μέτρηση κανένα qubit δεν είχε καθορισμένη κατάσταση. Η μέτρηση του πρώτου προκαλεί κατάρρευση της κοινής κυματοσυνάρτησης που επηρεάζει ακαριαία το δεύτερο, όσο μακριά κι αν είναι: η αλλόκοτη δράση από απόσταση (*spooky action at a distance*) του Αϊνστάιν.

Η Αλίκη και ο Βασίλης

- Ετοιμάζουν στη Γη ένα ζεύγος qubit στην $|\Phi^+\rangle$ και παίρνει ο καθένας από ένα.
- Η Αλίκη ταξιδεύει στον Άλφα Κενταύρου (≈ 4 έτη φωτός) χωρίς να μετρήσει το qubit της.
- Ο Βασίλης μετράει το δικό του και βρίσκει $|0\rangle$: η κοινή κατάσταση καταρρέει ακαριαία στο $|00\rangle$ και η Αλίκη θα βρει σίγουρα $|0\rangle$.



Δεν υπάρχει μετάδοση πληροφορίας

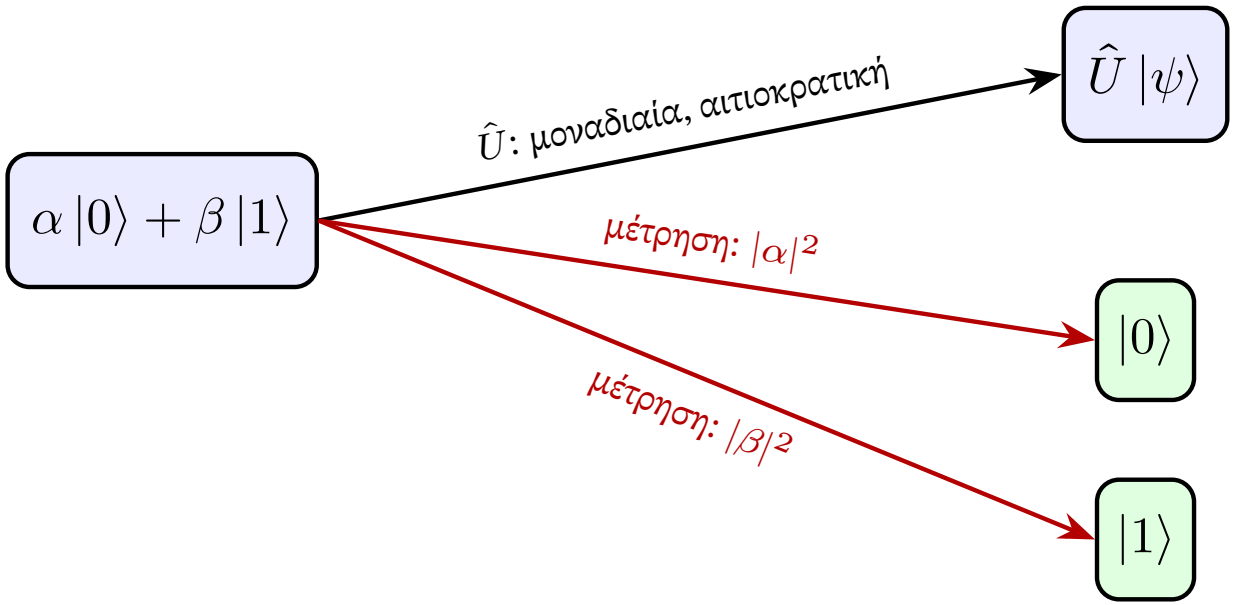
- Ο Βασίλης **δεν** μπορεί να στείλει μήνυμα ταχύτερα από το φως.
- Η Αλίκη, μετρώντας μόνο το δικό της qubit, βρίσκει πάντα $|0\rangle$ ή $|1\rangle$ με πιθανότητα 50%, είτε ο Βασίλης έχει μετρήσει είτε όχι. Κανένα πείραμα στο δικό της qubit δεν αποκαλύπτει αν το αποτέλεσμα ήταν ήδη προκαθορισμένο.
- Μόνο συγκρίνοντας τα αποτελέσματα (με συνηθισμένη επικοινωνία, όχι ταχύτερη από το φως) διαπιστώνουν ότι συμφωνούν πάντα.
- Η ακαριαία κατάρρευση δεν παραβιάζει την ειδική σχετικότητα: αποκαλύπτει μια συσχέτιση χωρίς κλασικό ανάλογο, συνέπεια της *κβαντικής διεμπλοκής* (entanglement).

Τι είναι το $|\psi\rangle$;

- *Μαθηματικός:* ένα διάνυσμα σε μιγαδικό διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο. Δεν χρειάζεται να αποφασίσει αν "υπάρχει".
- *Πληροφορικός:* η κατάσταση του συστήματος, με όλη την πληροφορία για τα αποτελέσματα των μετρήσεων. Μετράει τι μπορούμε να κάνουμε με αυτό: πύλες, εμπλοκή, μέτρηση.
- *Φυσικός:* το αντικείμενο που περιγράφει την κατάσταση ενός φυσικού συστήματος. Δεν είναι ένα "σύννεφο" που ταξιδεύει με το ηλεκτρόνιο, αλλά δίνει τις πιθανότητες των αποτελεσμάτων.
- *Φιλόσοφος:* υπάρχουν διαφορετικές ερμηνείες για το αν περιγράφει αντικειμενική πραγματικότητα ή πληροφορία και προσδοκίες ενός παρατηρητή.

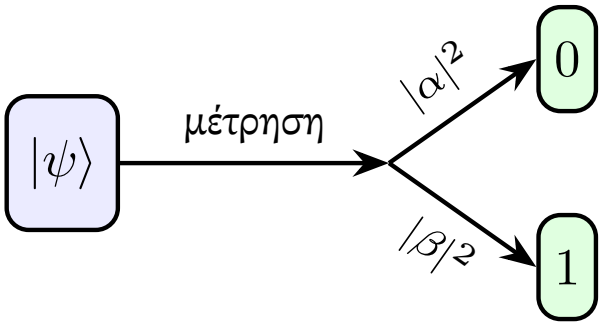
Για την κβαντική υπολογιστική αρκεί να ξέρουμε τους κανόνες που το διέπουν, όχι να λύσουμε το φιλοσοφικό πρόβλημα.

Το πρόβλημα της κβαντικής μέτρησης



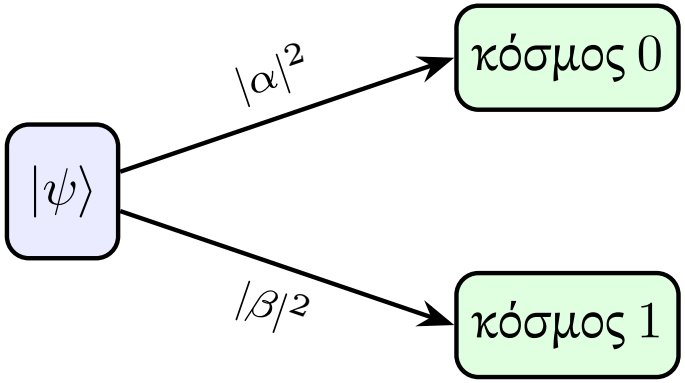
- Εξέλιξη: συνεχής και μοναδιαία. Μέτρηση: *κατάρρευση* σε $|0\rangle$ ή $|1\rangle$ με πιθανότητες $|\alpha|^2$, $|\beta|^2$.
- Τι ακριβώς είναι η μέτρηση και πότε γίνεται η κατάρρευση;

Ερμηνείες της κυματοσυνάρτησης (1)



Κοπεγχάγη

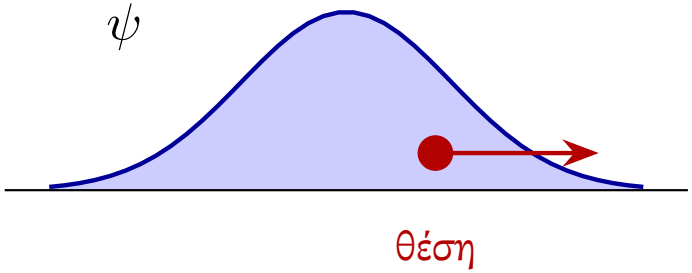
Η $|\psi\rangle$ δίνει τις πιθανότητες των αποτελεσμάτων, χωρίς να αντιστοιχεί απαραίτητα σε αντικείμενο ανεξάρτητο από τη μέτρηση.



Πολλοί κόσμοι

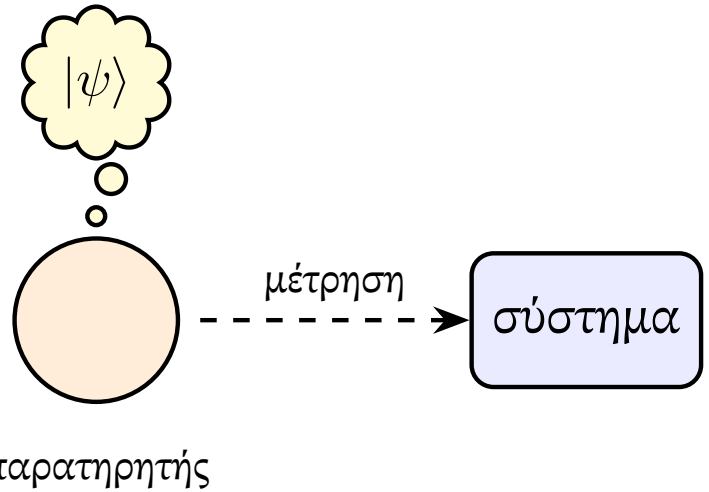
Η $|\psi\rangle$ είναι πραγματική και εξελίσσεται πάντα μοναδιαία. Δεν υπάρχει κατάρρευση: κάθε δυνατότητα είναι ένας κλάδος.

Ερμηνείες της κυματοσυνάρτησης (2)



de Broglie–Bohm

Η $|\psi\rangle$ είναι πραγματική και καθοδηγεί ένα σωματίδιο με καθορισμένη θέση.

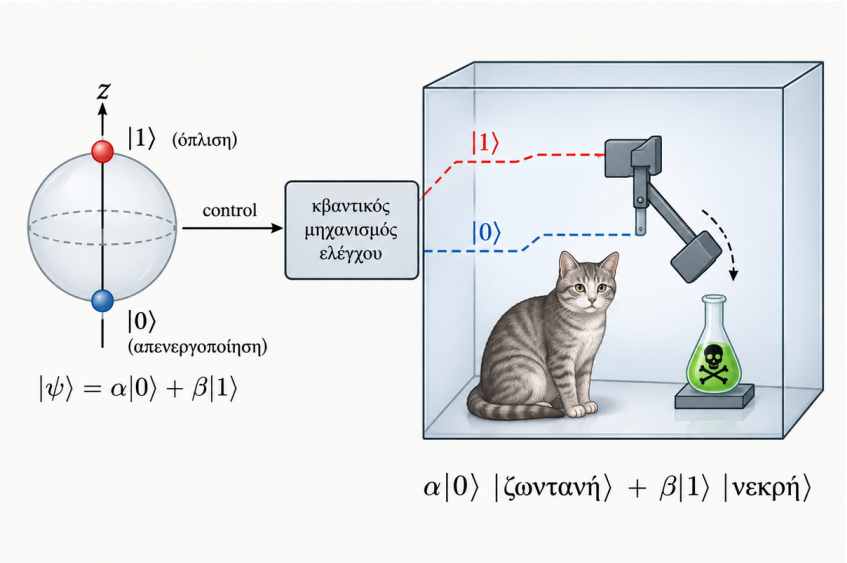


QBism

Η $|\psi\rangle$ εκφράζει τις προσδοκίες και την πληροφορία ενός παρατηρητή, όχι αντικειμενική ιδιότητα του συστήματος.

Η γάτα του Schrödinger: το πείραμα

- Μια γάτα σε κουτί, μαζί με συσκευή που ελέγχεται από ένα qubit: αν βρεθεί στο $|1\rangle$ απελευθερώνεται δηλητηριώδες αέριο και η γάτα πεθαίνει, αν στο $|0\rangle$ παραμένει ζωντανή.
- Μοντέλο με δύο qubit: το πρώτο ελέγχει τη συσκευή, το δεύτερο είναι η γάτα ($|0\rangle$ ζωντανή, $|1\rangle$ νεκρή).
- Για $t = 0$: $|\Psi(0)\rangle = |00\rangle$.



Εξέλιξη και διεμπλοκή με τη γάτα

- Το πρώτο qubit περνά σε υπέρθεση $\alpha(t)\,|0\rangle + \beta(t)\,|1\rangle$, ενώ η γάτα μένει ανεπηρέαστη. Η κατάσταση παραμένει διαχωρίσιμη:

$$\left(\hat{U}_1 \otimes \hat{I}\right)|00\rangle = \alpha(t)\,|00\rangle + \beta(t)\,|10\rangle$$

- Η συσκευή συζεύγνυει τα qubit: ο $\hat{U}$ αφήνει το πρώτο qubit αμετάβλητο και αντιστρέφει τη γάτα μόνο όταν $c_1 = 1$,

$$\hat{U}\,|c_1 c_2\rangle = \begin{cases} |c_1 c_2\rangle\,, & c_1 = 0 \\ |c_1 \overline{c_2}\rangle\,, & c_1 = 1 \end{cases}$$

- Με γραμμικότητα, λίγο πριν ανοίξουμε το κουτί:

$$|\Psi_{\text{τελικό}}\rangle = \alpha(t)\,|00\rangle + \beta(t)\,|11\rangle$$

- Είναι μορφής Bell, άρα *διεμπλεγμένη* (εκτός αν $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$): η γάτα δεν είναι ούτε ζωντανή ούτε νεκρή, αλλά σε υπέρθεση των δύο.

Το άνοιγμα του κουτιού

- Το άνοιγμα του κουτιού είναι μέτρηση στην υπολογιστική βάση. Αφού δεν υπάρχει συνιστώσα στα $|01\rangle, |10\rangle$, τα αποτελέσματα είναι

$$|00\rangle \text{ (γάτα ζωντανή)}, \qquad |11\rangle \text{ (γάτα νεκρή)}$$

με πιθανότητες $P(\text{ζωντανή}) = |\alpha(t)|^2$, $P(\text{νεκρή}) = |\beta(t)|^2$.

- Παίρνουμε πάντα σαφή απάντηση, ποτέ και τα δύο. Η κατάρρευση του πρώτου qubit συμπαρασύρει τη γάτα, όπως με το qubit της Αλίκης, μόνο που το απομακρυσμένο qubit είναι μέσα στο ίδιο κουτί.
- Το νόημα δεν είναι ότι οι γάτες είναι πραγματικά σε υπέρθεση. Αν η μοναδιαία εξέλιξη ισχύει για κάθε φυσικό σύστημα, τίποτα δεν εμποδίζει την υπέρθεση να μεγαλώσει από ένα qubit σε μια γάτα. Το πού σταματά, και τι σημαίνει μέτρηση ή παρατηρητής, είναι το *πρόβλημα της κβαντικής μέτρησης*.

Η γάτα σε κάθε ερμηνεία

Για την $|\Psi_{\text{τελικό}}\rangle = \alpha(t)\,|00\rangle + \beta(t)\,|11\rangle$:

- **Κοπεγχάγη:** η $|\Psi\rangle$ είναι εργαλείο υπολογισμού πιθανοτήτων. Το τι είναι η γάτα πριν τη μέτρηση δεν έχει απάντηση μέσα στη θεωρία.
- **Πολλοί Κόσμοι:** καμία κατάρρευση. Το άνοιγμα του κουτιού διεμπλέκει και τον παρατηρητή:
  $\alpha\,|00\rangle\,|\text{είδα ζωντανή}\rangle + \beta\,|11\rangle\,|\text{είδα νεκρή}\rangle$, δύο κλάδοι που δεν επικοινωνούν.
- **de Broglie–Bohm:** η γάτα έχει πάντα καθορισμένη κατάσταση, απλώς δεν τη γνωρίζουμε. Η $|\Psi\rangle$ καθοδηγεί το σύστημα και δίνει τις πιθανότητες.
- **QBism:** η έκφραση δείχνει τον δικό μας βαθμό πεποίθησης για το τι θα δούμε, όχι αντικειμενική ιδιότητα της γάτας.

Και οι τέσσερις συμφωνούν στις προβλέψεις $|\alpha|^2$, $|\beta|^2$ και διαφωνούν μόνο στο τι συνέβαινε μέσα στο κουτί.

Συμφωνία (coherence) ενός απομονωμένου qubit

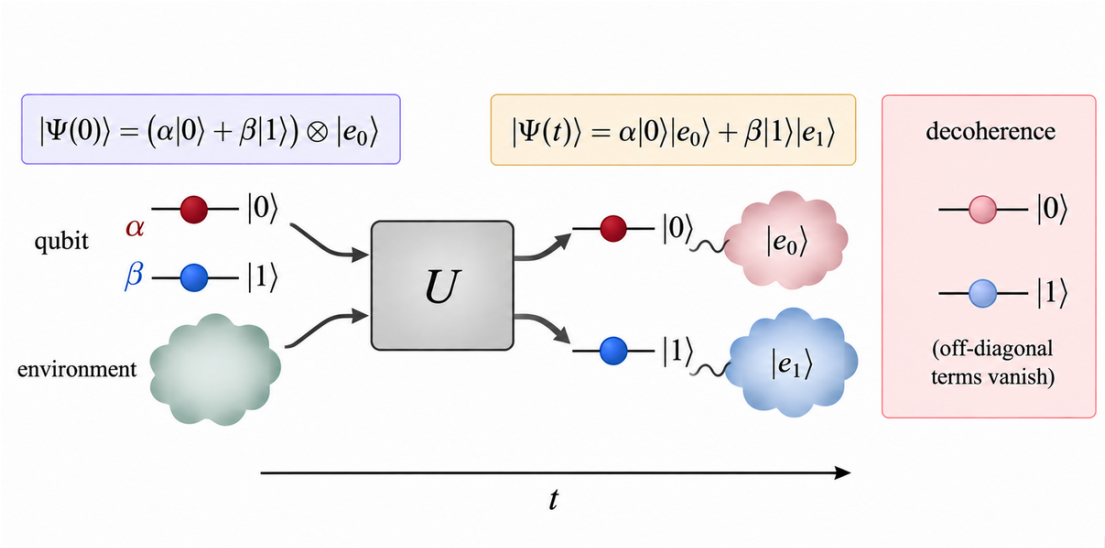
- Γιατί δεν βλέπουμε μακροσκοπικά αντικείμενα σε υπέρθεση; Μέρος της απάντησης δίνει η *αποσυμφωνία* (decoherence): η απώλεια της συμφωνίας μιας υπέρθεσης λόγω αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον.
- Qubit $|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$, μετρημένο στη βάση $|\omega\rangle \equiv |+x\rangle$, $|\zeta\rangle \equiv |-x\rangle$:
$$P(\omega) = \left|\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}(\alpha^*\beta)$$
- Ο όρος $\mathrm{Re}(\alpha^*\beta)$ είναι όρος *συμβολής*: εξαρτάται από τη σχετική φάση και δεν έχει κλασικό ανάλογο.
- Για $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$ είναι $P(\omega) = 1$: βεβαιότητα, που δεν θα είχαμε αν το qubit ήταν κρυφά στο $|0\rangle$ ή στο $|1\rangle$ με πιθανότητα 50%. Αυτό σημαίνει ότι η υπέρθεση είναι *σύμφωνη*.

Σύζευξη με το περιβάλλον

- Το qubit αλληλεπιδρά με ένα qubit του περιβάλλοντος, αρχικά στην $|e_0\rangle$. Ο $\hat{U}$ αντιγράφει την κατάστασή του, με $\langle e_0|e_1\rangle = 0$:

$$\hat{U}\left(|0\rangle\,|e_0\rangle\right) = |0\rangle\,|e_0\rangle\,, \qquad \hat{U}\left(|1\rangle\,|e_0\rangle\right) = |1\rangle\,|e_1\rangle$$

- Με γραμμικότητα προκύπτει η διεμπλεγμένη κατάσταση $|\Psi\rangle = \alpha\,|0\rangle\,|e_0\rangle + \beta\,|1\rangle\,|e_1\rangle$.



Απώλεια της συμβολής

- Μετράμε μόνο το qubit (αγνοούμε το περιβάλλον) με τον $\hat{\mathcal{P}}_\omega \otimes \hat{I}$:

$$\left(\hat{\mathcal{P}}_\omega \otimes \hat{I}\right)|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\omega\rangle \otimes (\alpha|e_0\rangle + \beta|e_1\rangle)$$

$$P(\omega) = \frac{1}{2}\|\alpha|e_0\rangle + \beta|e_1\rangle\|^2 = \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) = \frac{1}{2}$$

- Οι όροι $\alpha^*\beta\langle e_0|e_1\rangle$ μηδενίζονται: ο όρος συμβολής εξαφανίστηκε, όποια κι αν είναι τα α, β. Το qubit συμπεριφέρεται σαν κλασική στατιστική ανάμειξη.
- Η συνολική κατάσταση $|\Psi\rangle$ παραμένει καθαρή και σύμφωνη, χωρίς καμία κατάρρευση. Η συμβολή διέρρευσε στη διεμπλοκή με το περιβάλλον και δεν είναι προσβάσιμη αν κοιτάξουμε μόνο το qubit.

Γιατί η $\langle e_0|e_1\rangle = 0$ και τι σημαίνει για τη γάτα

- Η ορθογωνιότητα είναι φυσική παραδοχή, όχι συνέπεια της μοναδιαιότητας. Στην πράξη το qubit αφήνει ατελές ίχνος σε N σωματίδια και

$$\langle e_0|e_1\rangle = \prod_{k=1}^{N} \left\langle e_0^{(k)} \middle| e_1^{(k)} \right\rangle \to 0$$

  εκθετικά γρήγορα με το N, ακόμα κι αν κάθε παράγοντας είναι κοντά στο 1.

- Σε μακροσκοπικό αντικείμενο (γάτα) το περιβάλλον είναι δισεκατομμύρια φωτόνια και μόρια: η αποσυμφωνία γίνεται πρακτικά ακαριαία, γι' αυτό δεν βλέπουμε ποτέ μακροσκοπικές υπερθέσεις.

- Η αποσυμφωνία *δεν* λύνει πλήρως το πρόβλημα της μέτρησης: εξηγεί γιατί χάνεται η συμβολή, όχι γιατί βιώνουμε ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα. Αυτό συνδέεται με τις ερμηνείες.

Αποσυμφωνία και κβαντικοί υπολογιστές

- Το πλεονέκτημα του κβαντικού υπολογιστή στηρίζεται στη συμφωνία: υπερθέσεις και διεμπλοκές που επιτρέπουν συμβολή ανάμεσα σε υπολογιστικούς δρόμους.
- Θερμικοί κραδασμοί, ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, ατέλειες των υλικών: κάθε ανεπιθύμητη αλληλεπίδραση καταστρέφει τη συμβολή και μετατρέπει το qubit σε κάτι κοντά σε κλασικό τυχαίο bit, χωρίς να το μετρήσει κανείς.
- Όσο περισσότερα qubits και όσο μεγαλύτερη διάρκεια, τόσο περισσότερες ευκαιρίες για το περιβάλλον να καταστρέψει τη διεμπλοκή.
- Γι' αυτό απαιτούνται ακραία απομόνωση (ψύξη κοντά στο απόλυτο μηδέν, θωράκιση από θόρυβο) και τεχνικές διόρθωσης σφαλμάτων που προστατεύουν την πληροφορία χωρίς να τη μετρούν άμεσα.