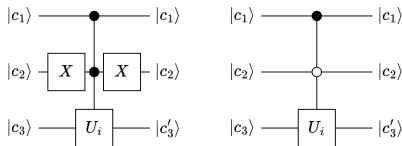


Υλοποίηση κυκλωμάτων για τους πίνακες U_i

- Ας εξετάσουμε το παρακάτω κύκλωμα:



- Στο δεξιό κύκλωμα έχουμε απλοποιήσει λίγο τον συμβολισμό ώστε να περιγράψουμε την ακολουθία της πύλης NOT - στοιχείο ελέγχου που ενεργοποιείται όταν έχουμε $|1\rangle$ και στη συνέχεια της δεύτερης πύλης NOT με ένα άσπρο κύκλο.
- Στην ουσία ο άσπρος κύκλος είναι ένα στοιχείο ελέγχου που ενεργοποιείται όταν το qubit είναι $|0\rangle$.
- Άρα ο τελεστής U_i εφαρμόζεται στο τρίτο qubit μόνο στις ιδιοκαταστάσεις που έχουν $|c_1 c_2\rangle = |10\rangle$.

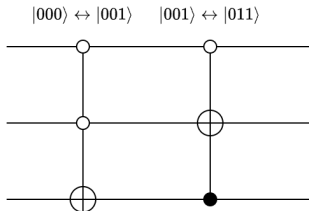
Υλοποίηση κυκλωμάτων για τους πίνακες U_i

- Η ελεγχόμενη πύλη U_i στην ουσία περιγράφεται από τον πίνακα:

$$U_i = \frac{1}{\sqrt{|x|^2 + |y|^2}} \begin{bmatrix} x^* & y^* \\ -y & x \end{bmatrix}$$

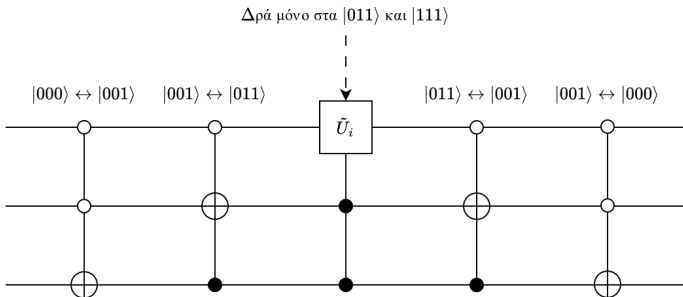
- όπου στα προηγούμενα είχαμε συζητήσει πως υπολογίζονται τα x, y .
- Τι γίνεται όμως όταν τα $|s\rangle$ και $|t\rangle$ δεν διαφέρουν κατά μόνο qubit;
- Υπάρχει μία έξυπνη τεχνική που βασίζεται στην μέτρηση σύμφωνα με τον κώδικα του Gray.
- Θυμηθείτε ότι ο κώδικας του Gray κάνει αρίθμηση των δυαδικών ακολουθιών έτσι ώστε κάθε φορά να αλλάζει ένα bit.
- Για παράδειγμα ο κώδικας Gray των τριών bit είναι: 000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100.

- Ας δούμε το κύκλωμα:



- Στο πρώτο στάδιο βλέπουμε ότι το κύκλωμα υλοποιεί το $|000\rangle \leftrightarrow |001\rangle$
- Στο δεύτερο στάδιο το $|001\rangle \leftrightarrow |011\rangle$
- Αν τρέξουμε το κύκλωμα ανάποδα θα αντιστραφούν οι μετασχηματισμοί.
- Κάθε φορά το qubit που αλλάζει γίνεται XOR.
- Όταν ένα qubit παραμένει $|0\rangle$ περνάει από άσπρο κύκλο ενώ όταν παραμένει $|1\rangle$ περνάει από μαύρο κύκλο.

- Το κύκλωμα που υλοποιεί το U_i είναι το εξής:

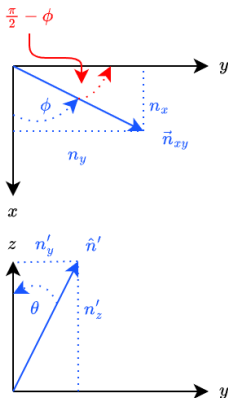


- Ο πίνακας $f(A)$ θα δείξουμε ότι αντιστοιχεί σε μία περιστροφή γύρω από το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$.
- Γράφουμε:

$$\mathcal{R}_{\hat{n}}(\omega) = \exp(-j\frac{\omega}{2}A) = \exp(-j\frac{\omega}{2}(n_x X + n_y Y + n_z Z))$$

- Καταρχήν θα πρέπει να βρούμε τον πίνακα $R_{\hat{n}}$ που περιγράφει μία στροφή γύρω από το $\hat{n}$ στην σφαίρα Bloch και στη συνέχεια να δείξουμε πως αυτός ο πίνακας γράφεται για τα qubits.
- Λογικά θα πρέπει να καταλήξουμε στον πίνακα $\mathcal{R}_{\hat{n}}$.

Ο πίνακας $R_{\hat{n}}$



- Ένας τρόπος να το κάνουμε αυτό είναι να κάνουμε μία στροφή γύρω από τον άξονα των z για να φέρουμε το $\hat{n}$ στο επίπεδο xz .
- Δίπλα δείχνουμε την προβολή $\vec{n}_{xy}$ του $\hat{n}$ στο επίπεδο xy .
- Εάν κάνουμε δεξιά στροφή γύρω από το z κατά γωνία $\frac{\pi}{2} - \phi$ τότε το $\vec{n}_{xy}$ θα πέσει πάνω στον άξονα των y οπότε στις τρεις διαστάσεις το διάνυσμα που προκύπτει $\hat{n}'$ θα έχει συνιστώσα y ίση με μηδέν.
- Αν στη συνέχεια κάνουμε μία δεξιά στροφή γύρω από τον x κατά θ τότε το $\hat{n}$ θα έχει ταυτιστεί με τον άξονα των z .

Ο πίνακας $R_{\hat{n}}$

- Στη συνέχεια θα κάνουμε την στροφή γύρω από τον άξονα των z χρησιμοποιώντας τον πίνακα $R_z(\omega)$.
- Τέλος πρέπει να αντιστρέψουμε τις δύο αρχικές στροφές οπότε εφαρμόζουμε το $R_x(-\theta)$ και $R_z(\phi - \frac{\pi}{2})$
- Ο πίνακας που περιγράφει την περιστροφή θα είναι:

$$R_{\hat{n}}(\omega) = R_z(\phi - \frac{\pi}{2})R_x(\theta)R_z(\omega)R_x(-\theta)R_z(\frac{\pi}{2} - \phi)$$

- Οι αντίστοιχοι πίνακες σε επίπεδο qubit θα είναι:

$$\mathcal{R}_{\hat{n}}(\omega) = \mathcal{R}_z(\phi - \frac{\pi}{2})\mathcal{R}_x(\theta)\mathcal{R}_z(\omega)\mathcal{R}_x(-\theta)\mathcal{R}_z(\frac{\pi}{2} - \phi)$$

Γενικευμένες περιστροφές

- Τον πίνακα A πολύ συχνά τον συμβολίζουμε ως εξής:

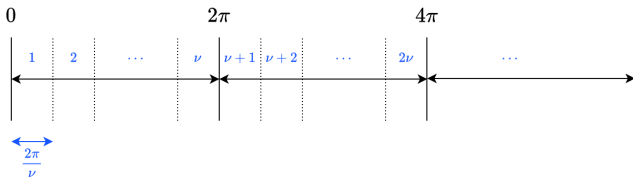
$$A = n_x X + n_y Y + n_z Z = \vec{\sigma} \cdot \hat{n}$$

- όπου με $\vec{\sigma}$ έχουμε συμβολίσει ένα διάνυσμα που έχει ως συντεταγμένες τους πίνακες X, Y, Z ,

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο Αθηνών

- Ας δούμε για παράδειγμα τι συμβαίνει όταν η ϕ είναι ρητό πολλαπλάσιο του 2π .



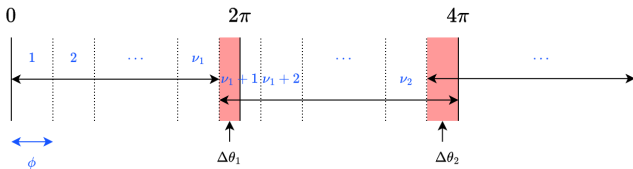
- Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν μ και ν ακέραιο τέτοια ώστε

$$\phi = \frac{2\pi\mu}{\nu}$$

- Πόσο κοντά μπορούμε να φτάσουμε σε μία συγκεκριμένη γωνία, π.χ. $\theta = \pi/\nu$, υπολογίζοντας τα θ_k ;

Μία γωνία για όλες τις άλλες

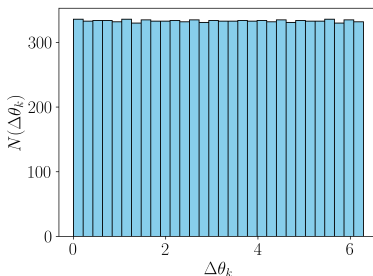
- Ας σκεφτούμε τώρα τι γίνεται όταν το ϕ είναι άρρητο πολλαπλάσιο του 2π . Τότε δεν μπορούμε να βρούμε ακέραιους μ και ν ώστε $\phi = 2\pi\mu/\nu$.



- Ας σκεφτούμε τώρα τι συμβαίνει όσο υπολογίζουμε το $k\phi$ για όλο και μεγαλύτερα ακέραια k .
- Μπορούμε να καλύψουμε το πρώτο διάστημα $[0, 2\pi)$ αλλά πάντα θα παραμένει ένα διάστημα με μήκος $\Delta\theta_1$ μέχρι το 2π .
- Εάν ν_1 είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο $\nu_1\phi < 2\pi$, τότε $\Delta\theta_1 = 2\pi - \nu_1\phi$.

Μία γωνία για όλες τις άλλες

- Προκύπτει ότι το $\Delta\theta_k$ ακολουθεί μία ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 2\pi)$
- Επομένως πάντα θα μπορούμε να βρούμε έναν ακέραιο k έτσι ώστε να πλησιάσουμε κοντά σε μία γωνία στο $[0, 2\pi)$ που θέλουμε να περιγράψουμε.



$$\text{H } \pi\lambda\eta \ H^{1/2}$$

Η πύλη $H^{1/2}$

- Επομένως αν εξαιρέσουμε έναν παράγοντα φάσης, η πύλη $Z^{1/4}$ ταυτίζεται με την T , δηλαδή $Z^{1/4} \approx T$.
- Είναι εύκολο να δούμε ότι:

$$Z^{1/2} = Z^{1/4} Z^{1/4} \approx T^2$$

$$Z^{7/4} Z^{1/4} = Z^2 = I \rightarrow Z^{-1/4} = Z^{7/4} \approx T^7$$

$$Z^{3/2} Z^{1/2} = Z^2 = I \rightarrow Z^{-1/2} = Z^{3/2} = Z^{6/4} \approx T^6$$

- Η πύλη $H^{1/2}$ υλοποιείται ως εξής:

$$H^{1/2} \approx T^2 H T H T^2 H T^7 H T^6$$

