Κβαντικοί Υπολογιστές και Αλγόριθμοι

Διάλεξη 5η

Θωμάς Καμαλάκης

Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο Αθηνών

2026

Περιεχόμενα

1. Αναπαράσταση Euler και η μορφή **AXBXC**
2. Βασικές κβαντικές πύλες ενός qubit
3. Καθολικότητα του συνόλου $\{\mathbf{H}, \mathbf{T}\}$

Η αναπαράσταση Euler (ZYZ)

- Αποτέλεσμα (χωρίς απόδειξη): κάθε μοναδιαίος 2×2 πίνακας γράφεται ως γινόμενο τριών περιστροφών γύρω μόνο από τους άξονες z, y, z, επί μία καθολική φάση

$$\mathbf{U} = \mathrm{e}^{j\alpha}\mathbf{R}_z(\beta)\mathbf{R}_y(\gamma)\mathbf{R}_z(\delta)$$

για κατάλληλες πραγματικές γωνίες $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

- Με $\mathbf{R}_z(\theta) = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{-j\theta/2}, \mathrm{e}^{j\theta/2})$ και $\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ προκύπτει

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{j(\alpha-\frac{\beta}{2}-\frac{\delta}{2})}\cos\frac{\gamma}{2} & -\mathrm{e}^{j(\alpha-\frac{\beta}{2}+\frac{\delta}{2})}\sin\frac{\gamma}{2} \\ \mathrm{e}^{j(\alpha+\frac{\beta}{2}-\frac{\delta}{2})}\sin\frac{\gamma}{2} & \mathrm{e}^{j(\alpha+\frac{\beta}{2}+\frac{\delta}{2})}\cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός των γωνιών Euler

- Θέτουμε $\mathbf{M} = \mathrm{e}^{-j\alpha}\mathbf{U}$, με στοιχεία πρώτης γραμμής m_{11}, m_{12}, και $\phi_{11} = \arg m_{11}$, $\phi_{12} = \arg m_{12}$
- Οι γωνίες δίνονται από

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\arg(\det \mathbf{U}), \qquad \gamma = 2\arccos|m_{11}|$$

$$\beta = \pi - \phi_{11} - \phi_{12}, \qquad \delta = \phi_{12} - \phi_{11} - \pi$$

- Εκφυλισμένες περιπτώσεις $m_{11} = 0$ ή $m_{12} = 0$ ($\gamma = \pi$ ή 0): μία από τις β, δ μένει αόριστη
- Άρα κάθε πύλη ενός qubit υλοποιείται με περιστροφές γύρω από τους z, y, z μόνο

Παράδειγμα: οι γωνίες Euler της πύλης Hadamard

- Από το προηγούμενο παράδειγμα $\alpha = \frac{\pi}{2}$ και $m_{11} = m_{12} = -\frac{j}{\sqrt{2}}$, άρα $|m_{11}| = |m_{12}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ και $\phi_{11} = \phi_{12} = -\frac{\pi}{2}$
- Γωνία γ:
$$\frac{\gamma}{2} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2}$$
(έλεγχος: $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = |m_{12}|$)
- Γωνίες β, δ:
$$\beta = \pi - \phi_{11} - \phi_{12} = \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2\pi$$
$$\delta = \phi_{12} - \phi_{11} - \pi = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi = -\pi$$
- Έλεγχος στοιχείων: $(1,1)$: $\mathrm{e}^{j(\frac{\pi}{2} - \pi + \frac{\pi}{2})} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ και $(2,2)$: $\mathrm{e}^{j(\frac{\pi}{2} + \pi - \frac{\pi}{2})} \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, όπως στον $\mathbf{H}$. Ομοίως τα εκτός διαγωνίου
- Συμπέρασμα:
$$\mathbf{H} = \mathrm{e}^{j\pi/2}\, \mathbf{R}_z(2\pi)\, \mathbf{R}_y(\tfrac{\pi}{2})\, \mathbf{R}_z(-\pi)$$
- Η $\beta = 2\pi$ είναι πλήρης περιστροφή: $\mathbf{R}_z(2\pi) = -\mathbf{I}_2$, και το πρόσημο απορροφάται από τις υπόλοιπες γωνίες

Γενίκευση: Euler για οποιαδήποτε κάθετα διανύσματα

- Αποτέλεσμα (χωρίς απόδειξη): για οποιαδήποτε μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{n}, \mathbf{m}$ με $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0$, κάθε μοναδιαίος 2×2 πίνακας $\mathbf{U}$ γράφεται

$$\mathbf{U} = \mathrm{e}^{j\alpha}\, \mathbf{R}_{\mathbf{n}}(\beta)\, \mathbf{R}_{\mathbf{m}}(\gamma)\, \mathbf{R}_{\mathbf{n}}(\delta)$$

  για κατάλληλες πραγματικές γωνίες $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

- Οι άξονες z, y της αναπαράστασης Euler ήταν απλώς μία βολική επιλογή ($\mathbf{n} = \mathbf{z}, \mathbf{m} = \mathbf{y}$)

- Ιδέα: με μία περιστροφή $\mathbf{V}$ της σφαίρας Bloch στέλνουμε τα $\mathbf{n}, \mathbf{m}$ στα $\mathbf{z}, \mathbf{y}$, εφαρμόζουμε την αναπαράσταση ZYZ στον $\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{V}\mathbf{U}\mathbf{V}^\dagger$ και επιστρέφουμε πίσω

Η αναπαράσταση $\mathbf{U} = \mathrm{e}^{j\alpha}\mathbf{AXBXC}$

- Για κάθε πύλη $\mathbf{U}$ ενός qubit υπάρχουν μοναδιαίοι $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ με $\mathbf{ABC} = \mathbf{I}_2$ και πραγματικό α ώστε

$$\mathbf{U} = \mathrm{e}^{j\alpha}\,\mathbf{AXBXC}$$

- Σκοπός: κατασκευή της ελεγχόμενης εκδοχής οποιασδήποτε πύλης ενός qubit, από τις $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ και δύο πύλες CNOT (που υλοποιούν το $\mathbf{X}$)
- Αν το qubit ελέγχου είναι $|0\rangle$, οι CNOT δεν ενεργοποιούνται και

$$|\phi\rangle = \mathbf{ABC}\,|\psi\rangle = |\psi\rangle$$

- Αν το qubit ελέγχου είναι $|1\rangle$, οι CNOT εφαρμόζουν το $\mathbf{X}$ και

$$|\phi\rangle = \mathbf{AXBXC}\,|\psi\rangle = \mathrm{e}^{-j\alpha}\mathbf{U}\,|\psi\rangle$$

- Δηλαδή η έξοδος είναι η $\mathbf{U}\,|\psi\rangle$ μέχρι την καθολική φάση $\mathrm{e}^{-j\alpha}$

Οι πίνακες A, B, C

- Αποτέλεσμα: αν $\mathbf{U} = \mathrm{e}^{j\alpha}\mathbf{R}_z(\beta)\mathbf{R}_y(\gamma)\mathbf{R}_z(\delta)$ (αναπαράσταση Euler), οι μοναδιαίοι πίνακες

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_z(\beta)\,\mathbf{R}_y\left(\tfrac{\gamma}{2}\right)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}_y\left(-\tfrac{\gamma}{2}\right)\mathbf{R}_z\left(-\tfrac{\beta+\delta}{2}\right)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{R}_z\left(\tfrac{\delta-\beta}{2}\right)$$

ικανοποιούν

$$\mathbf{ABC} = \mathbf{I}_2, \qquad \mathbf{U} = \mathrm{e}^{j\alpha}\,\mathbf{AXBXC}$$

- Οι γωνίες $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ υπολογίζονται όπως στην αναπαράσταση Euler

Απόδειξη (1/2): το βασικό βήμα

- Αφού $\mathbf{XYX} = -\mathbf{Y}$ και $\mathbf{XZX} = -\mathbf{Z}$ (και $\mathbf{X}^2 = \mathbf{I}_2$),

$$\mathbf{X}\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{X} = \cos\tfrac{\theta}{2}\,\mathbf{I}_2 - j\sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathbf{XYX} = \mathbf{R}_y(-\theta)$$

$$\mathbf{X}\mathbf{R}_z(\theta)\mathbf{X} = \mathbf{R}_z(-\theta)$$

- Ο $\mathbf{R}_y(\theta)$ και ο $\mathbf{R}_z(\theta)$ περιέχουν μόνο τους $\mathbf{I}_2$ και $\mathbf{Y}$ ή $\mathbf{Z}$, άρα η συζυγία με τον $\mathbf{X}$ αλλάζει το πρόσημο της γωνίας
- $\mathbf{ABC} = \mathbf{I}_2$: οι $\mathbf{R}_y$ αναιρούνται και οι $\mathbf{R}_z$ προστίθενται

$$\mathbf{ABC} = \mathbf{R}_z(\beta)\underbrace{\mathbf{R}_y\left(\tfrac{\gamma}{2}\right)\mathbf{R}_y\left(-\tfrac{\gamma}{2}\right)}_{\mathbf{I}_2}\mathbf{R}_z\left(-\tfrac{\beta+\delta}{2}\right)\mathbf{R}_z\left(\tfrac{\delta-\beta}{2}\right)$$

$$= \mathbf{R}_z\left(\beta - \tfrac{\beta+\delta}{2} + \tfrac{\delta-\beta}{2}\right) = \mathbf{R}_z(0) = \mathbf{I}_2$$

Απόδειξη (2/2): $\mathbf{U} = \mathrm{e}^{j\alpha}\mathbf{AXBXC}$

- Με $\mathbf{XX} = \mathbf{I}_2$ ανάμεσα στους παράγοντες,

$$\mathbf{XBX} = \left(\mathbf{X}\mathbf{R}_y\left(-\tfrac{\gamma}{2}\right)\mathbf{X}\right)\left(\mathbf{X}\mathbf{R}_z\left(-\tfrac{\beta+\delta}{2}\right)\mathbf{X}\right) = \mathbf{R}_y\left(\tfrac{\gamma}{2}\right)\mathbf{R}_z\left(\tfrac{\beta+\delta}{2}\right)$$

- Άρα

$$\mathbf{AXBXC} = \mathbf{R}_z(\beta)\mathbf{R}_y\left(\tfrac{\gamma}{2}\right)\mathbf{R}_y\left(\tfrac{\gamma}{2}\right)\mathbf{R}_z\left(\tfrac{\beta+\delta}{2}\right)\mathbf{R}_z\left(\tfrac{\delta-\beta}{2}\right)$$

- Οι διαδοχικές περιστροφές γύρω από τον ίδιο άξονα προστίθενται:

$$\mathbf{AXBXC} = \mathbf{R}_z(\beta)\,\mathbf{R}_y(\gamma)\,\mathbf{R}_z(\delta)$$

- Πολλαπλασιάζοντας με $\mathrm{e}^{j\alpha}$ παίρνουμε την αναπαράσταση Euler του $\mathbf{U}$, δηλαδή $\mathbf{U} = \mathrm{e}^{j\alpha}\mathbf{AXBXC}$

Παράδειγμα: οι πίνακες A, B, C για την πύλη Hadamard

- Από το παράδειγμα της πύλης Hadamard: $\beta = 2\pi$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $\delta = -\pi$, και $\mathbf{R}_z(2\pi) = -\mathbf{I}_2$
- $\mathbf{A} = \mathbf{R}_z(2\pi)\mathbf{R}_y(\frac{\pi}{4}) = -\mathbf{R}_y(\frac{\pi}{4}) = \begin{bmatrix} -\cos\frac{\pi}{8} & \sin\frac{\pi}{8} \\ -\sin\frac{\pi}{8} & -\cos\frac{\pi}{8} \end{bmatrix}$
- Αφού $-\frac{\beta+\delta}{2} = -\frac{\pi}{2}$:

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}_y(-\tfrac{\pi}{4})\,\mathbf{R}_z(-\tfrac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{8}\,(1+j) & \sin\frac{\pi}{8}\,(1-j) \\ -\sin\frac{\pi}{8}\,(1+j) & \cos\frac{\pi}{8}\,(1-j) \end{bmatrix}$$

- Αφού $\frac{\delta-\beta}{2} = -\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2\pi$ και $\mathbf{R}_z(\theta - 2\pi) = -\mathbf{R}_z(\theta)$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{R}_z(-\tfrac{3\pi}{2}) = -\mathbf{R}_z(\tfrac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} j-1 & 0 \\ 0 & -1-j \end{bmatrix}$$

Έλεγχος: $\mathbf{ABC} = \mathbf{I}_2$ για την πύλη Hadamard

- Αντί για άμεσο πολλαπλασιασμό με $\cos\frac{\pi}{8}, \sin\frac{\pi}{8}$, γράφουμε $\mathbf{A} = -\mathbf{R}_y(\frac{\pi}{4})$, $\mathbf{C} = -\mathbf{R}_z(\frac{\pi}{2})$ και τα δύο πρόσημα απαλείφονται:

$$\mathbf{ABC} = \mathbf{R}_y\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\mathbf{R}_y\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)\mathbf{R}_z\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\mathbf{R}_z\left(\tfrac{\pi}{2}\right)$$

- Οι περιστροφές γύρω από τον ίδιο άξονα προστίθενται:

$$\mathbf{ABC} = \mathbf{R}_y(0)\,\mathbf{R}_z(0) = \mathbf{I}_2$$

όπως προβλέπει το γενικό αποτέλεσμα

Οι βασικές πύλες ενός qubit

Πύλη	Πίνακας	Περιστροφή
$\mathbf{X}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	κατά π γύρω από τον x
$\mathbf{Y}$	$\begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}$	κατά π γύρω από τον y
$\mathbf{Z}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	κατά π γύρω από τον z
$\mathbf{H}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	κατά π γύρω από τον $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$
$\mathbf{S}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}$	πύλη φάσης, $\mathbf{S} = \mathrm{e}^{j\pi/4}\mathbf{R}_z(\frac{\pi}{2})$
$\mathbf{T}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{j\pi/4} \end{bmatrix}$	πύλη $\pi/8$, $\mathbf{T} = \mathrm{e}^{j\pi/8}\mathbf{R}_z(\frac{\pi}{4})$, $\mathbf{T}^2 = \mathbf{S}$

Η Hadamard εναλλάσσει τους X και Z

- Με άμεσο πολλαπλασιασμό πινάκων:

$$\mathbf{HXH} = \mathbf{Z}, \qquad \mathbf{HYH} = -\mathbf{Y}, \qquad \mathbf{HZH} = \mathbf{X}$$

- Παράδειγμα για τον **X**:

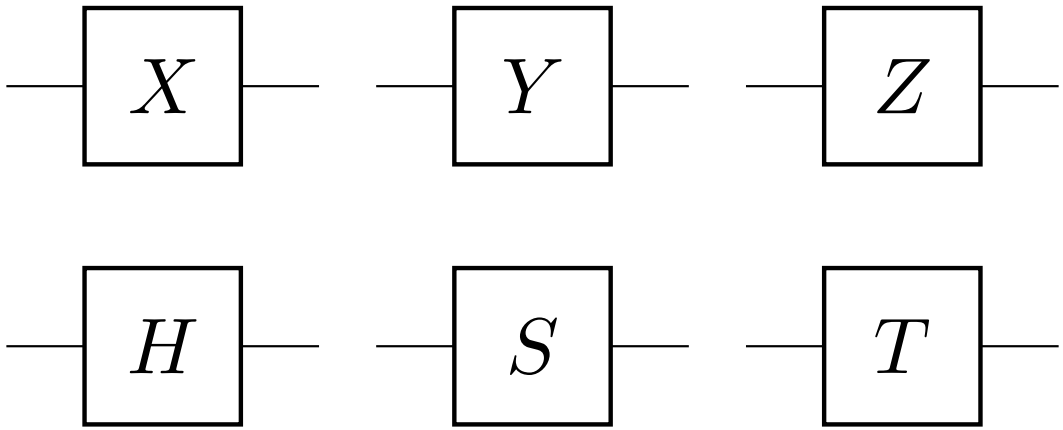
$$\mathbf{HX} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{HXH} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{Z}$$

- Δεν είναι τυχαίο: η **H** είναι περιστροφή κατά π γύρω από τον $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, που αντιμεταθέτει τους άξονες x, z και αντιστρέφει τον y

Κυκλωματικά σύμβολα των πυλών

- Κάθε πύλη ενός qubit παριστάνεται με ένα κουτί με το γράμμα της: το καλώδιο που μπαίνει από αριστερά και βγαίνει από δεξιά είναι η ροή της κατάστασης του qubit στον χρόνο



Παράδειγμα: ο HTH ως περιστροφή γύρω από τον x

- Με $\mathbf{T} = \mathrm{e}^{j\pi/8}\mathbf{R}_z(\frac{\pi}{4}) = \mathrm{e}^{j\pi/8}\left[\cos\frac{\pi}{8}\,\mathbf{I}_2 - j\sin\frac{\pi}{8}\,\mathbf{Z}\right]$

$$\mathbf{HTH} = \mathrm{e}^{j\pi/8}\left[\cos\frac{\pi}{8}\,\mathbf{HH} - j\sin\frac{\pi}{8}\,\mathbf{HZH}\right]$$

- Αφού $\mathbf{H}^2 = \mathbf{I}_2$ και $\mathbf{HZH} = \mathbf{X}$,

$$\mathbf{HTH} = \mathrm{e}^{j\pi/8}\left[\cos\frac{\pi}{8}\,\mathbf{I}_2 - j\sin\frac{\pi}{8}\,\mathbf{X}\right] = \mathrm{e}^{j\pi/8}\mathbf{R}_x(\tfrac{\pi}{4})$$

- Ίδια καθολική φάση $\mathrm{e}^{j\pi/8}$ με την **T**, αφού η σύζευξη με την **H** δεν την αλλάζει

Παράδειγμα: ο V ως γινόμενο πινάκων X, T, H

- Ο $\mathbf{V} = \mathbf{R}_z(-\frac{\pi}{4})\mathbf{R}_x(\frac{\pi}{4})$ είναι περιστροφή $\mathbf{R}_\mathbf{n}(\theta)$ με

$$\cos\tfrac{\theta}{2} = \cos^2\tfrac{\pi}{8}, \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2(\pi/8)}}\left(\cos\tfrac{\pi}{8}, -\sin\tfrac{\pi}{8}, -\cos\tfrac{\pi}{8}\right)$$

- Από $\mathbf{T} = \mathrm{e}^{j\pi/8}\mathbf{R}_z(\frac{\pi}{4})$ και $\mathbf{X}\mathbf{R}_z(\theta)\mathbf{X} = \mathbf{R}_z(-\theta)$:

$$\mathbf{R}_z\left(-\tfrac{\pi}{4}\right) = \mathrm{e}^{-j\pi/8}\mathbf{XTX}$$

- Από το παράδειγμα HTH:

$$\mathbf{R}_x\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \mathrm{e}^{-j\pi/8}\mathbf{HTH}$$

- Άρα, με τις πύλες X, T, H μόνο,

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}_z\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)\mathbf{R}_x\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \mathrm{e}^{-j\pi/4}(\mathbf{XTX})(\mathbf{HTH})$$

Δύο περιστροφές γύρω από κάθετους άξονες (1/2)

- Ορίζουμε $\mathbf{V} = \mathrm{e}^{-j\pi/4}(\mathbf{XTX})(\mathbf{HTH})$, που είναι η περιστροφή $\mathbf{V} = \mathbf{R_n}(\theta)$ με

$$\cos\frac{\theta}{2} = \cos^2\frac{\pi}{8}$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2(\pi/8)}}\left(\cos\tfrac{\pi}{8},\ -\sin\tfrac{\pi}{8},\ -\cos\tfrac{\pi}{8}\right)$$

- Η γωνία θ είναι άρρητο πολλαπλάσιο του 2π
- Ο **V** κατασκευάζεται μόνο από τις πύλες **X**, **T**, **H**

Παράδειγμα: οι πίνακες $\mathbf{H}^{\pm 1/2}$

- Η τετραγωνική ρίζα $\mathbf{R} = \mathbf{A}^{1/2}$ ενός πίνακα ικανοποιεί $\mathbf{R}^2 = \mathbf{A}$, και $\mathbf{A}^{-1/2} = \mathbf{R}^{-1}$. Για τη Hadamard:

$$\mathbf{H}^{1/2} = \frac{1+j}{2}\mathbf{H} + \frac{1-j}{2}\mathbf{I}_2, \qquad \mathbf{H}^{-1/2} = \frac{1-j}{2}\mathbf{H} + \frac{1+j}{2}\mathbf{I}_2$$

- Έλεγχος, με $\mathbf{H}^2 = \mathbf{I}_2$:

$$\left(\mathbf{H}^{-1/2}\right)^2 = -\tfrac{j}{2}\mathbf{I}_2 + \mathbf{H} + \tfrac{j}{2}\mathbf{I}_2 = \mathbf{H}, \qquad \mathbf{H}^{1/2}\mathbf{H}^{-1/2} = \tfrac{1}{2}\mathbf{I}_2 + \tfrac{1}{2}\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_2$$

  και ομοίως $(\mathbf{H}^{1/2})^2 = \mathbf{H}$

- Αντικαθιστώντας τον $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H}^{1/2} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (2+\sqrt{2}) - j(2-\sqrt{2}) & \sqrt{2}(1+j) \\ \sqrt{2}(1+j) & (2-\sqrt{2}) - j(2+\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}^{-1/2} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (2+\sqrt{2}) + j(2-\sqrt{2}) & \sqrt{2}(1-j) \\ \sqrt{2}(1-j) & (2-\sqrt{2}) + j(2+\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

Δύο περιστροφές γύρω από κάθετους άξονες (2/2)

- Ο πίνακας $\mathbf{W} = \mathbf{H}^{-1/2}\mathbf{V}\mathbf{H}^{1/2}$ είναι η περιστροφή $\mathbf{W} = \mathbf{R}_{\mathbf{m}}(\theta)$, με την *ίδια γωνία* θ *αλλά γύρω από τον άξονα*

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2(\pi/8)}}\left(\frac{\sin(\pi/8)}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8},\ -\frac{\sin(\pi/8)}{\sqrt{2}}\right)$$

- Οι *άξονες είναι κάθετοι:*

$$\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{1+\cos^2\frac{\pi}{8}}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8} + \frac{\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

- Με τις $\mathbf{X}, \mathbf{T}, \mathbf{H}$ και $\mathbf{H}^{\pm 1/2}$ *έχουμε λοιπόν δύο πύλες που περιστρέφουν κατά την ίδια γωνία γύρω από κάθετους άξονες*

Κάθε περιστροφή ως δύναμη μίας πύλης

- Αφού το θ είναι άρρητο πολλαπλάσιο του 2π, για κάθε γωνία-στόχο $\varphi \in [0, 2\pi)$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός k με

$$(\mathbf{R_n}(\theta))^k = \pm \mathbf{R_n}(\theta_k), \qquad |\theta_k - \varphi| < \varepsilon$$

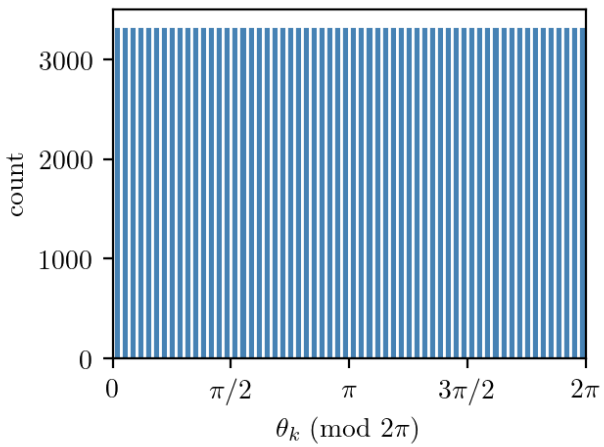
- Με επανάληψη μίας μόνο πύλης προσεγγίζουμε οσοδήποτε καλά κάθε $\mathbf{R_n}(\varphi)$, και ομοίως κάθε $\mathbf{R_m}(\varphi)$, μέχρι καθολική φάση
- Από την αναπαράσταση Euler για κάθετους άξονες

$$\mathbf{U} = \mathrm{e}^{j\alpha} \mathbf{R_n}(\beta) \mathbf{R_m}(\gamma) \mathbf{R_n}(\delta)$$

κάθε πύλη ενός qubit προσεγγίζεται από τις $\mathbf{X}, \mathbf{T}, \mathbf{H}, \mathbf{H}^{\pm 1/2}$

Γιατί βολεύει το θ να είναι άρρητο πολλαπλάσιο του 2π

- Οι δυνάμεις $(\mathbf{R_n}(\theta))^k = \mathbf{R_n}(k\theta) = \pm\mathbf{R_n}(\theta_k)$ με $\theta_k = k\theta \bmod 2\pi$
- Αν το $\theta/2\pi$ ήταν ρητό, οι γωνίες θ_k θα επαναλαμβάνονταν και θα έπαιρναν μόνο πεπερασμένες τιμές. Αν είναι άρρητο, δεν επαναλαμβάνονται ποτέ και γεμίζουν το $[0, 2\pi)$
- Παράδειγμα: $\theta = 2\pi\sqrt{2} \bmod 2\pi \approx 2.603$, $K = 200\,000$ τιμές του k, 60 διαστήματα: η κατανομή των θ_k είναι πρακτικά ομοιόμορφη



Οι $\mathbf{H}^{\pm 1/2}$ από τις H, T (1/7): περιστροφές γύρω από τον γ

- Η $\mathbf{H}$ είναι περιστροφή γύρω από τον $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$: $\mathbf{H} = \mathrm{e}^{j\pi/2}\mathbf{R}_\gamma(\pi)$
- Ισχυρισμός:

$$\mathbf{H}^{1/2} = \mathrm{e}^{-j\pi/4}\mathbf{R}_\gamma\left(-\tfrac{\pi}{2}\right), \qquad \mathbf{H}^{-1/2} = \mathrm{e}^{j\pi/4}\mathbf{R}_\gamma\left(\tfrac{\pi}{2}\right)$$

- Έλεγχος: αφού $\mathbf{R}_\gamma(-\pi) = -\mathbf{R}_\gamma(\pi) = \mathrm{e}^{j\pi/2}\mathbf{H}$ και οι περιστροφές γύρω από τον ίδιο άξονα προστίθενται,

$$\left(\mathrm{e}^{-j\pi/4}\mathbf{R}_\gamma\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right)^2 = \mathrm{e}^{-j\pi/2}\mathbf{R}_\gamma(-\pi) = \mathrm{e}^{-j\pi/2}\mathrm{e}^{j\pi/2}\mathbf{H} = \mathbf{H}$$

- Ότι πρόκειται για την $\mathbf{H}^{1/2}$ (και όχι για την $-\mathbf{H}^{1/2}$ ή την $\mathbf{H}^{-1/2}$) φαίνεται από τον ρητό πίνακα, με $\mathbf{R}_\gamma(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{I}_2 + \frac{j}{2}(\mathbf{X}+\mathbf{Z})$, που δίνει τον πίνακα του $\mathbf{H}^{1/2}$ που βρήκαμε

Οι $\mathbf{H}^{\pm 1/2}$ από τις H, T (2/7): ο S στρέφει τον x στον y

- Ισχυρισμός: $\mathbf{S}\mathbf{R}_x(\theta)\mathbf{S}^{\mathrm{T}} = \mathbf{R}_y(\theta)$
- Οι πίνακες:

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -j\sin\frac{\theta}{2} \\ -j\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}$$

- Ο S από αριστερά πολλαπλασιάζει τη 2η γραμμή επί j:

$$\mathbf{S}\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -j\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & j\cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

- Ο $\mathbf{S}^{\mathrm{T}}$ από δεξιά πολλαπλασιάζει τη 2η στήλη επί $-j$, και $(-j)(-j) = -1$, $j(-j) = 1$:

$$\mathbf{S}\mathbf{R}_x(\theta)\mathbf{S}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_y(\theta)$$

Οι $\mathbf{H}^{\pm 1/2}$ από τις H, T (3/7): περιστροφή γύρω από τον γ

- Ισχυρισμός: $\mathbf{R}_y(\frac{\pi}{4})\mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{R}_y(-\frac{\pi}{4}) = \mathbf{R}_\gamma(\varphi)$
- Με $c_0 = \cos\frac{\pi}{8}$, $s_0 = \sin\frac{\pi}{8}$:

$$\mathbf{R}_y(\tfrac{\pi}{4}) = \begin{bmatrix} c_0 & -s_0 \\ s_0 & c_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_y(-\tfrac{\pi}{4}) = \begin{bmatrix} c_0 & s_0 \\ -s_0 & c_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z(\varphi) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-j\varphi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{j\varphi/2} \end{bmatrix}$$

- Πρώτα το γινόμενο $\mathbf{R}_y(\frac{\pi}{4})\mathbf{R}_z(\varphi)$:

$$\begin{bmatrix} c_0\mathrm{e}^{-j\varphi/2} & -s_0\mathrm{e}^{j\varphi/2} \\ s_0\mathrm{e}^{-j\varphi/2} & c_0\mathrm{e}^{j\varphi/2} \end{bmatrix}$$

- Και μετά από δεξιά με τον $\mathbf{R}_y(-\frac{\pi}{4})$:

$$\begin{bmatrix} c_0^2\mathrm{e}^{-j\varphi/2} + s_0^2\mathrm{e}^{j\varphi/2} & c_0 s_0(\mathrm{e}^{-j\varphi/2} - \mathrm{e}^{j\varphi/2}) \\ c_0 s_0(\mathrm{e}^{-j\varphi/2} - \mathrm{e}^{j\varphi/2}) & s_0^2\mathrm{e}^{-j\varphi/2} + c_0^2\mathrm{e}^{j\varphi/2} \end{bmatrix}$$

Οι $\mathbf{H}^{\pm 1/2}$ από τις $\mathbf{H}, \mathbf{T}$ (4/7): η περιστροφή γύρω από τον γ

- Απλοποιούμε με $c_0^2 + s_0^2 = 1$, $c_0^2 - s_0^2 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $2c_0 s_0 = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ και $\mathrm{e}^{\mp j\varphi/2} = \cos\frac{\varphi}{2} \mp j\sin\frac{\varphi}{2}$. Π.χ. το στοιχείο $(1,1)$:

$$c_0^2 \mathrm{e}^{-j\varphi/2} + s_0^2 \mathrm{e}^{j\varphi/2} = \cos\tfrac{\varphi}{2} - j\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\tfrac{\varphi}{2}$$

- Το εκτός διαγωνίου στοιχείο: $c_0 s_0 (\mathrm{e}^{-j\varphi/2} - \mathrm{e}^{j\varphi/2}) = -\frac{j}{\sqrt{2}}\sin\frac{\varphi}{2}$
- Άρα

$$\mathbf{R}_y\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{R}_y\left(-\tfrac{\pi}{4}\right) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} - \frac{j}{\sqrt{2}}\sin\frac{\varphi}{2} & -\frac{j}{\sqrt{2}}\sin\frac{\varphi}{2} \\ -\frac{j}{\sqrt{2}}\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} + \frac{j}{\sqrt{2}}\sin\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}$$

- Ο ίδιος πίνακας προκύπτει από τον γενικό τύπο με $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$:

$$\mathbf{R}_\gamma(\varphi) = \cos\tfrac{\varphi}{2}\,\mathbf{I}_2 - j\sin\tfrac{\varphi}{2}\,\frac{\mathbf{X}+\mathbf{Z}}{\sqrt{2}}$$

Οι $\mathbf{H}^{\pm 1/2}$ από τις $\mathbf{H}, \mathbf{T}$ (5/7): ο $\mathbf{S}$ μετατίθεται με τον $\mathbf{R}_z$

- Ισχυρισμός: $\mathbf{S}\mathbf{R}_z(\varphi) = \mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{S}$
- Και οι δύο πίνακες είναι διαγώνιοι:

$$\mathbf{S}\mathbf{R}_z(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 \cdot \mathrm{e}^{-j\varphi/2} & 0 \\ 0 & j\,\mathrm{e}^{j\varphi/2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-j\varphi/2} \cdot 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{j\varphi/2} \cdot j \end{bmatrix}$$

- Οι δύο πίνακες ταυτίζονται, άρα $\mathbf{S}\mathbf{R}_z(\varphi) = \mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{S}$
- Γενικά, δύο διαγώνιοι πίνακες μετατίθενται πάντα: κάθε διαγώνιο στοιχείο του γινομένου είναι το γινόμενο των αντίστοιχων διαγώνιων στοιχείων, ανεξάρτητα από τη σειρά
- Συνεπώς και $\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{S} = \mathbf{R}_z(\varphi)$, αφού $\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{S} = \mathbf{I}_2$

Οι $\mathbf{H}^{\pm 1/2}$ από τις $\mathbf{H}, \mathbf{T}$ (6/7): συνδυασμός των σχέσεων

- Συνδυάζοντας τις (1) και (2), και αφού ο $\mathbf{S}$ μετατίθεται με τον $\mathbf{R}_z$ (3):

$$\mathbf{R}_\gamma(\varphi) = \mathbf{S}\mathbf{R}_x\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{S}\mathbf{R}_x\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)\mathbf{S}^{\mathrm{T}}$$

$$= \mathbf{S}\mathbf{R}_x\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{R}_x\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)\mathbf{S}^{\mathrm{T}}$$

- Με $\mathbf{T}^8 = \mathbf{I}_2$ ($\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^7$), από τις πύλες $\mathbf{H}, \mathbf{T}$:

$$\mathbf{R}_x\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \mathrm{e}^{-j\pi/8}\mathbf{H}\mathbf{T}\mathbf{H}$$

$$\mathbf{R}_x\left(-\tfrac{\pi}{4}\right) = \mathrm{e}^{j\pi/8}\mathbf{H}\mathbf{T}^7\mathbf{H}$$

$$\mathbf{R}_z\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \mathrm{e}^{-j\pi/8}\mathbf{T}$$

Οι $\mathbf{H}^{\pm 1/2}$ από τις $\mathbf{H}, \mathbf{T}$ (7/7): το αποτέλεσμα

- Για $\varphi = -\frac{\pi}{2}$: $\mathbf{R}_z(-\frac{\pi}{2}) = \mathrm{e}^{j\pi/4}\mathbf{T}^{-2} = \mathrm{e}^{j\pi/4}\mathbf{T}^{6}$. Οι φάσεις δίνουν $\mathrm{e}^{j\pi/4}$, που ακυρώνεται με το $\mathrm{e}^{-j\pi/4}$ της $\mathbf{H}^{1/2}$:

$$\mathbf{H}^{1/2} = \mathbf{SHTHT}^{6}\mathbf{HT}^{7}\mathbf{HS}^{-1}$$

- Ομοίως για $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ($\mathbf{R}_z(\frac{\pi}{2}) = \mathrm{e}^{-j\pi/4}\mathbf{T}^{2}$):

$$\mathbf{H}^{-1/2} = \mathbf{SHTHT}^{2}\mathbf{HT}^{7}\mathbf{HS}^{-1}$$

- Με $\mathbf{S} = \mathbf{T}^2$ και $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{T}^6$:

$$\mathbf{H}^{1/2} = \mathbf{T}^{2}\mathbf{HTHT}^{6}\mathbf{HT}^{7}\mathbf{HT}^{6}$$

$$\mathbf{H}^{-1/2} = \mathbf{T}^{2}\mathbf{HTHT}^{2}\mathbf{HT}^{7}\mathbf{HT}^{6}$$

Το σύνολο $\{\mathbf{H}, \mathbf{T}\}$ είναι καθολικό

- Οι $\mathbf{H}^{\pm 1/2}$ γράφονται ακριβώς με τις $\mathbf{H}, \mathbf{T}$:

$$\mathbf{H}^{1/2} = \mathbf{T}^2\mathbf{H}\mathbf{T}\mathbf{H}\mathbf{T}^6\mathbf{H}\mathbf{T}^7\mathbf{H}\mathbf{T}^6$$

$$\mathbf{H}^{-1/2} = \mathbf{T}^2\mathbf{H}\mathbf{T}\mathbf{H}\mathbf{T}^2\mathbf{H}\mathbf{T}^7\mathbf{H}\mathbf{T}^6$$

- Άρα αρκούν οι $\mathbf{X}, \mathbf{T}, \mathbf{H}$
- Αφού $\mathbf{X} = \mathbf{H}\mathbf{Z}\mathbf{H}$ και $\mathbf{Z} = \mathbf{T}^4$ (μέχρι καθολική φάση), αρκούν οι $\mathbf{T}$ και $\mathbf{H}$
- Συμπέρασμα: κάθε πύλη ενός qubit μπορεί να προσεγγιστεί όσο καλά θέλουμε από κυκλώματα αποκλειστικά από τις πύλες $\mathbf{H}$ και $\mathbf{T}$