Κβαντικοί Υπολογιστές και Αλγόριθμοι

Διάλεξη 4η

Θωμάς Καμαλάκης

Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο Αθηνών

2026

Περιεχόμενα

1. Η σφαίρα του Bloch
2. Pauli και πίνακες περιστροφής
3. Κάθε πύλη ενός qubit είναι περιστροφή

Από το αλγεβρικό διάνυσμα στη γεωμετρία

- Μέχρι τώρα: $|\psi\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$ με μιγαδικά a, b. Δεν μπορούμε να το σχεδιάσουμε ως δισδιάστατο διάνυσμα στο επίπεδο.
- Υπάρχει εναλλακτική αναπαράσταση: κάθε κατάσταση qubit ως σημείο στην επιφάνεια μιας σφαίρας, της *σφαίρας του Bloch* (Felix Bloch).
- Οι έξι ειδικές καταστάσεις $|0\rangle\,, |1\rangle, |\pm x\rangle, |\pm y\rangle$ αντιστοιχούν στους έξι πόλους, όπου η σφαίρα τέμνεται από τους άξονες x, y, z.
- Κάθε κβαντική πύλη (μοναδιαίος τελεστής $\hat{U}$) αντιστοιχεί σε *περιστροφή* της σφαίρας γύρω από κάποιον άξονα $\mathbf{n}$ κατά γωνία θ.
- Η εικόνα αυτή εξηγεί γιατί ορισμένες πύλες δεν αντιμετατίθενται (οι περιστροφές γύρω από διαφορετικούς άξονες γενικά δεν αντιμετατίθενται) και βοηθά στη σύνθεση πυλών και στον σχεδιασμό κυκλωμάτων ενός qubit.

Καθολική φάση

- Με την πρώτη ματιά το $|\psi\rangle$ έχει τέσσερις πραγματικούς αριθμούς (Re, Im των a, b), με τον περιορισμό $|a|^2 + |b|^2 = 1$.
- Οι $|\psi\rangle$ και $|\phi\rangle = \mathrm{e}^{j\gamma} |\psi\rangle$ (γ πραγματικό) δίνουν τις ίδιες πιθανότητες για κάθε προβολή $\hat{\mathcal{P}} = |\omega\rangle \langle\omega|$:

$$\begin{aligned}\langle\phi|\omega|\phi|\omega\rangle \langle\omega|\phi|\omega|\phi\rangle &= \mathrm{e}^{-j\gamma}\mathrm{e}^{j\gamma} \langle\psi|\omega|\psi|\omega\rangle \langle\omega|\psi|\omega|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|\omega|\psi|\omega\rangle \langle\omega|\psi|\omega|\psi\rangle\end{aligned}$$

- Άρα περιγράφουν το ίδιο σύστημα: είναι ισοδύναμες. Ο παράγοντας $\mathrm{e}^{j\gamma}$ λέγεται *καθολική φάση* και μπορεί να αγνοηθεί.
- Με $a = |a|\mathrm{e}^{j\phi_a}$, $b = |b|\mathrm{e}^{j\phi_b}$ γράφουμε

$$|\psi\rangle = |a|\,|0\rangle + |b|\mathrm{e}^{j\phi}\,|1\rangle\,, \qquad \phi = \phi_b - \phi_a$$

Χρειαζόμαστε μόνο δύο πραγματικούς αριθμούς: το $|a|$ και τη *σχετική φάση* ϕ.

Κανονική μορφή

- Αφού $0 \leq |a| \leq 1$, υπάρχει μοναδικό $\theta \in [0, \pi]$ με $|a| = \cos\frac{\theta}{2}$, άρα $|b| = \sqrt{1-|a|^2} = \sin\frac{\theta}{2}$ (θετική ρίζα, αφού $\sin\frac{\theta}{2} \geq 0$).
- Προκύπτει η *κανονική μορφή* ενός qubit:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \mathrm{e}^{j\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle, \qquad \theta \in [0,\pi],\ \phi \in [0, 2\pi)$$

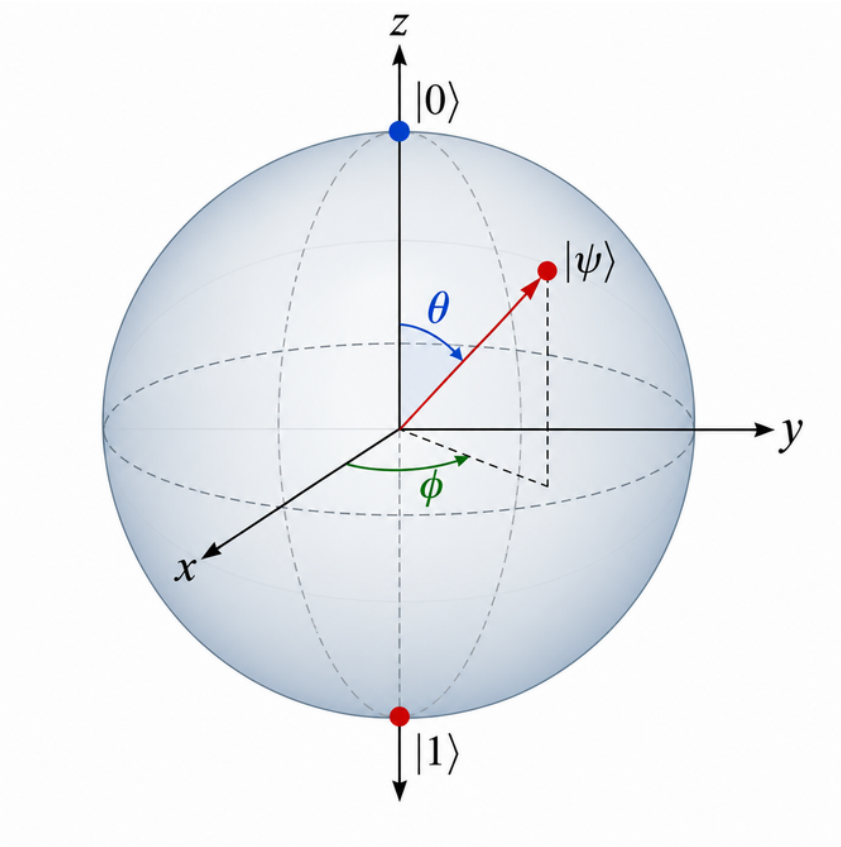
- Εξαρτάται μόνο από δύο πραγματικούς αριθμούς, τις γωνίες θ και ϕ.
- Η καθολική φάση έχει επιλεγεί ώστε $a = \cos\frac{\theta}{2} \geq 0$.

Η σφαίρα του Bloch

- Δύο γωνίες προσδιορίζουν σημείο σε σφαίρα ακτίνας 1: το θ είναι η πολική γωνία (από τον άξονα z) και το ϕ η αζιμουθιακή (από τον x, στο επίπεδο xy).
- Συντεταγμένες του σημείου:

$$x = \sin\theta\cos\phi$$
$$y = \sin\theta\sin\phi$$
$$z = \cos\theta$$

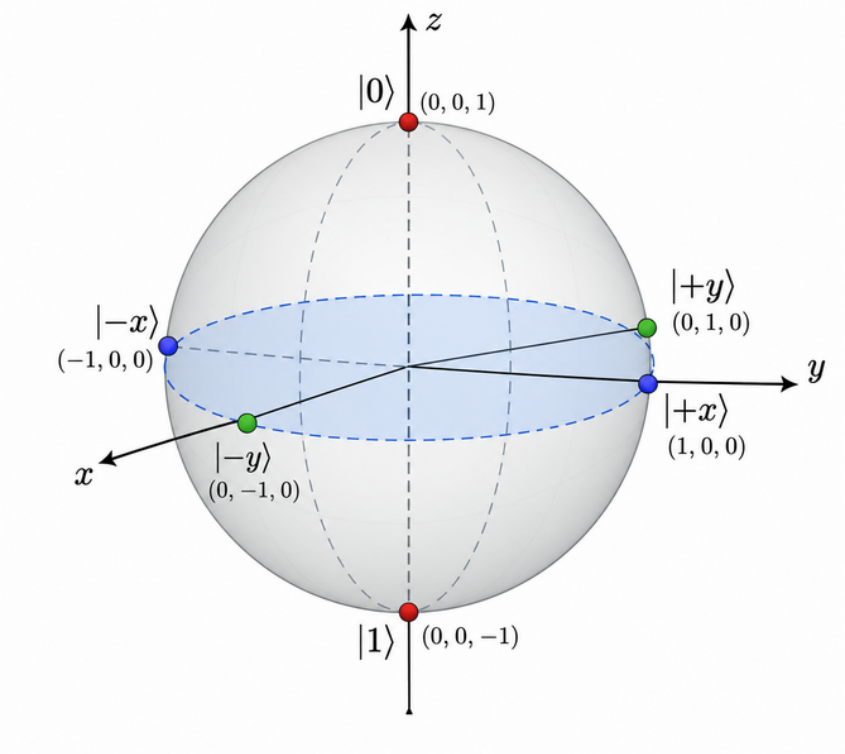
- Η αντιστοιχία qubit $\leftrightarrow$ σημείο της σφαίρας είναι αμφιμονοσήμαντη: $\theta = \arccos z$, $\phi = \arg(x + jy)$.



Οι έξι πόλοι της σφαίρας Bloch

Κατάσταση	θ	ϕ	(x, y, z)
$\|0\rangle$	0	—	$(0, 0, 1)$
$\|1\rangle$	π	—	$(0, 0, -1)$
$\|+x\rangle$	$\pi/2$	0	$(1, 0, 0)$
$\|-x\rangle$	$\pi/2$	π	$(-1, 0, 0)$
$\|+y\rangle$	$\pi/2$	$\pi/2$	$(0, 1, 0)$
$\|-y\rangle$	$\pi/2$	$-\pi/2$	$(0, -1, 0)$

- Τα $|0\rangle$, $|1\rangle$ είναι ο βόρειος και ο νότιος πόλος.
- Οι $|\pm x\rangle$, $|\pm y\rangle$ βρίσκονται στον ισημερινό ($\theta = \pi/2$).



Συντεταγμένες Bloch απευθείας από τα a, b

- Με $a \geq 0$ πραγματικό (καθολική φάση αφαιρεμένη), $a = \cos\frac{\theta}{2}$, $b = \sin\frac{\theta}{2} e^{j\phi}$ και τις ταυτότητες $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$, $\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$:

$$x = 2a\,\mathrm{Re}(b), \qquad y = 2a\,\mathrm{Im}(b), \qquad z = a^2 - |b|^2$$

- Βολικό για αριθμητικό υπολογισμό (π.χ. στη Python).
- Παράδειγμα (αντίστροφο πρόβλημα): $(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

$$\theta = \arccos z = \frac{\pi}{2}, \quad a = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\phi = \arg(x + jy) = \frac{\pi}{4}, \quad b = e^{j\pi/4}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{j}{2}$$

Άρα $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \left(\frac{1}{2} + \frac{j}{2}\right)|1\rangle$.

Συνταγή: από το qubit στη σφαίρα και πίσω

$|\psi\rangle \to (x, y, z)$

1. Αφαιρούμε την καθολική φάση ώστε $a \geq 0$: πολλαπλασιάζουμε με $\mathrm{e}^{-j\phi_a}$.
2. $\theta = 2 \arccos |a|$.
3. $\phi = \arg b$ (με το νέο b).
4. $x = \sin\theta \cos\phi$, $y = \sin\theta \sin\phi$, $z = \cos\theta$.

$(x, y, z) \to |\psi\rangle$

1. $\theta = \arccos z$.
2. $\phi = \arg(x + jy)$.
3. $a = \cos\frac{\theta}{2}$, $b = \mathrm{e}^{j\phi} \sin\frac{\theta}{2}$.

Το $|\psi\rangle$ προκύπτει μέχρι καθολική φάση.

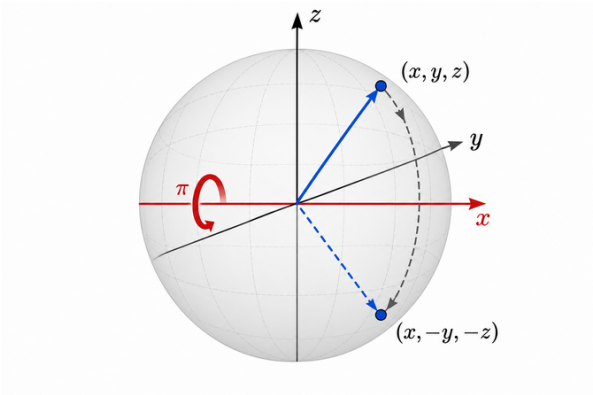
Παράδειγμα: από το qubit στη σφαίρα Bloch

- Δίνεται $|\psi\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{j\pi/3}|1\rangle$. Το $a = \frac{1}{2}$ είναι ήδη πραγματικό και θετικό, άρα είναι σε κανονική μορφή.
- Γωνίες:
$$\theta = 2\arccos\frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}, \qquad \phi = \arg b = \frac{\pi}{3}$$
- Συντεταγμένες:
$$x = \sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \qquad y = \sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}$$
$$z = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$
- Έλεγχος με τους τύπους a, b: $x = 2a\,\mathrm{Re}(b) = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $y = 2a\,\mathrm{Im}(b) = \frac{3}{4}$, $z = a^2 - |b|^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$.
- Το σημείο έχει μοναδιαίο μήκος: $\frac{3}{16} + \frac{9}{16} + \frac{4}{16} = 1$.

Ο $\hat{X}$ ως περιστροφή κατά π γύρω από τον x

- Για $|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \mathrm{e}^{j\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$ έχουμε $\hat{X}|\psi\rangle = b|0\rangle + a|1\rangle$:

$$\hat{X}|\psi\rangle = \mathrm{e}^{j\phi}\sin\frac{\theta}{2}|0\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|1\rangle$$



- Αφαιρούμε την καθολική φάση $\mathrm{e}^{j\phi}$:

$$\sin\frac{\theta}{2}|0\rangle + \mathrm{e}^{-j\phi}\cos\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

- Είναι κανονική μορφή με νέες γωνίες $\Theta = \pi - \theta$, $\Phi = -\phi$ (αφού $\sin\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\Theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\Theta}{2}$).

Άρα $X = x$, $Y = -y$, $Z = -z$, δηλαδή $(x, y, z) \to (x, -y, -z)$.

Οι πίνακες Pauli ως περιστροφές κατά π

- Με τον ίδιο τρόπο για τους $\hat{Y}$ και $\hat{Z}$: οι τρεις τελεστές Pauli είναι περιστροφές της σφαίρας Bloch κατά π (180°) γύρω από τον ομώνυμο άξονα.

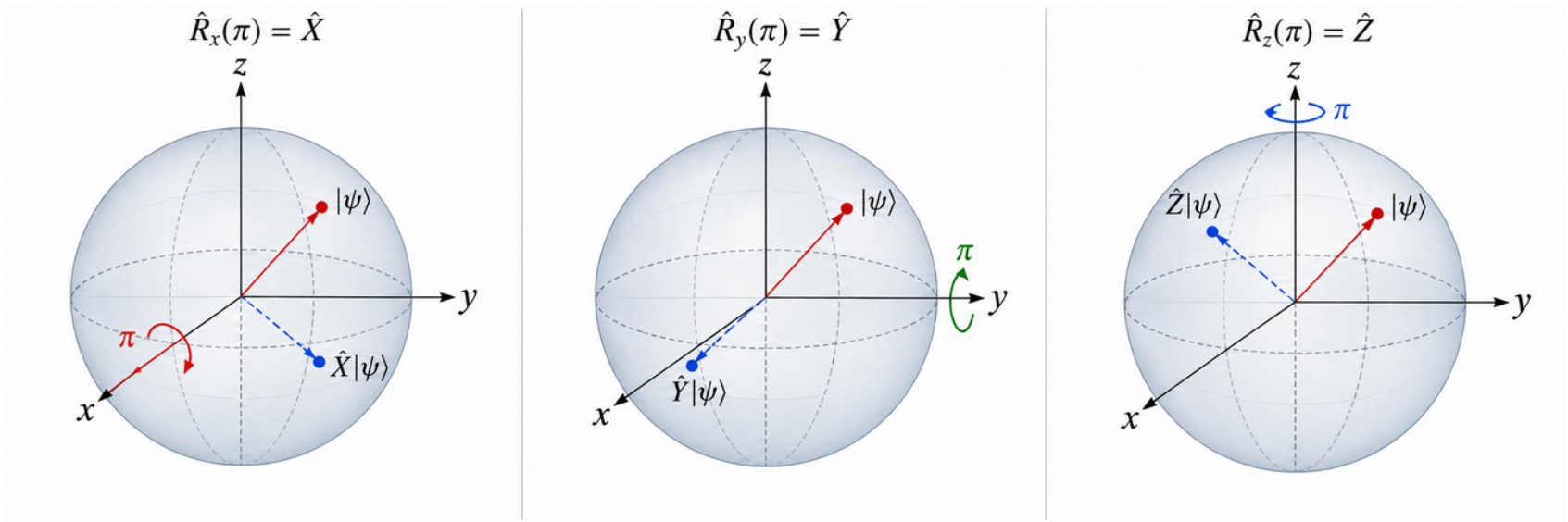
$$\hat{X} : (x, y, z) \to (x, -y, -z)$$

$$\hat{Y} : (x, y, z) \to (-x, y, -z)$$

$$\hat{Z} : (x, y, z) \to (-x, -y, z)$$

- Η περιστροφή αφήνει αμετάβλητη τη συνιστώσα κατά μήκος του άξονα και αντιστρέφει το πρόσημο των άλλων δύο.
- Συμβολισμός: $\hat{R}_x(\pi) = \hat{X}$, $\hat{R}_y(\pi) = \hat{Y}$, $\hat{R}_z(\pi) = \hat{Z}$.
- Γενικά, κάθε μοναδιαίος τελεστής ενός qubit είναι περιστροφή γύρω από κάποιον άξονα. Γράφουμε $\hat{R}_{\mathbf{n}}(\theta)$ για περιστροφή γύρω από τον $\mathbf{n}$ κατά θ.

Οι τρεις περιστροφές κατά π



Οι πίνακες $\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y, \mathbf{M}_z$

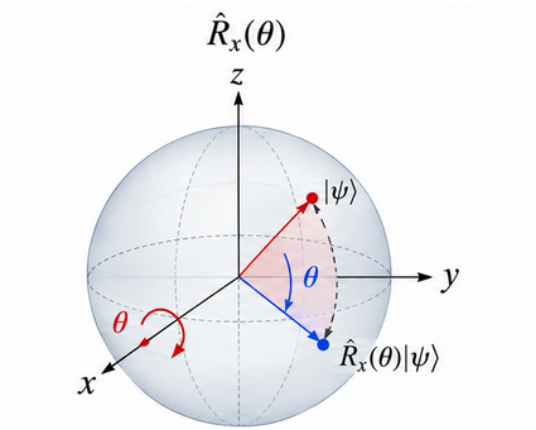
Η περιστροφή κατά θ γύρω από τον x αφήνει το x αμετάβλητο και στρέφει το (y, z) κατά θ στο κάθετο επίπεδο: $\mathbf{r}' = \mathbf{M}_x(\theta)\mathbf{r}$ με $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Με κυκλική εναλλαγή $x \to y \to z \to x$ προκύπτουν και οι άλλοι δύο:

$$\mathbf{M}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

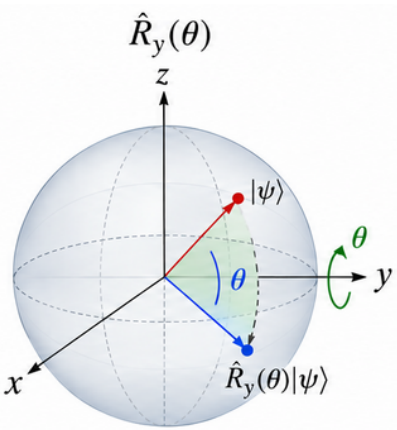
$$\mathbf{M}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

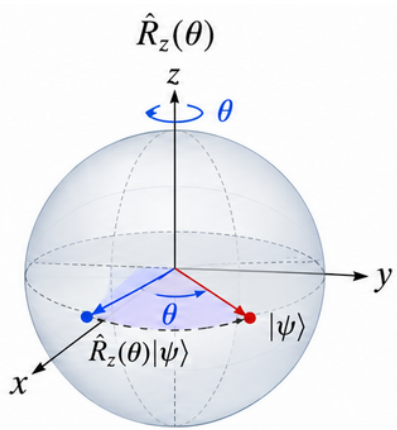
Περιστροφές γύρω από τους x, y, z για γενική γωνία θ



$$\mathbf{M}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{M}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{M}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα: $\theta = \pi/3$

- Με $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\mathbf{M}_x\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Έλεγχος στο $(0,1,0)$ (κατάσταση $|+y\rangle$): $\rho = 1$, $\alpha = 0$, άρα αναμένουμε $(y', z') = (\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3})$. Πράγματι,

$$\mathbf{M}_x\left(\tfrac{\pi}{3}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Η περίπτωση $\theta = \pi$ και οι τελεστές Pauli

- Για $\theta = \pi$ ($\cos\pi = -1, \sin\pi = 0$):

$$\mathbf{M}_x(\pi) = \mathrm{diag}(1, -1, -1),\ \mathbf{M}_y(\pi) = \mathrm{diag}(-1, 1, -1)$$

$$\mathbf{M}_z(\pi) = \mathrm{diag}(-1, -1, 1)$$

- Δρουν ως $(x, y, z) \to (x, -y, -z), (-x, y, -z), (-x, -y, z)$ αντίστοιχα, δηλαδή ακριβώς όπως οι $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ στη σφαίρα Bloch.
- Αντιστοιχία: ο τελεστής $\hat{R}_x(\pi) = \hat{X}$ (πίνακας 2×2 στον μιγαδικό χώρο των qubit) αντιστοιχεί στον πίνακα $\mathbf{M}_x(\pi)$ (3×3 στον πραγματικό χώρο της σφαίρας). Το ίδιο για y, z.
- Στη συνέχεια η αντιστοιχία γενικεύεται: ο $\hat{R}_{\mathbf{n}}(\theta)$ αντιστοιχεί σε 3×3 πίνακα περιστροφής γύρω από τυχαίο άξονα $\mathbf{n}$.

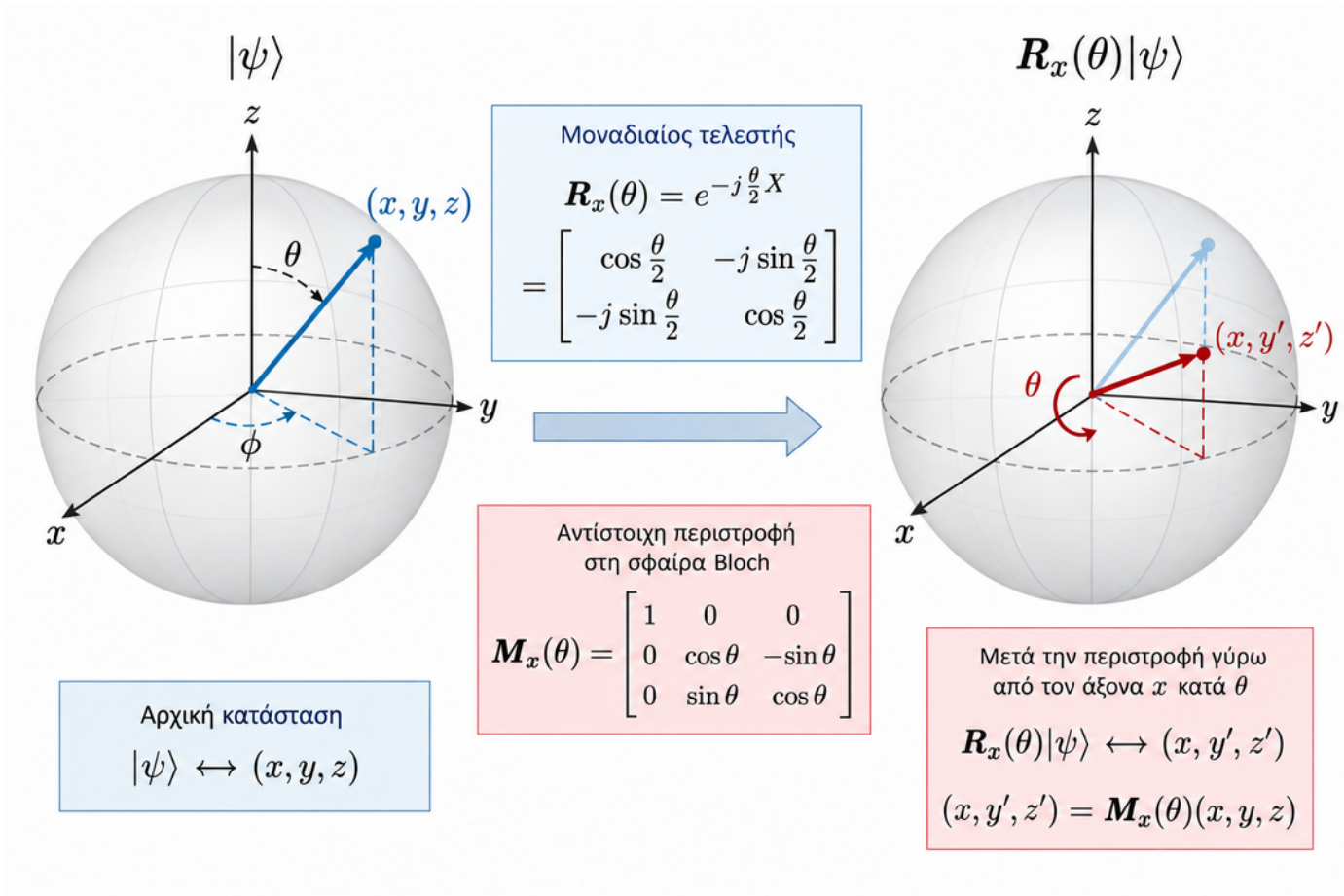
Ο πίνακας $\mathbf{R}_x(\theta)$ για qubit

- Ο $\mathbf{M}_x(\theta)$ στρέφει το *σημείο* (x, y, z). Η πύλη που δρα στο ίδιο το $|\psi\rangle$ είναι ένας πίνακας 2×2:

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}\,\mathbf{I}_2 - j\sin\frac{\theta}{2}\,\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -j\sin\frac{\theta}{2} \\ -j\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

- Είναι μοναδιαίος: $\mathbf{R}_x(\theta)\mathbf{R}_x(\theta)^\dagger = \mathbf{I}_2$.
- Ισχυρισμός (χωρίς απόδειξη): αν το $|\phi\rangle = \mathbf{R}_x(\theta)\,|\psi\rangle$, τότε το σημείο Bloch του $|\phi\rangle$ είναι $\mathbf{M}_x(\theta)\mathbf{r}$, όπου $\mathbf{r}$ το σημείο του $|\psi\rangle$.

Αντιστοιχία $\mathbf{R}_x$ και $\mathbf{M}_x$



Παράδειγμα: $\mathbf{R}_x(\pi/6)\,|0\rangle$

- Με $c = \cos\frac{\pi}{12}$, $s = \sin\frac{\pi}{12}$:

$$\mathbf{R}_x\left(\tfrac{\pi}{6}\right)|0\rangle = c\,|0\rangle - js\,|1\rangle$$

- Από τους τύπους $x = 2a\,\mathrm{Re}(b)$, $y = 2a\,\mathrm{Im}(b)$, $z = a^2 - |b|^2$:

$$\mathbf{r}' = (0,\ -2cs,\ c^2 - s^2) = \left(0, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

- Απευθείας από τον πίνακα περιστροφής, με $\mathbf{r} = (0,0,1)$ (κατάσταση $|0\rangle$):

$$\mathbf{M}_x\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

- Τα δύο αποτελέσματα ταυτίζονται.

Οι πίνακες $\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y, \mathbf{R}_z$

- Με κυκλική εναλλαγή των αξόνων:

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}\,\mathbf{I}_2 - j\sin\frac{\theta}{2}\,\mathbf{Y}, \qquad \mathbf{R}_z(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}\,\mathbf{I}_2 - j\sin\frac{\theta}{2}\,\mathbf{Z}$$

  και πραγματοποιούν τις περιστροφές $\mathbf{M}_y(\theta), \mathbf{M}_z(\theta)$.

- Για $\theta = \pi$: $\mathbf{R}_x(\pi) = -j\mathbf{X}$ (και ομοίως για y, z), δηλαδή οι Pauli μέχρι τη μη παρατηρήσιμη καθολική φάση $-j$.

- Παράδειγμα $\theta = \pi/2$ ($\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$):

$$\mathbf{R}_x\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_y\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1-j & 0 \\ 0 & 1+j \end{bmatrix}$$

Περιστροφή γύρω από τυχαίο άξονα: τύπος του Rodrigues

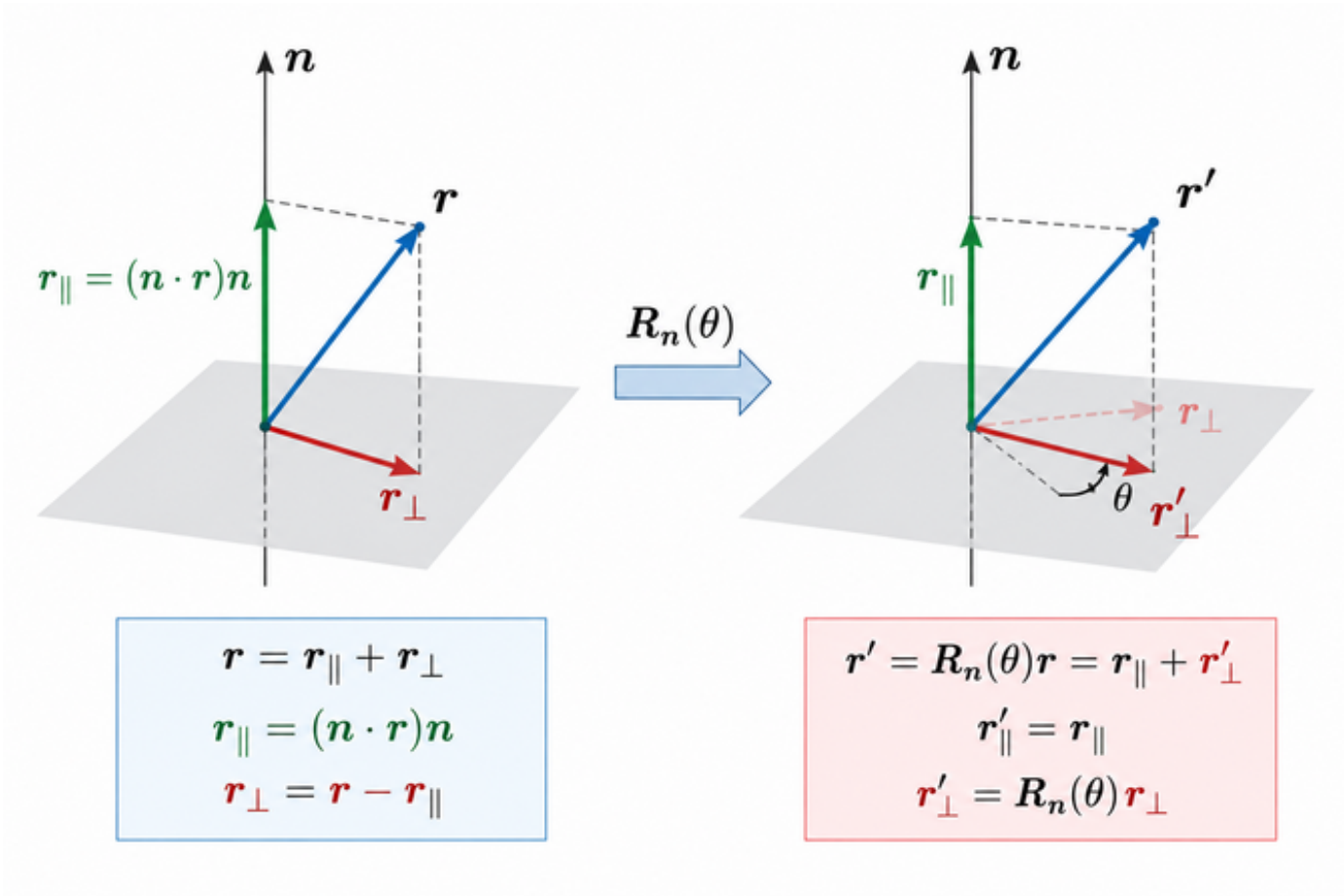
- Άξονας $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ με $|\mathbf{n}| = 1$. Αναλύουμε το $\mathbf{r}$ σε παράλληλη και κάθετη συνιστώσα ως προς το $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{r}_{\parallel} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}, \qquad \mathbf{r}_{\perp} = (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{n}$$

- Η περιστροφή αφήνει το $\mathbf{r}_{\parallel}$ αμετάβλητο και στρέφει το $\mathbf{r}_{\perp}$ κατά θ προς την κατεύθυνση του $\mathbf{n} \times \mathbf{r}$.
- Αποτέλεσμα (τύπος του Rodrigues), χωρίς απόδειξη:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}\cos\theta + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})(1 - \cos\theta) + (\mathbf{n} \times \mathbf{r})\sin\theta$$

Περιστροφή γύρω από το $\mathbf{n}$



Ο πίνακας $\mathbf{M_n}(\theta)$

- Με $\mathbf{n} \times \mathbf{r} = \mathbf{K}\mathbf{r}$, όπου

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix}$$

ο τύπος γράφεται $\mathbf{r}' = \mathbf{M_n}(\theta)\mathbf{r}$ με

$$\mathbf{M_n}(\theta) = \cos\theta\, \mathbf{I}_3 + (1 - \cos\theta)\, \mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}} + \sin\theta\, \mathbf{K}$$

- Για $\mathbf{n} = \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ ξαναβρίσκουμε τους $\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y, \mathbf{M}_z$.

Ο $\mathbf{M_n}(\theta)$ αναλυτικά

Με $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$, $v = 1 - \cos\theta$:

$$\mathbf{M_n}(\theta) = \begin{bmatrix} n_x^2 v + c & n_x n_y v - n_z s & n_x n_z v + n_y s \\ n_y n_x v + n_z s & n_y^2 v + c & n_y n_z v - n_x s \\ n_z n_x v - n_y s & n_z n_y v + n_x s & n_z^2 v + c \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα: $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \theta = \pi/6$

- Με $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$: όλα τα στοιχεία του $\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}}$ είναι $\frac{1}{3}$ και

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Αντικαθιστώντας στον τύπο:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{n}}\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

- Για το σημείο $\mathbf{r} = (1,0,0)$ ($|+x\rangle$) το αποτέλεσμα είναι η πρώτη στήλη:

$$\mathbf{r}' = \left(\tfrac{1+\sqrt{3}}{3},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1-\sqrt{3}}{3}\right)$$

Ο γενικός πίνακας $\mathbf{R_n}(\theta)$

- Με $\mathbf{A} = \mathbf{R_n}(\pi) = n_x\mathbf{X} + n_y\mathbf{Y} + n_z\mathbf{Z}$ $(\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_2)$ ορίζουμε

$$\mathbf{R_n}(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}\,\mathbf{I}_2 - j\sin\frac{\theta}{2}\left(n_x\mathbf{X} + n_y\mathbf{Y} + n_z\mathbf{Z}\right)$$

- Αποτέλεσμα (χωρίς απόδειξη): ο $\mathbf{R_n}(\theta)$ είναι μοναδιαίος και πραγματοποιεί πάνω στο qubit την περιστροφή κατά θ γύρω από τον $\mathbf{n}$, δηλαδή τον τύπο του Rodrigues:

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = \mathbf{r}\cos\theta + \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})(1-\cos\theta) + (\mathbf{n}\times\mathbf{r})\sin\theta$$

- Ισοδυναμία: $|\phi\rangle = \mathbf{R_n}(\theta)\,|\psi\rangle \;\Leftrightarrow\; \mathbf{r}' = \mathbf{M_n}(\theta)\mathbf{r}$.
- Για $\mathbf{n} = \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ ξαναβρίσκουμε τους $\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y, \mathbf{R}_z$, και για $\theta = \pi$ τον $\mathbf{R_n}(\pi)$ μέχρι καθολική φάση.

Παράδειγμα: $\mathbf{n} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0), \theta = \pi/3, |\psi\rangle = |+x\rangle$

- Με τον $\mathbf{R_n}(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{I}_2 - \frac{j}{2}\left(\frac{3}{5}\mathbf{X} + \frac{4}{5}\mathbf{Y}\right)$ στο $|+x\rangle$ προκύπτει το σημείο Bloch

$$(x, y, z) = \left(\frac{17}{25},\ \frac{6}{25},\ -\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$$

- Έλεγχος: $\frac{289}{625} + \frac{36}{625} + \frac{300}{625} = 1$.
- Από τον πίνακα περιστροφής, με $\mathbf{r} = (1, 0, 0)$, η πρώτη στήλη του $\mathbf{M_n}(\pi/3)$ δίνει το ίδιο σημείο:

$$\mathbf{M_n}\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{17}{25}\\ \frac{6}{25}\\ -\frac{2\sqrt{3}}{5}\end{bmatrix}$$

- Η ισοδυναμία $\mathbf{R_n}(\theta) \leftrightarrow \mathbf{M_n}(\theta)$ επαληθεύεται.

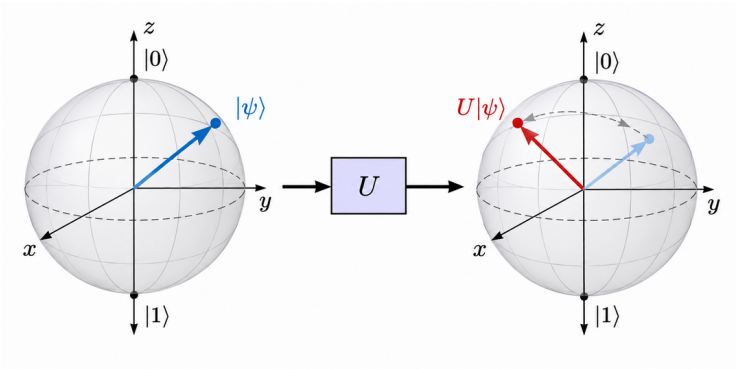
Κάθε μοναδιαίος πίνακας 2×2 είναι περιστροφή

- Αποτέλεσμα (χωρίς απόδειξη): κάθε μοναδιαίος 2×2 πίνακας $\mathbf{U}$, δηλαδή κάθε κβαντική πύλη ενός qubit, γράφεται

$$\mathbf{U} = \mathrm{e}^{j\alpha}\, \mathbf{R}_{\mathbf{n}}(\theta)$$

για κατάλληλα πραγματικά α, θ και μοναδιαίο άξονα $\mathbf{n}$

- Η καθολική φάση $\mathrm{e}^{j\alpha}$ δεν επηρεάζει καμία φυσική πρόβλεψη: κάθε πύλη ενός qubit είναι ουσιαστικά περιστροφή της σφαίρας Bloch γύρω από κάποιον άξονα $\mathbf{n}$ κατά γωνία θ



Πώς βρίσκουμε το α, το θ και τον $\mathbf{n}$

1. $\det \mathbf{U} = \mathrm{e}^{j2\alpha}$, άρα $\mathbf{M} = \mathrm{e}^{-j\alpha}\mathbf{U}$ έχει ορίζουσα 1 και μορφή
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ -m_{12}^* & m_{11}^* \end{bmatrix}$$
2. $\cos\frac{\theta}{2} = \mathrm{Re}(m_{11})$ και
$s = \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\mathrm{Im}(m_{11})^2 + \mathrm{Re}(m_{12})^2 + \mathrm{Im}(m_{12})^2}$
3. Αν $s \neq 0$:
$$\mathbf{n} = \frac{1}{s}\left(-\mathrm{Im}(m_{12}),\ -\mathrm{Re}(m_{12}),\ -\mathrm{Im}(m_{11})\right)$$
4. Αν $s = 0$ τότε $\mathbf{M} = \pm\mathbf{I}_2$ ($\theta = 0$ ή 2π) και ο άξονας είναι αυθαίρετος

Παράδειγμα: η πύλη X

1. Ορίζουσα: $\det \mathbf{X} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 = \mathrm{e}^{j\pi}$, άρα $2\alpha = \pi$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$
2. Αφαιρούμε τη φάση:

$$\mathbf{M} = \mathrm{e}^{-j\pi/2}\mathbf{X} = -j\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ -j & 0 \end{bmatrix}, \quad m_{11} = 0,\ m_{12} = -j$$

   Έλεγχος: $|m_{11}|^2 + |m_{12}|^2 = 1$ και $-m_{12}^* = -j = m_{21}$
3. Γωνία: $\cos\frac{\theta}{2} = \mathrm{Re}(m_{11}) = 0$ και

$$s = \sqrt{\mathrm{Im}(m_{11})^2 + \mathrm{Re}(m_{12})^2 + \mathrm{Im}(m_{12})^2} = \sqrt{0+0+1} = 1$$

   άρα $\sin\frac{\theta}{2} = 1$, δηλαδή $\theta = \pi$
4. Άξονας:

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{\mathrm{Im}(m_{12})}{s}, -\frac{\mathrm{Re}(m_{12})}{s}, -\frac{\mathrm{Im}(m_{11})}{s}\right) = (1,0,0)$$

Συμπέρασμα: $\mathbf{X} = \mathrm{e}^{j\pi/2}\mathbf{R}_x(\pi) = j\,\mathbf{R}_x(\pi)$, σε συμφωνία με το $\mathbf{R}_x(\pi) = -j\mathbf{X}$

Παράδειγμα: η πύλη Hadamard H

1. Ορίζουσα: $\det \mathbf{H} = \frac{1}{2}\left[1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1\right] = -1 = \mathrm{e}^{j\pi}$, άρα ξανά $\alpha = \frac{\pi}{2}$
2. Αφαιρούμε τη φάση:

$$\mathbf{M} = -j\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -j & -j \\ -j & j \end{bmatrix}, \quad m_{11} = m_{12} = -\frac{j}{\sqrt{2}}$$

   Έλεγχος: $|m_{11}|^2 + |m_{12}|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, -m_{12}^* = -\frac{j}{\sqrt{2}} = m_{21}$, $m_{11}^* = \frac{j}{\sqrt{2}} = m_{22}$
3. Γωνία: $\mathrm{Re}(m_{11}) = 0, \mathrm{Im}(m_{11}) = \mathrm{Im}(m_{12}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \mathrm{Re}(m_{12}) = 0$, άρα

$$\cos\frac{\theta}{2} = 0, \quad s = \sqrt{\tfrac{1}{2} + 0 + \tfrac{1}{2}} = 1, \quad \theta = \pi$$

4. Άξονας:

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{\mathrm{Im}(m_{12})}{s}, -\frac{\mathrm{Re}(m_{12})}{s}, -\frac{\mathrm{Im}(m_{11})}{s}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$$

Συμπέρασμα: $\mathbf{H} = j\,\mathbf{R}_{\mathbf{n}}(\pi)$, περιστροφή κατά π γύρω από τον άξονα που διχοτομεί τους x και z