Κβαντικοί Υπολογιστές και Αλγόριθμοι

Διάλεξη 2η

Θωμάς Καμαλάκης

Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο Αθηνών

2025

Περιεχόμενα

1. Η σφαίρα Bloch
2. Κβαντικοί Καταχωρητές
3. Υπολογισμοί με qubit

Πως μπορούμε να αναπαραστήσουμε ένα qubit;

- Αν θεωρήσουμε ένα qubit που είναι στην κατάσταση, $|\psi\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$.
- Πως μπορούμε να το αναπαραστήσουμε;
- Τα a και b είναι μιγαδικοί αριθμοί άρα δεν μπορούμε να αντιστοιχήσουμε άμεσα το $|\psi\rangle$ με ένα σημείο (a, b) στο επίπεδο.
- Κάθε μιγαδικός αριθμός $z = p + jq$ μπορεί να γραφεί ως:

$$z = |z|\mathrm{e}^{j\phi}$$

- όπου:

$$\cos\phi = \frac{p}{|z|}\,,\ \sin\phi = \frac{q}{|z|} \tag{1}$$

Πως μπορούμε να αναπαραστήσουμε ένα qubit;

- Έστω τώρα $a = |a|e^{j\phi_a}$ και $b = |b|e^{j\phi_b}$
- Θα έχουμε:

$$|\psi\rangle = |a|e^{j\phi_a}|0\rangle + |b|e^{j\phi_b}|1\rangle = e^{j\phi_a}(|a||0\rangle + |b|e^{j(\phi_b-\phi_a)}|1\rangle)$$

- Παίζει κάποιο ρόλο το $e^{j\phi_a}$ στις ιδιότητες του qubit;
- Όταν το qubit είναι μόνο του στον κόσμο, όχι!
- Είτε υπάρχει είτε όχι, η σχέση μεταξύ των πλατών το $|0\rangle$ και του $|1\rangle$ δεν αλλάζει, είναι η ίδια. Θα το συζητήσουμε περαιτέρω αυτό στα επόμενα κεφάλαια.
- Εφόσον $|a|^2 + |b|^2 = 1$ έπεται ότι $|a| \leq 1$.

Πως μπορούμε να αναπαραστήσουμε ένα qubit;

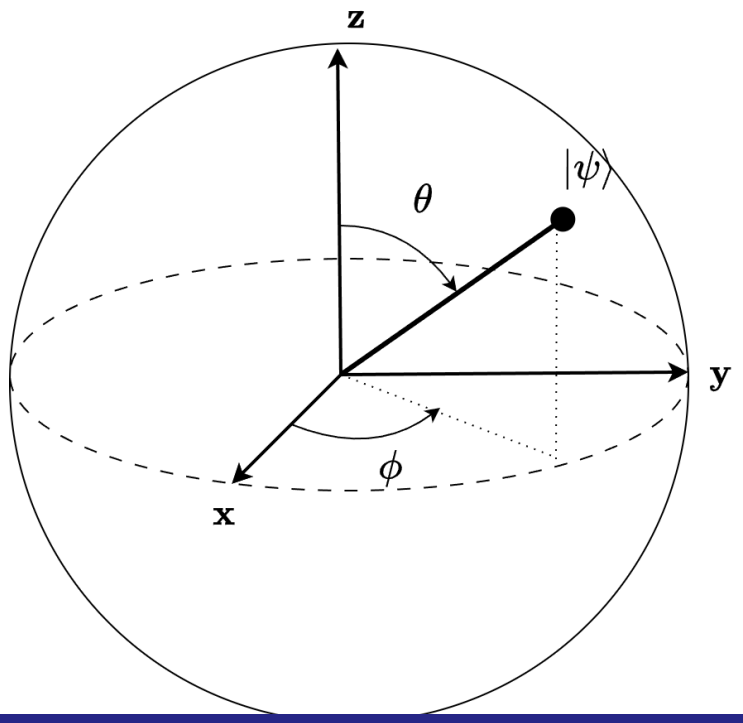
- Πάντα μπορούμε να βρούμε μία γωνία $0 \leq \theta \leq \pi$ τέτοια ώστε $|a| = \cos(\theta/2)$.
- $|b| = \sqrt{1 - |a|^2} = \sqrt{1 - \cos^2(\theta/2)} = \sin(\theta/2)$.
- Εάν θέσουμε $\phi = \phi_b - \phi_a$ και ξεχάσουμε τον παράγοντα $\mathrm{e}^{j\phi_a}$ τότε το qubit γράφεται ως εξής:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \mathrm{e}^{j\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

- Επομένως το $|\psi\rangle$ αντιστοιχεί στις γωνίες θ και ϕ.

Η σφαίρα του Bloch

- Παριστάνουμε το $|\psi\rangle$ πάνω σε μία σφαίρα (σφαίρα Bloch) με ακτίνα 1, σε ένα τρισδιάστατο άξονα συντεταγμένων.
- θ είναι η γωνία που σχηματίζεται με τον άξονα των z ενώ ϕ η γωνία της προβολής πάνω στο επίπεδο (x, y) με τον άξονα x



Qubit εναντίον bit

- Πόση πληροφορία μεταφέρει ένα *κλασικό* bit;
- Αποθηκεύει είτε το 0 είτε το 1. Δηλαδή ένα *δυαδικό* ψηφίο.
- Αν θεωρήσουμε την αναπαράσταση του qubit στη σφαίρα Bloch καταλαβαίνουμε ότι αποθηκεύει δύο πραγματικούς αριθμούς: το θ και το ϕ.
- Θεωρητικά λοιπόν το qubit αποθηκεύει *απείρως* μεγαλύτερη πληροφορία (αφού υπάρχουν άπειροι πραγματικοί αριθμοί μέσα σε ένα διάστημα).
- Προσοχή όμως: όταν πάμε να μετρήσουμε ένα qubit τελικά θα πάρουμε είτε $|0\rangle$ είτε $|1\rangle$. Δηλαδή χάνουμε την πληροφορία σε μεγάλο βαθμό.

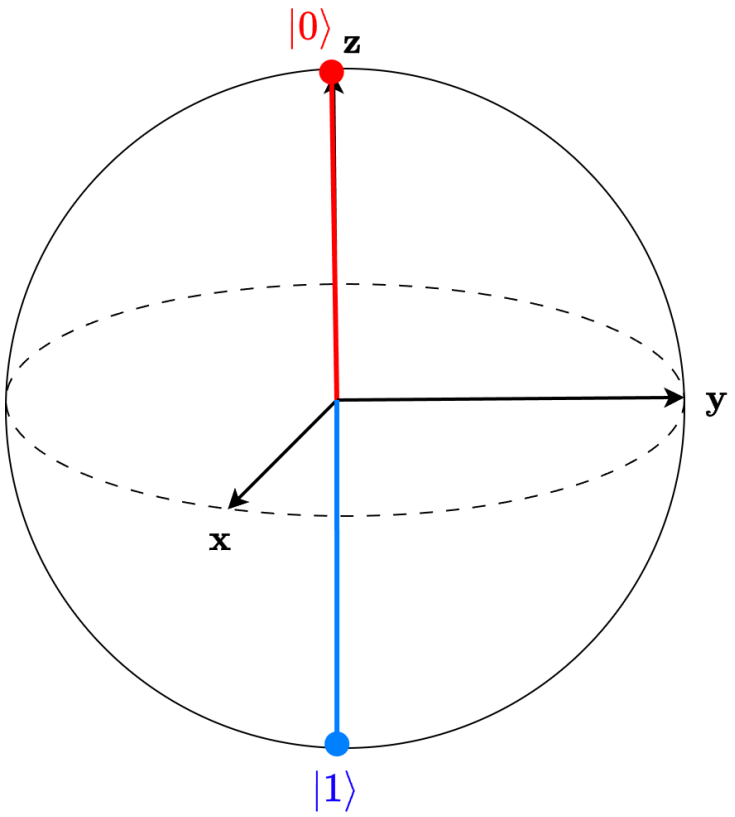
Από τα πλάτη a,b στη σφαίρα του Bloch

- $|a| = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, άρα $\theta = 2\arccos|a|$.
- Με arccos συμβολίζουμε το αντίστροφο τόξο του cos. Επομένως εάν $\cos x = y$ τότε $y = \arccos(x)$.
- $|b| = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{j\phi}$, άρα $\phi = \arg\{b\}$.
- Με arg συμβολίζουμε τη φάση του μιγαδικού αριθμού. Επομένως αν $z = |z|\mathrm{e}^{jq}$ τότε $q = \arg(z)$.
- Φυσικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την `Python` για να κάνουμε αυτούς τους υπολογισμούς.

Παράδειγμα: τα $|0\rangle$ και $|1\rangle$ στη σφαίρα Bloch.

- Για το $|0\rangle$ έχουμε $a = 1$ και $b = 0$.
- Επομένως $\theta = 2 \arccos |a| = 2 \times 0 = 0$.
- $\phi = \arg\{0\} = 0$.
- Για το $|1\rangle$ έχουμε $a = 0$ και $b = 1$.
- Επομένως $\theta = 2 \arccos |a| = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$.
- $\phi = \arg\{1\} = 0$.

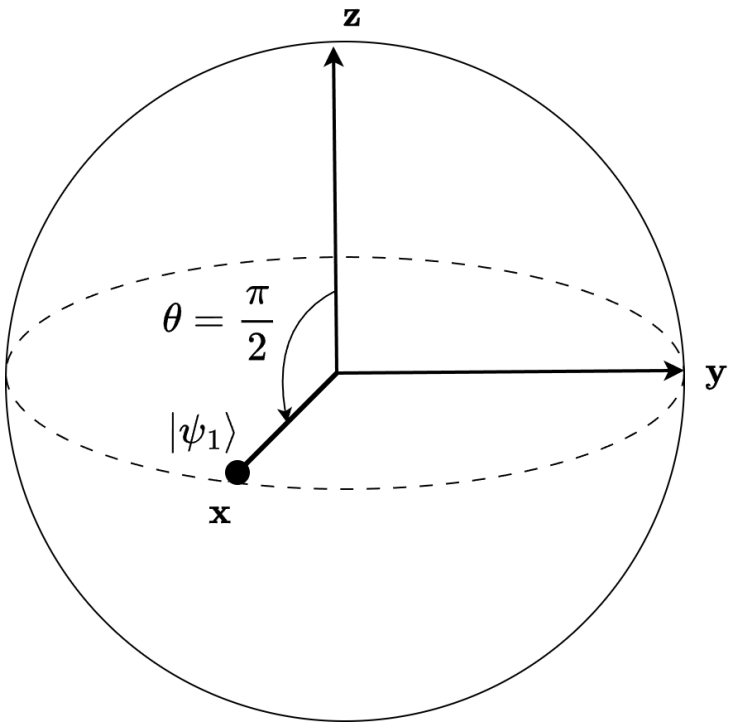
Παράδειγμα: τα $|0\rangle$ και $|1\rangle$ στη σφαίρα Bloch.



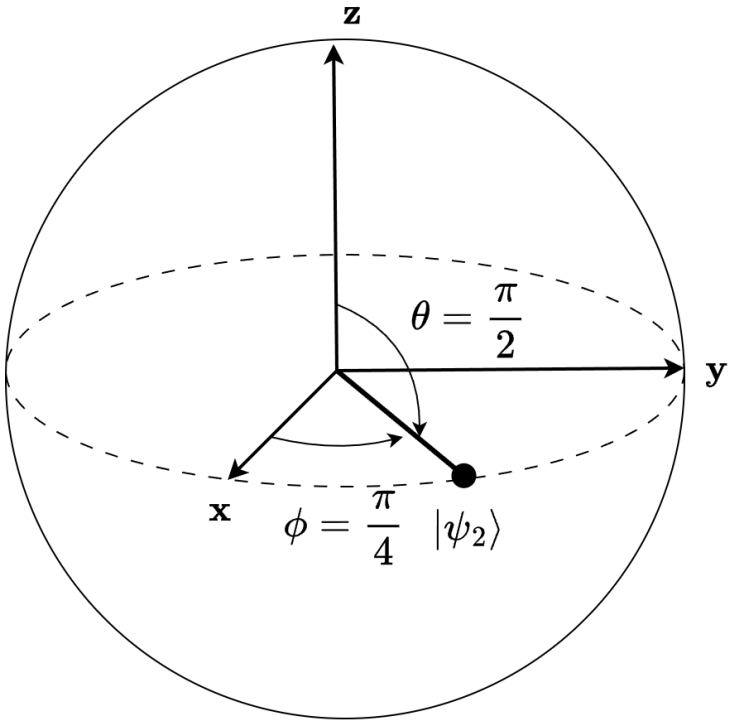
2ο παράδειγμα

- Έστω $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, οπότε $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- $\theta = 2\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
- $\phi = \arg\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\} = 0$.
- Έστω $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + j|1\rangle)$, οπότε $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ και $b = ja$.
- $\theta = 2\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
- $\phi = \arg\{a + ja\} = \arg\left\{a\sqrt{2}e^{j\pi/4}\right\} = \frac{\pi}{4}$.

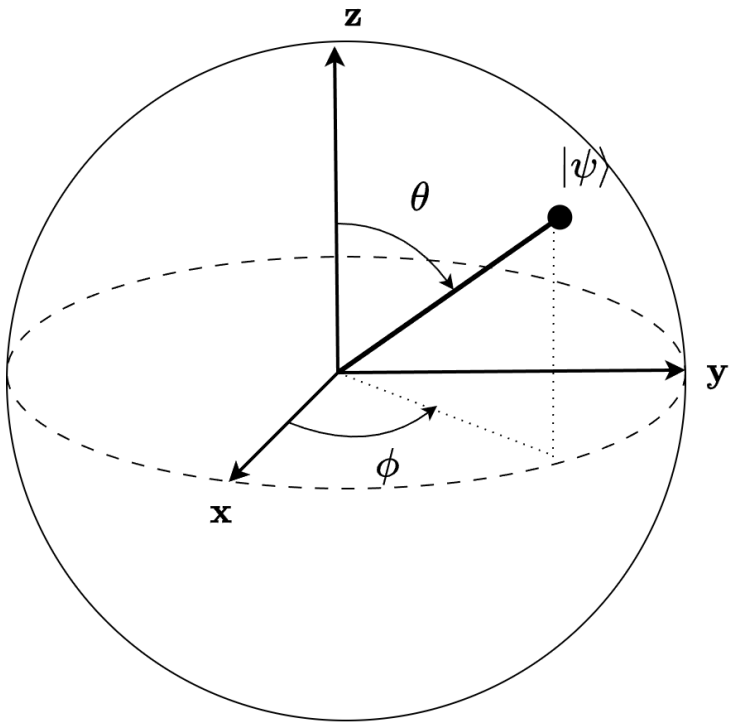
2ο παράδειγμα



2ο παράδειγμα



Από τα a, b στη σφαίρα Bloch: Γενική περίπτωση



- Η σφαίρα του Bloch έχει ακτίνα 1.
- Το σημείο που αναπαριστά την κατάσταση $|\psi\rangle$ έχει συντεταγμένες (x, y, z) που δίνονται από τις σχέσεις:

$$z = \cos\theta$$

$$y = \sin\theta \sin\phi$$

$$x = \sin\theta \cos\phi$$

Από τα a, b στη σφαίρα Bloch: Γενική περίπτωση

- Ας θεωρήσουμε ότι το a είναι πραγματικό και θετικό (θυμηθείτε πάντα μπορούμε να διώξουμε την φάση του), τότε $\phi = \phi_b$. Από την αγαπημένη τριγωνομετρία έχουμε:

$$\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) = 2a|b|$$

$$\cos\theta = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) = a^2 - |b|^2$$

- οπότε:

$$\cos\phi = \Re b/|b|\,,\ \sin\phi = \Im b/|b| \tag{2}$$

- Επομένως:

$$z = a^2 - |b|^2\,, y = 2a\Im b\,, x = 2a\Re b$$

Από τη σφαίρα Blochs στα a, b

- Αν υποθέσουμε ότι ξέρουμε τα (x, y, z) τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τα a και b.
- Έχουμε $|a|^2 + |b|^2 = a^2 + |b|^2 = 1$ και $a^2 - |b|^2 = z$.
- Επομένως: $a^2 = (z+1)/2$ οπότε $a = \sqrt{(z+1)/2}$
- Επίσης:

$$b = \Re b + j\Im b = \frac{x}{2a} + j\frac{y}{2a} \tag{3}$$

- Επομένως αν ξέρουμε τα x, y, z μπορούμε άμεσα να υπολογίσουμε τα a, b.

Κβαντικοί Καταχωρητές

- Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με ένα qubit το οποίο δεν αλληλεπιδρούσε με άλλα qubit.
- Οι κβαντικοί καταχωρητές είναι ομάδες από qubits.
- Ας πάρουμε την περίπτωση όπου ο καταχωρητής έχει δύο qubits.
- Ο κλασικός καταχωρητής με δύο bits μπορεί να αποθηκεύει τέσσερις συνδυασμούς: 00, 01, 10 και 11.
- Ο κβαντικός καταχωρητής αποθηκεύει ένα πλάτος για κάθε συνδυασμό:

$$|\psi\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle$$

Κβαντικοί Καταχωρητές

- Όπως και πριν, αν μετρήσουμε και τα qubit του καταχωρητή, το αποτέλεσμα περιγράφεται με πιθανότητες.
- Π.χ. η πιθανότητα να πάρουμε και τα δύο να είναι $|0\rangle$ είναι $|a_{00}|^2$.
- Περιγράφουμε αυτή την κατάσταση ως $|0\rangle\,|0\rangle$ ή ακόμα πιο απλά $|00\rangle$.
- Γενικότερα η πιθανότητα P να έχουμε την κατάσταση $|\mu\nu\rangle$ είναι:

$$P = |a_{\mu\nu}|^2 \tag{4}$$

Κβαντικοί Καταχωρητές

- Ενας εναλλακτικός τρόπος να παριστάνουμε τις καταστάσεις του καταχωρητή είναι να μετατρέψουμε τους διαφορετικούς δυαδικούς συνδυασμούς στο δεκαδικό τους ισοδύναμο.
- $00 \to 0\,, 01 \to 1\,, 10 \to 2\,, 11 \to 3.$
- Οπότε γράφουμε:

$$|\psi\rangle = a_0\,|0\rangle + a_1\,|1\rangle + a_2\,|2\rangle + a_3\,|3\rangle = \sum_{i=0}^{3} a_i\,|i\rangle$$

Διανύσματα για 2 qubits

- Παρατηρούμε τώρα ότι χρειαζόμαστε τέσσερις ($= 2^2$) αριθμούς a_i για να περιγράψουμε την κατάσταση του καταχωρητή.
- Επομένως τώρα αντιστοιχούμε την κατάσταση $|\psi\rangle$ με ένα διάνυσμα 4 στοιχείων:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$\langle\psi| = \begin{bmatrix} a_0, a_1, a_2, a_3 \end{bmatrix}$$

Παραδείγματα

$$|0\rangle = |00\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, |1\rangle = |01\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$|2\rangle = |10\rangle = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, |3\rangle = |11\rangle = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Εσωτερικό γινόμενο

- Το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται με παρόμοιο τρόπο, μόνο που πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και τις 4 συνιστώσες:
- Έστω:

$$|\psi\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle + a_3 |3\rangle$$

$$|\phi\rangle = b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle + b_2 |2\rangle + b_3 |3\rangle$$

- Τότε:

$$\langle\phi\rangle \psi = b_0^* a_0 + b_1^* a_1 + b_2^* a_2 + b_3^* a_3 = \sum_{i=0}^{3} b_i^* a_i$$

Εσωτερικό γινόμενο

- Οι πιθανότητες εμφάνισης $P_i = |a_i|^2$ των $|i\rangle$ μετά την μέτρηση μπορούν να εκφρασθούν και πάλι με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου.
- Εάν:

$$|\psi\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle + a_3 |3\rangle = \sum_{i=0}^{3} a_i |i\rangle = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

- Έχουμε:

$$\langle i|\psi\rangle = a_i \Rightarrow P_i = |a_i|^2 = |\langle i|\psi\rangle|^2$$

Μετρώντας μόνο ένα qubit

- Τι συμβαίνει εάν μετρήσουμε μόνο ένα qubit;
- Ας υποθέσουμε ότι $|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$.
- Η παραπάνω κατάσταση σημαίνει ότι κάθε συνδυασμός $|\mu\nu\rangle$ θα έχει πιθανότητα εμφάνισης 25%.
- Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι εάν μετρήσουμε το πρώτο qubit τότε έχει 50% να είναι ίσο με $|0\rangle$ και 50% να είναι ίσο με $|1\rangle$.
- Εάν το αποτέλεσμα της μέτρησης είναι το $|0\rangle$ τότε η κατάσταση του συστήματος $|\psi'\rangle$ θα πρέπει να είναι τέτοια μετά την μέτρηση ούτως ώστε το δεύτερο qubit να έχει 50% να είναι $|0\rangle$ ή $|1\rangle$.
- Οπότε σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε $|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle)$

Καταστάσεις EPR

- Εδώ αρχίζουν τα παράξενα. Ας θεωρήσουμε ότι φτιάχνουμε την κατάσταση:
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$
- Η παραπάνω κατάσταση σημαίνει ότι με 50% πιθανότητα τα qubits είναι *και τα δύο* $|0\rangle$ και με 50% και τα δύο $|1\rangle$.
- Δεν υπάρχει άλλη δυνατότητα.
- Επομένως εάν μετρήσουμε το πρώτο και βρούμε $|1\rangle$ είμαι σίγουροι ότι και το δεύτερο θα είναι $|1\rangle$.
- Οι καταστάσεις αυτές ονομάζονται ζευγάρια Bell ή πολλές φορές ζευγάρια EPR (Einstein, Podolsky, Rosen)

Spooky action at a distance

- Εσείς και ο Θανάσης σας φτιάχνετε την κατάσταση:

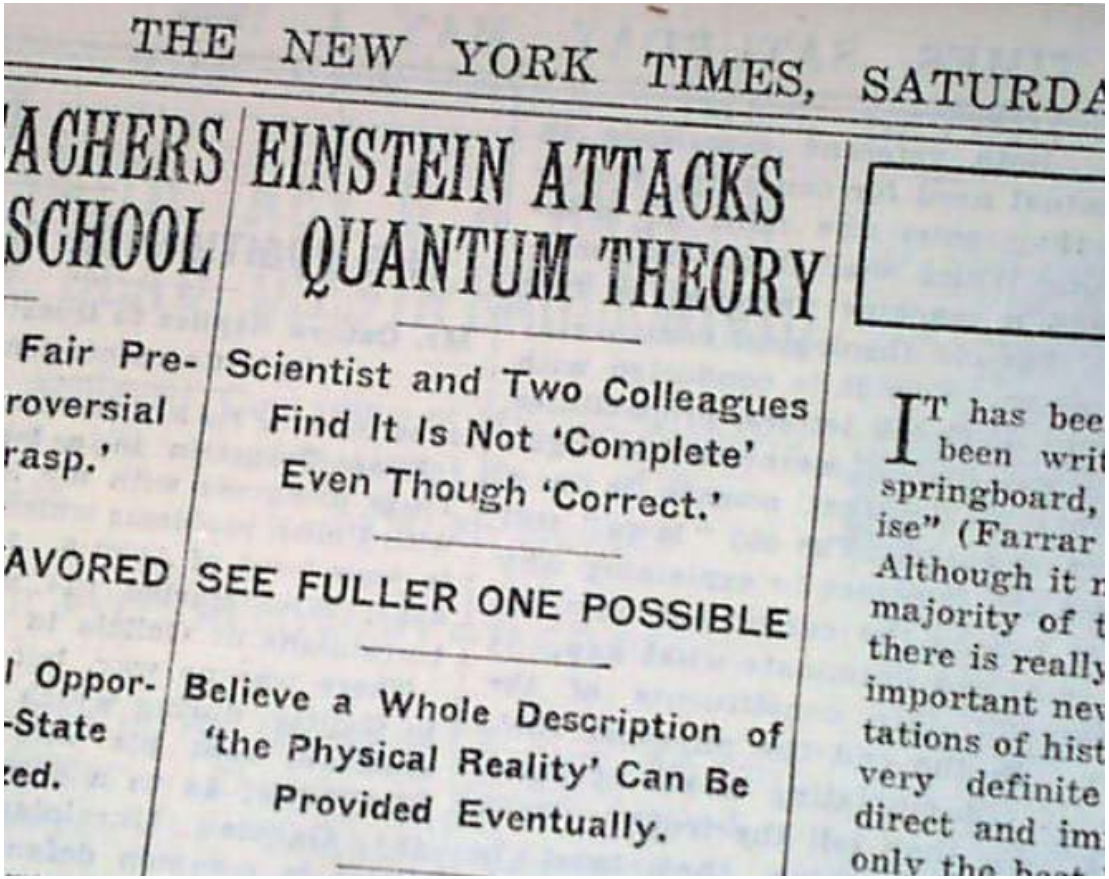
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

- Με πολύ προσοχή παίρνετε το πρώτο qubit και πηγαίνετε να επισκεφτείτε την πεθερά σας στο Α του Κενταύρου (απόσταση: 4,3 έτη φωτός).
- Εκεί μετράτε το qubit σας και βρίσκετε $|0\rangle$.
- Εφόσον η υπέρθεση συνεχίζει να ισχύει και ο Θανάσης θα βρει επίσης $|0\rangle$ αν μετρήσει και αυτός.
- Η "κατάρρευση" του qubit που έχει ο Θανάσης είναι *ακαριαία*!
- Αυτό ονομάζεται *κβαντική διεμπλοκή*. Σε κβαντικό επίπεδο φαίνεται ότι μπορεί να υπάρχει μία βαθιά συσχέτιση μεταξύ πραγμάτων που είναι πολύ μακριά το ένα με το άλλο.

Κβαντική Διεπλοκή

Spooky action at a distance

- Αυτό δεν άρεσε καθόλου στον θείο Αλβέρτο!



THE NEW YORK TIMES, SATURDA

ACHERS SCHOOL

Fair Pre-
roversial
rasp.'

AVORED

l Oppor-
-State
ed.

EINSTEIN ATTACKS QUANTUM THEORY

Scientist and Two Colleagues Find It Is Not 'Complete' Even Though 'Correct.'

SEE FULLER ONE POSSIBLE

Believe a Whole Description of 'the Physical Reality' Can Be Provided Eventually.

IT has bee
been writ
springboard,
ise" (Farrar
Although it r
majority of t
there is really
important nev
tations of hist
very definite
direct and im
only the best

Spooky action at a distance

- Αυτό δεν άρεσε καθόλου στον θείο Αλβέρτο!

MAY 15, 1935 PHYSICAL REVIEW VOLUME 47

Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?

A. EINSTEIN, B. PODOLSKY AND N. ROSEN, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey*

(Received March 25, 1935)

In a complete theory there is an element corresponding to each element of reality. A sufficient condition for the reality of a physical quantity is the possibility of predicting it with certainty, without disturbing the system. In quantum mechanics in the case of two physical quantities described by non-commuting operators, the knowledge of one precludes the knowledge of the other. Then either (1) the description of reality given by the wave function in quantum mechanics is not complete or (2) these two quantities cannot have simultaneous reality. Consideration of the problem of making predictions concerning a system on the basis of measurements made on another system that had previously interacted with it leads to the result that if (1) is false then (2) is also false. One is thus led to conclude that the description of reality as given by a wave function is not complete.

- Θα δούμε σε επόμενο μάθημα όμως ότι μάλλον έχει άδικο!

Καταχωρητές με παραπάνω qubit

- Μπορούμε να φανταστούμε και καταχωρητές με παραπάνω qubits.
- Εάν έχουμε n qubits τότε μπορούμε να φτιάξουμε καταστάσεις με $N = 2^n$ πλάτη, a_i.

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} a_i \, |i\rangle$$

- Για $n = 300$ μπορούμε να αποθηκεύσουμε $N = 2^{300}$ αριθμούς a_i.
- Δηλαδή 200 εκατομμύρια φορές περισσότερα από όσα άτομα υπάρχουν στο σύμπαν ($\approx 10^{82}$)!
- Θυμηθείτε όμως: πρέπει να διαχειριστούμε όλη αυτή την πληροφορία προσεχτικά! Αν κάνουμε μέτρηση πέφτουμε στην κλασική περίπτωση.

Καταχωρητές με παραπάνω qubit

- Όπως και πριν, οι καταστάσεις μπορούν να αναπαρασταθούν με διανύσματα 2^n διαστάσεων.
- Οι καταστάσεις $|i\rangle$ αντιστοιχούν σε διανύσματα που έχουν συντεταγμένες παντού μηδέν εκτός από την $i^{\text{οστή}}$ γραμμή:

$$|i\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Καταχωρητές με παραπάνω qubit

- Το εσωτερικό γινόμενο απλά είναι ένα άθροισμα με 2^n γινόμενα.
- Εάν:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} a_i \, |i\rangle$$

$$|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{N} b_i \, |i\rangle$$

Τότε:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} b_i^* a_i \tag{5}$$

Τανυστικό Γινόμενο

- Το τανυσματικό γινόμενο $\otimes$ χρησιμοποιείται για να περιγράψουμε πως συνθέτουμε μία κατάσταση πολλαπλών qubits από επιμέρους καταστάσεις λιγότερων qubits.
- Εάν $|\psi\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle$ και $|\phi\rangle = b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle$ τότε

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = a_0 b_0 |00\rangle + a_0 b_1 |01\rangle + a_1 b_0 |10\rangle + a_1 b_1 |11\rangle$$

- Πολλαπλασιάζουμε τους συντελεστές του $|\psi\rangle$ και του $|\phi\rangle$ μεταξύ τους και κάθε γινόμενο μπαίνει μπροστά από μία κατάσταση που προκύπτει από τον συνδυασμός των επιμέρους καταστάσεων των $|\psi\rangle$ και $|\phi\rangle$
- Η κατάσταση $|\mu\nu\rangle$ έχει συντελεστή $a_\mu b_\nu$.

Παράδειγμα

- Πρώτο qubit, $|\psi\rangle = |1\rangle$.
- Δεύτερο qubit, $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$.
- Τότε:

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

- Επίσης είναι εύκολο να δούμε ότι:

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle \ , \ |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle$$

$$|0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle \ , \ |1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle$$

Ταυστικό Γινόμενο

- Στη γενικότερη περίπτωση εάν

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{M-1} a_i |\mu_i\rangle$$

$$|\phi\rangle = \sum_{q=0}^{N-1} b_q |\nu_q\rangle$$

Τότε:

$$|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle = \sum_{q=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{M-1} b_q a_i |\nu_q\rangle \otimes |\mu_i\rangle \tag{6}$$

Παραδείγματα

$$|00\rangle \otimes |1\rangle = |001\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |00\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|110\rangle + |000\rangle)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |0\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |0\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$$

Τι υπολογισμούς μπορούμε να κάνουμε με τα qubit;

- Ας σκεφτούμε τι μετασχηματισμούς μπορούμε να κάνουμε σε ένα qubit.
- Ένας μετασχηματισμός U θα πρέπει να μας πηγαίνει από μία κατάσταση $|\psi\rangle$ σε μία κατάσταση $|\phi\rangle$, $|\psi\rangle \xrightarrow{U} |\phi\rangle$ που να είναι πάλι qubit.
- Συχνά γράφουμε $|\psi\rangle \xrightarrow{U} |\phi\rangle$ ή πιο απλά $|\phi\rangle = U|\psi\rangle$.
- Έστω $|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle$ και $|\phi\rangle = b_0|0\rangle + b_1|1\rangle$
- Θα πρέπει εάν $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$, ο μετασχηματισμός να μας εξασφαλίζει ότι $|b_0|^2 + |b_1|^2 = 1$.

Τι υπολογισμούς μπορούμε να κάνουμε με τα qubit;

- Θέλουμε επίσης ο U να είναι γραμμικός.
- Δηλαδή εάν:

$$|\psi\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle$$

- Τότε:

$$|\phi\rangle = U|\psi\rangle = U\{a_0 U|0\rangle + a_1 U|1\rangle\} = a_0 U|0\rangle + a_1 U|1\rangle$$

- Δηλαδή οι συντελεστές βγαίνουν έξω από το άθροισμα!

Παράδειγμα: κβαντικό NOT

- Το κβαντικό NOT συχνά συμβολίζεται με X.
- Αν $|\psi\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle$, τότε $\phi = X|\psi\rangle = a_1 |0\rangle + a_0 |1\rangle$
- Δηλαδή το X αντιστρέφει τους συντελεστές των $|0\rangle$ και $|1\rangle$.
- Είναι εύκολο να δούμε ότι εάν $|\phi\rangle = b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle$, τότε $b_0 = a_1$ και $b_1 = a_0$.
- Επομένως $|b_0|^2 + |b_1|^2 = |a_1|^2 + |a_0|^2 = 1$ όπως είχαμε δει στην προηγούμενη διαφάνεια.
- Επίσης: $X|0\rangle = |1\rangle$ και $X|1\rangle = |0\rangle$ οπότε και $X|\psi\rangle = a_0 X|0\rangle + a_1 X|1\rangle$
- Οπότε το X πληρεί τις συνθήκες που είδαμε πριν.

Τελεστές και Πίνακες

- Στην γλώσσα της κβαντικής υπολογιστικής, οι μετασχηματισμοί πάνω σε qubits ονομάζονται *τελεστές*.
- Θα δείξουμε ότι κάθε τελεστής που δρα πάνω σε ένα qubit μπορεί να περιγραφεί από έναν 2×2 πίνακα που έχει ιδιαίτερη μορφή.
- Έστω $|\psi\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle$ και $U|\psi\rangle = b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle$.
- Οπότε:

$$b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle = a_0 U |0\rangle + a_1 U |1\rangle$$

Τελεστές και Πίνακες

$$b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle = a_0 U |0\rangle + a_1 U |1\rangle$$

- Δεδομένου ότι $\langle 0 \rangle 0 = \langle 1 \rangle 1 = 1$ και $\langle 0 \rangle 1 = \langle 1 \rangle 0 = 0$,

$$b_0 = \langle 0|U|0\rangle a_0 + \langle 0|U|1\rangle a_1$$

$$b_1 = \langle 1|U|0\rangle a_0 + \langle 1|U|1\rangle a_1$$

- Αν ορίσουμε $u_{\mu\nu} = \langle \mu|U|\nu\rangle$, θα έχουμε:

$$b_0 = u_{00} a_0 + u_{01} a_1$$

$$b_1 = u_{10} a_0 + u_{11} a_1$$

Τελεστές και Πίνακες

- Μπορούμε να γράψουμε σε μορφή πίνακα:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} \\ u_{10} & u_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

- Επομένως: Κάθε τελεστής που δρα πάνω σε ένα qubit μπορεί να αντιστοιχηθεί σε έναν 2×2 πίνακα $U = [u_{\mu\nu}]$ με στοιχεία $u_{\mu\nu} = \langle \mu | U | \nu \rangle$.
- Για παράδειγμα ο τελεστής NOT X αντιστοιχεί στον πίνακα X ο οποίος έχει στοιχεία $x_{\mu\nu} = \langle \mu | X | \nu \rangle$
- Παρατηρούμε ότι $x_{00} = x_{11} = 0$ και $x_{01} = x_{10} = 1$ οπότε:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα: NOT NOT

- Τι θα συμβεί αν περάσουμε το qubit $|\psi\rangle$ από δύο κβαντικά NOT;

$$|\psi\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle \xrightarrow{X} a_0 |1\rangle + a_1 |0\rangle \xrightarrow{X} a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle = |\psi\rangle$$

- Άρα εφαρμόζοντας δύο φορές τον τελεστή X παίρνουμε την ίδια κατάσταση.
- Ο τελεστής X^2 συμβολίζει την εφαρμογή του τελεστή X δύο φορές, οπότε $|\psi\rangle \xrightarrow{X^2} |\psi\rangle$.
- Παρατηρούμε ότι ο πίνακας X^2 ισούται με τον 2×2 ταυτοτικό πίνακα I_2:

$$X^2 = XX = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Συζυγής ανάστροφος

- Μπορούμε να ορίσουμε τον συζυγή ανάστροφο U^{T} ενός πίνακα U κάνοντας της γραμμές στήλες και παίρνοντας το μιγαδικό συζυγές.

$$U = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} \\ u_{10} & u_{11} \end{bmatrix} \Rightarrow U^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} u_{00}^* & u_{10}^* \\ u_{01}^* & u_{11}^* \end{bmatrix}$$

- Είναι ενδιαφέρον να δούμε ότι εάν $|\phi\rangle = U|\psi\rangle$, τότε θα έχουμε:

$$b_0^* = u_{00}^* a_0^* + u_{01}^* a_1 \,, b_1^* = u_{10}^* a_0^* + u_{11}^* a_1$$

- Σε μορφή πίνακα:

$$\langle\phi| = \left[b_0^*, b_1^*\right] = \left[a_0^*, a_1^*\right] \begin{bmatrix} u_{00}^* & u_{10}^* \\ u_{01}^* & u_{11}^* \end{bmatrix} = \langle\psi| U^{\mathrm{T}}$$

- Επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον συζηγή ανάστροφο του U για να υπολογίσουμε το $\langle\phi|$.

Μορφή του πίνακα U

- Το γεγονός ότι $|b_0|^2 + |b_1|^2 = |a_0|^2 + |a_1|^2$ γράφεται και ως $\langle\phi|\phi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$, οπότε:

$$\langle\phi|\phi\rangle = \langle\psi|U^{\mathrm{T}}U|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$$

- Επομένως για κάθε $|\psi\rangle$ θα πρέπει να έχουμε:

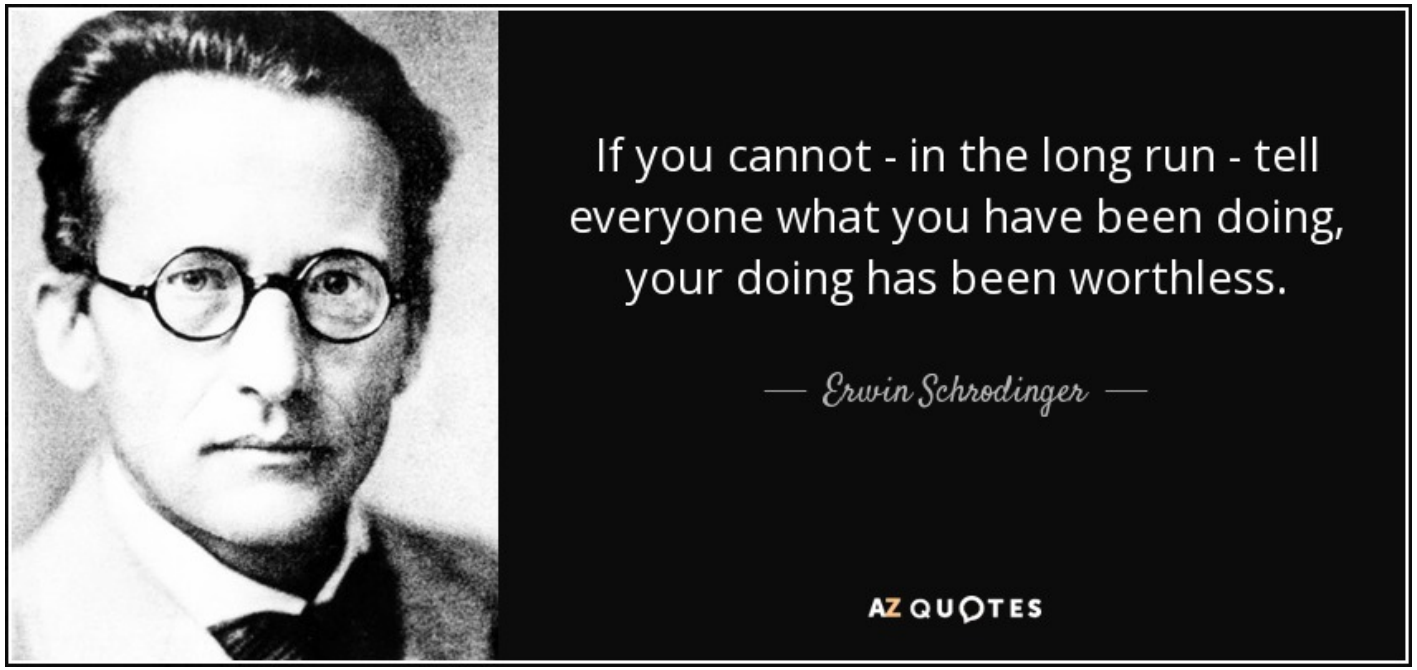
$$\langle\psi|U^{\mathrm{T}}U|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$$

- Ένας τρόπος να ικανοποιήσουμε την παραπάνω σχέση για κάθε $|\psi\rangle$ είναι να ισχύει:

$$U^{\mathrm{T}}U = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Η παραπάνω σχέση σημαίνει πως ο πίνακας U έχει ως αντίστροφο τον μιγαδικό συζυγή του. Τέτοιοι πίνακες ονομάζονται *μοναδιαίοι*.

Μοναδιαίοι Πίνακες

- Θυμάστε την γάτα του Schrondinger;
- Υπάρχει και η εξίσωση του Schrondinger που καθορίζει πως εξελίσσεται η κατάσταση $|\psi\rangle$ οποιοδήποτε συστήματος.
- Επομένως ότι μπορούμε να κάνουμε σε ένα qubit περιγράφεται από αυτήν!
- Λύνοντας την εξίσωση του Schrondinger προκύπτει ότι τελικά, μπορούμε να εφαρμόσουμε μόνο μοναδιαίους πίνακες στα qubit.
- Η ίδια η φύση δηλαδή *επιβάλλει να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο μοναδιαίους τελεστές* στα qubit μας όταν τα επεξεργαζόμαστε.

Ένα ενδιαφέρον γνωμικό