

## 2 Οι βασικές αρχές της κβαντικής υπολογιστικής

### 2.1 Σχετικά με τις βασικές αρχές

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε μερικά βασικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα της κβαντικής υπολογιστικής και τα εφαρμόσαμε κυρίως στην περίπτωση ενός qubit που αποθηκεύεται στο spin ενός ηλεκτρονίου. Κάποια πράγματα φάνηκε να έρχονται “ουρανοκατέβητα”, όπως για παράδειγμα το ότι περιγράφουμε το σύστημα με μία κυματοσυνάρτηση  $|\psi\rangle$ .

Αν σας έχει δημιουργηθεί αυτή η εντύπωση, μην ανησυχείτε είναι σωστή! Όπως και κάθε θεωρία έτσι και η κβαντική θεωρία έχει τα αξιώματά της. Και η κλασική (μη κβαντική) φυσική έχει τα δικά της αξιώματα. Στο σχολείο μάθαμε τους τρεις νόμους του Νεύτωνα:

- **1ος νόμος (Νόμος της αδράνειας):** Ένα σώμα παραμένει σε κατάσταση ηρεμίας ή κινείται με σταθερή ταχύτητα σε ευθεία γραμμή, εφόσον δεν ασκείται πάνω του συνισταμένη δύναμη.
- **2ος νόμος (Νόμος της δυναμικής):** Η μεταβολή της κίνησης ενός σώματος καθορίζεται από τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του. Όσο μεγαλύτερη είναι η δύναμη, τόσο μεγαλύτερη είναι η μεταβολή της κίνησης, ενώ όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα του σώματος, τόσο δυσκολότερα μεταβάλλεται η κίνησή του.
- **3ος νόμος (Νόμος δράσης και αντίδρασης):** Όταν ένα σώμα ασκεί δύναμη σε ένα δεύτερο σώμα, το δεύτερο ασκεί ταυτόχρονα στο πρώτο δύναμη ίσου μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης.

Αν θυμάστε από εκείνα τα χρόνια κανέναν επί της ουσίας δεν μας εξήγησε γιατί ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα - απλά μαθαίναμε να τους εφαρμόζουμε για να προβλέψουμε την κίνηση των σωμάτων. Ο Νεύτωνας χρησιμοποιώντας την διαίσθηση του, υπέθεσε αυθαίρετα ότι οι παραπάνω νόμοι πρέπει να ισχύουν και τους χρησιμοποίησε για να ερμηνεύσει την κίνηση των πλανητών και μία σειρά από άλλα φαινόμενα. Πρόκειται δηλαδή για αξιώματα - για αλήθειες που δεχόμαστε ευλαβικά και τις χρησιμοποιούμε για να εξηγήσουμε μία σειρά από άλλα φαινόμενα.

Με τον ίδιο τρόπο η κβαντική θεωρία έρχεται με μία σειρά από αξιώματα πολλά από τα οποία ήδη χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Είναι καιρός όμως να τα βάλουμε σε μία σειρά.

### 2.2 Χώρος Hilbert

Το πρώτο αξίωμα της κβαντικής θεωρίας είναι ότι για κάθε απομονωμένο φυσικό σύστημα υπάρχει ένας χώρος κυματοσυναρτήσεων που διαθέτει εσωτερικό γινόμενο και η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από μία κυματοσυνάρτηση  $|\psi\rangle$  που ανήκει στο χώρο αυτό.

Τι ακριβώς είναι ο χώρος στον οποίο αναφερόμαστε; Στα μαθηματικά υπάρχει η έννοια του *διανυσματικού χώρου*. Ένας διανυσματικός χώρος είναι ένα σύνολο διανυσμάτων, τα οποία συμβολίζουμε ως  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ , και ένα σύνολο αριθμών, που ονομάζονται *βαθμωτοί*. Στην κβαντική μηχανική οι βαθμωτοί είναι συνήθως μιγαδικοί αριθμοί.

Τα διανύσματα και οι βαθμωτοί συνδέονται μέσω δύο πράξεων: της πρόσθεσης διανυσμάτων και του πολλαπλασιασμού ενός διανύσματος με έναν βαθμωτό. Οι πράξεις αυτές ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

- **Κλειστότητα ως προς την πρόσθεση:** Αν  $\mathbf{u}$  και  $\mathbf{v}$  ανήκουν στον διανυσματικό χώρο, τότε και το άθροισμά τους  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  ανήκει στον ίδιο χώρο.
- **Αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης:** Η σειρά με την οποία προσθέτουμε δύο διανύσματα δεν έχει σημασία:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}.$$

- **Προσεταιριστικότητα της πρόσθεσης:** Για τρία διανύσματα  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{w}$  ισχύει

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

- **Ύπαρξη μηδενικού διανύσματος:** Υπάρχει ένα διάνυσμα  $\mathbf{0}$  τέτοιο ώστε

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$$

για κάθε  $\mathbf{u}$  του χώρου.

- **Ύπαρξη αντίθετου διανύσματος:** Για κάθε διάνυσμα  $\mathbf{u}$  υπάρχει ένα διάνυσμα  $-\mathbf{u}$  τέτοιο ώστε

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

- **Κλειστότητα ως προς τον πολλαπλασιασμό με βαθμωτό:** Αν  $\mathbf{u}$  ανήκει στον διανυσματικό χώρο και  $a$  είναι ένας βαθμωτός, τότε και το  $a\mathbf{u}$  ανήκει στον ίδιο χώρο.

- **Επιμεριστικότητα ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων:** Για κάθε βαθμωτό  $a$  ισχύει

$$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}.$$

- **Επιμεριστικότητα ως προς την πρόσθεση βαθμωτών:** Για δύο βαθμωτά  $a$  και  $b$  ισχύει

$$(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}.$$

- **Προσεταιριστικότητα του πολλαπλασιασμού με βαθμωτά:** Για δύο βαθμωτά  $a$  και  $b$  ισχύει

$$(ab)\mathbf{u} = a(b\mathbf{u}).$$

- **Ύπαρξη μοναδιαίου βαθμωτού:** Υπάρχει ο βαθμωτός  $1$  τέτοιος ώστε

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u}.$$

### Παράδειγμα 2.1: Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^2$

Ας εξετάσουμε τον χώρο των διανυσμάτων δύο διαστάσεων που γνωρίζουμε από το σχολείο. Ένα διάνυσμα του επιπέδου μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

όπου  $u_1$  και  $u_2$  είναι πραγματικοί αριθμοί. Ο χώρος όλων αυτών των διανυσμάτων συμβολίζεται με  $\mathbb{R}^2$ .

Ας δούμε αν ο χώρος αυτός ικανοποιεί τις ιδιότητες ενός διανυσματικού χώρου.

- **Κλειστότητα ως προς την πρόσθεση:** Αν

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

τότε

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}.$$

Επειδή  $u_1 + v_1$  και  $u_2 + v_2$  είναι πραγματικοί αριθμοί, το  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  ανήκει επίσης στο  $\mathbb{R}^2$ .

- **Αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης:** Η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική, αφού

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}.$$

Αυτό προκύπτει από την αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης των πραγματικών αριθμών.

- **Ύπαρξη μηδενικού διανύσματος:** Το διάνυσμα

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ανήκει στο  $\mathbb{R}^2$  και ικανοποιεί

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}.$$

- **Ύπαρξη αντίθετου διανύσματος:** Για κάθε  $\mathbf{u}$  υπάρχει το αντίθετο διάνυσμα

$$-\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{bmatrix},$$

για το οποίο ισχύει

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

- **Κλειστότητα ως προς τον πολλαπλασιασμό με βαθμωτό:** Αν  $a$  είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε

$$a\mathbf{u} = \begin{bmatrix} au_1 \\ au_2 \end{bmatrix}$$

είναι επίσης διάνυσμα του  $\mathbb{R}^2$ .

- **Επιμεριστικότητα και προσεταιριστικότητα:** Οι υπόλοιπες ιδιότητες του διανυσματικού χώρου ακολουθούν από τις αντίστοιχες ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

Επομένως, ο χώρος  $\mathbb{R}^2$  των διανυσμάτων δύο διαστάσεων είναι ένας διανυσματικός χώρος.

Ένας διανυσματικός χώρος από μόνος του δεν διαθέτει απαραίτητα κάποιον τρόπο για να ορίσουμε το μήκος ενός διανύσματος ή τη γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων. Για τον σκοπό αυτό εισάγουμε την έννοια του εσωτερικού γινομένου.

Το εσωτερικό γινόμενο είναι μια πράξη που αντιστοιχίζει σε κάθε ζεύγος διανυσμάτων  $\mathbf{u}$  και  $\mathbf{v}$  έναν αριθμό, τον οποίο συμβολίζουμε ως

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Στην περίπτωση ενός πραγματικού διανυσματικού χώρου, το εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- **Γραμμικότητα:**

$$\langle a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle.$$

- **Συμμετρία:**

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle.$$

- **Θετικότητα:**

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0,$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

Το εσωτερικό γινόμενο μας επιτρέπει να ορίσουμε το μήκος ενός διανύσματος, ή *νόρμα*, ως

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}.$$

Στην περίπτωση των κβαντικών καταστάσεων, που τις γράφουμε σε συμβολισμό bra-ket αντί για  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ , η νόρμα ενός  $|\psi\rangle$  ορίζεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, αντικαθιστώντας το εσωτερικό γινόμενο  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$  με το bracket  $\langle \psi | \psi \rangle$ ,

$$\| |\psi\rangle \| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}.$$

Ένας διανυσματικός χώρος που διαθέτει εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται *χώρος με εσωτερικό γινόμενο*.

Τέλος, για να ονομάζεται ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο χώρος Hilbert, απαιτείται να είναι και *πλήρης*. Η πληρότητα σχετίζεται με την έννοια της σύγκλισης. Διαισθητικά, σημαίνει ότι αν μια

ακολουθία διανυσμάτων του χώρου πλησιάζει όλο και περισσότερο σε κάποιο συγκεκριμένο διάνυσμα, τότε το διάνυσμα στο οποίο συγκλίνει ανήκει επίσης στον ίδιο χώρο. Αν  $\{\mathbf{v}_n\}$  είναι μια τέτοια ακολουθία και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\| = 0.$$

τότε η πληρότητα απαιτεί το  $\mathbf{v}$  να ανήκει στον ίδιο διανυσματικό χώρο με τα  $\mathbf{v}_n$ .

Με άλλα λόγια, ο χώρος δεν περιέχει “κενά” ως προς τη σύγκλιση των διανυσμάτων του. Η ιδιότητα αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική όταν εργαζόμαστε με χώρους άπειρων διαστάσεων, όπου μπορούν να εμφανιστούν όρια ακολουθιών διανυσμάτων τα οποία δεν ανήκουν στον χώρο, αν αυτός δεν είναι πλήρης. Έτσι, αυστηρά, ένας χώρος Hilbert είναι ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, ο οποίος είναι πλήρης ως προς τη νόρμα που ορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο.

### Παράδειγμα 2.2: Ο χώρος Hilbert ενός qubit

Ας εξετάσουμε ένα σύστημα που αποτελείται από ένα qubit. Η κβαντική κατάσταση ενός qubit μπορεί να περιγραφεί από δύο μιγαδικούς αριθμούς  $a$  και  $b$ , οι οποίοι αντιστοιχούν στα πλάτη πιθανότητας να βρεθεί το qubit στις δύο βασικές καταστάσεις  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$ .

Στη συγκεκριμένη βάση, μια κατάσταση του qubit γράφεται ως

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle,$$

όπου  $a, b \in \mathbb{C}$ . Επομένως, μπορούμε να αναπαραστήσουμε την κατάσταση ως διάνυσμα δύο μιγαδικών διαστάσεων:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Το σύνολο όλων των διανυσμάτων αυτής της μορφής αποτελεί τον διανυσματικό χώρο  $\mathbb{C}^2$ . Όπως και στην περίπτωση του  $\mathbb{R}^2$ , μπορούμε να προσθέσουμε δύο διανύσματα και να πολλαπλασιάσουμε ένα διάνυσμα με έναν βαθμωτό, και το αποτέλεσμα παραμένει στον ίδιο χώρο. Για παράδειγμα,

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix},$$

ενώ για κάθε  $c \in \mathbb{C}$ ,

$$c \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca \\ cb \end{bmatrix}.$$

Για να μετατρέψουμε τον διανυσματικό χώρο  $\mathbb{C}^2$  σε χώρο Hilbert, πρέπει να ορίσουμε ένα εσωτερικό γινόμενο. Για δύο διανύσματα

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο ως

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1^* v_1 + u_2^* v_2,$$

όπου το  $*$  συμβολίζει το μιγαδικό συζυγές.

Το εσωτερικό αυτό γινόμενο ικανοποιεί τις απαιτούμενες ιδιότητες. Συγκεκριμένα, είναι γραμμικό ως προς το δεύτερο διάνυσμα, ικανοποιεί τη σχέση συζυγούς συμμετρίας

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle^*$$

και

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = |u_1|^2 + |u_2|^2 \geq 0,$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

Τέλος, πρέπει να ελέγξουμε και την πληρότητα του χώρου. Η νόρμα που προκύπτει από το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο είναι

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2}.$$

Έστω τώρα μια ακολουθία διανυσμάτων του  $\mathbb{C}^2$ ,

$$\mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} u_{1,n} \\ u_{2,n} \end{bmatrix},$$

η οποία συγκλίνει σε κάποιο διάνυσμα  $\mathbf{u}$  ως προς τη νόρμα. Αυτό σημαίνει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\| = 0.$$

Επειδή

$$\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\| = \sqrt{|u_{1,n} - u_1|^2 + |u_{2,n} - u_2|^2},$$

η παραπάνω σχέση συνεπάγεται ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{1,n} = u_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2,n} = u_2.$$

Οι δύο συνιστώσες του ορίου είναι, όμως, μιγαδικοί αριθμοί και επομένως το διάνυσμα

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

ανήκει επίσης στο  $\mathbb{C}^2$ . Συνεπώς, κάθε ακολουθία διανυσμάτων του  $\mathbb{C}^2$  που συγκλίνει ως προς τη νόρμα έχει το όριό της μέσα στον ίδιο χώρο. Ο χώρος  $\mathbb{C}^2$  είναι επομένως πλήρης.

Συνεπώς, ο  $\mathbb{C}^2$ , εφοδιασμένος με το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο, είναι χώρος Hilbert. Οι καταστάσεις του qubit είναι διανύσματα αυτού του χώρου.

Για κάθε σύστημα επομένως μπορούμε να έχουμε μία περιγραφή του αν επιλέξουμε μία διάνυσμα  $|\psi\rangle$  μέσα σε έναν κατάλληλο χώρο Hilbert ικανό να περιγράψει όλες τις διαφορετικές καταστάσεις ενός συστήματος. Υπάρχει βέβαια ένα ερώτημα: τι ακριβώς είναι το  $|\psi\rangle$ ;

Ένας μαθηματικός θα μας έλεγε απλά ότι το  $|\psi\rangle$  είναι ένα στοιχείο του χώρου Hilbert. Τελεία και παύλα. Στην περίπτωση του ενός qubit μπορούμε να παραστήσουμε το  $|\psi\rangle$  με ένα διάνυσμα στήλη με δύο μιγαδικούς αριθμούς  $a$  και  $b$ ,

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a|0\rangle + b|1\rangle$$

Όπως είδαμε, τα  $|a|^2$  και  $|b|^2$  είναι οι πιθανότητες να βρεθούμε στην κατάσταση  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$  αντίστοιχα, οπότε οι αριθμοί  $a$  και  $b$  πρέπει να είναι τέτοιοι ώστε:

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

Στην περίπτωση αυτή ο διανυσματικός χώρος έχει διάσταση δύο επειδή χρειαζόμαστε δύο μιγαδικούς αριθμούς για την περιγραφή της κατάστασης. Για ένα σύστημα με δύο qubit έχουμε 4 διαφορετικούς συνδυασμούς:

$$|0\rangle|0\rangle, \quad |0\rangle|1\rangle, \quad |1\rangle|0\rangle, \quad |1\rangle|1\rangle$$

Το  $|c_1\rangle|c_2\rangle$  περιγράφει την κατάσταση όπου το πρώτο qubit  $|c_1\rangle$  είναι πλήρως καθορισμένο στην κατάσταση  $c_1$  ενώ το δεύτερο qubit  $|c_2\rangle$  είναι και αυτό πλήρως καθορισμένο στην κατάσταση  $c_2$ . Έτσι εάν κωδικοποιούμε το κάθε qubit στην διεύθυνση του spin κατά τον  $z$  άξονα, τότε  $|0\rangle|1\rangle$  σημαίνει ότι το πρώτο qubit είναι στην κατάσταση  $|0\rangle$  (π.χ. spin αρνητικό ως προς τον  $z$ ) και το δεύτερο qubit είναι στην κατάσταση  $|1\rangle$  (π.χ. spin θετικό ως προς τον  $z$ ). Για οικονομία στον συμβολισμό γράφουμε το  $|c_1\rangle|c_2\rangle$  απλά ως  $|c_1c_2\rangle$  οπότε οι παραπάνω συνδυασμοί γράφονται:

$$|00\rangle, \quad |01\rangle, \quad |10\rangle, \quad |11\rangle$$

Αυτές είναι *καθαρές* καταστάσεις, με την έννοια ότι αν μετρήσουμε κάθε qubit μετρώντας το spin στον άξονα των  $z$  ξέρουμε με πιθανότητα 100% το αποτέλεσμα. Για παράδειγμα για την κατάσταση  $|01\rangle$  ξέρουμε με πιθανότητα 100% ότι η κατάσταση του πρώτου qubit θα είναι  $|0\rangle$  μετά την μέτρηση ενώ η κατάσταση του δεύτερου qubit θα είναι  $|1\rangle$  πάλι με πιθανότητα 100%.

Φυσικά θα μπορούσαμε να έχουμε και υπερθέσεις τον παραπάνω συνδυασμών που στην ουσία αποτελούν και τη βάση του χώρου. Δηλαδή να γράψουμε:

$$|\psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle$$

Στην περίπτωση αυτή, αν μετρήσουμε και τα δύο qubit θα πρέπει η πιθανότητα να βρεθούν και τα δύο στην κατάσταση  $|0\rangle$  να είναι  $|a|^2$ , η πιθανότητα να βρεθεί το πρώτο στην κατάσταση  $|0\rangle$  και το δεύτερο στην κατάσταση  $|1\rangle$  να είναι  $|b|^2$  και ούτω καθεξής. Θα πρέπει οι πιθανότητες πάλι να αθροίζονται στην μονάδα, δηλαδή:

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$$

### Παράδειγμα 2.3: Μέτρηση ενός συστήματος δύο qubit

Θεωρούμε ένα σύστημα δύο qubit, του οποίου η κατάσταση βρίσκεται σε υπέρθεση των τεσσάρων βασικών καταστάσεων  $|00\rangle$ ,  $|01\rangle$ ,  $|10\rangle$  και  $|11\rangle$ . Έστω ότι η κατάσταση του συστήματος είναι

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{i}{2}|01\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{i}{2\sqrt{2}}|11\rangle.$$

Η πιθανότητα να προκύψει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα κατά τη μέτρηση δίνεται από το μέτρο στο τετράγωνο του αντίστοιχου πλάτους. Έτσι, η πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση  $|00\rangle$  είναι

$$P(00) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}.$$

Για την κατάσταση  $|01\rangle$  έχουμε

$$P(01) = \left| \frac{i}{2} \right|^2 = \frac{1}{4},$$

ενώ για τις δύο υπόλοιπες καταστάσεις

$$P(10) = \left| \frac{1}{2\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{8},$$

και

$$P(11) = \left| \frac{i}{2\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{8}.$$

Επομένως, οι πιθανότητες των τεσσάρων δυνατών αποτελεσμάτων είναι

$$P(00) = \frac{1}{2}, \quad P(01) = \frac{1}{4}, \quad P(10) = \frac{1}{8}, \quad P(11) = \frac{1}{8}.$$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων είναι ίσο με τη μονάδα:

$$P(00) + P(01) + P(10) + P(11) = 1.$$

Αυτό αποτελεί συνέπεια της κανονικοποίησης της κβαντικής κατάστασης.

Υπάρχουν και περιπτώσεις όπου τα  $|\psi\rangle$  έχουν άπειρες διαστάσεις. Για παράδειγμα όταν μετράμε την θέση  $x$  ενός ηλεκτρονίου που μπορεί να κινηθεί μόνο σε αυτό τον άξονα, η θέση μπορεί να πάρει μία απειρία τιμών σε ένα συγκεκριμένο διάστημα  $[a, b]$  ή ακόμα και στο  $(-\infty, +\infty)$ . Στην περίπτωση αυτή, το διάνυσμα

κατάστασης  $|\psi\rangle$  ανήκει σε έναν άπειρης διάστασης χώρο Hilbert. Όταν χρησιμοποιούμε τη βάση θέσης, η κατάσταση  $|\psi\rangle$  αναπαρίσταται από μία κυματοσυνάρτηση  $\psi(x)$ . Η ποσότητα  $|\psi(x)|^2$  αποτελεί την *πυκνότητα πιθανότητας* να βρεθεί το ηλεκτρόνιο στη θέση  $x$ . Και επειδή το ηλεκτρόνιο σίγουρα θα βρεθεί κάπου στον άξονα των  $x$  με πιθανότητα 1, θα πρέπει:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

Παρά το γεγονός χρησιμοποιούμε τώρα συναρτήσεις, πάλι θα ανήκουν σε ένα χώρο Hilbert αλλά αυτή τη φορά με άπειρη διάσταση (αφού υπάρχουν άπειρες τιμές του  $x$ ). Στην περίπτωση όμως αυτή το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως:

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x) \psi(x) dx$$

Δηλαδή τα αθροίσματα αντικαθίστανται με ολοκληρώματα.

#### Παράδειγμα 2.4: Μέτρηση της θέσης ενός ηλεκτρονίου

Ας θεωρήσουμε, για απλότητα, ένα ηλεκτρόνιο που μπορεί να κινηθεί μόνο μέσα σε ένα διάστημα  $[0, L]$  και του οποίου η κυματοσυνάρτηση είναι ομοιόμορφη σε όλο το διάστημα:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{L}}, & 0 \leq x \leq L, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Η πυκνότητα πιθανότητας είναι επομένως

$$|\psi(x)|^2 = \begin{cases} \frac{1}{L}, & 0 \leq x \leq L, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Η κυματοσυνάρτηση είναι κανονικοποιημένη, αφού

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_0^L \frac{1}{L} dx = 1.$$

Ας υπολογίσουμε τώρα την πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρεθεί μεταξύ των θέσεων  $x_1$  και  $x_2$ , όπου  $0 \leq x_1 < x_2 \leq L$ . Η πιθανότητα αυτή είναι

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{L} dx = \frac{x_2 - x_1}{L}.$$

Για παράδειγμα, η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρεθεί στο πρώτο μισό του διαστήματος είναι

$$P\left(0 \leq x \leq \frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι, σε αντίθεση με την περίπτωση ενός qubit, όπου η μέτρηση μπορεί να δώσει ένα από ένα πεπερασμένο πλήθος διακριτών αποτελεσμάτων, εδώ η θέση μπορεί να πάρει συνεχείς τιμές. Για τον λόγο αυτό δεν αποδίδουμε πιθανότητα σε μία μεμονωμένη θέση, αλλά σε ένα διάστημα θέσεων.

### 2.3 Εξέλιξη ενός κβαντικού συστήματος

Όπως είδαμε και στα προηγούμενα, η εξέλιξη ενός συστήματος περιγράφεται από έναν μοναδιαίο τελετή  $\hat{U}$ . Δηλαδή εάν  $|\psi(t_0)\rangle$  είναι η κυματοσυνάρτηση την χρονική στιγμή  $t_0$  τότε για μία μελλοντική χρονική

στιγμή  $t_1$  η κυματοσυνάρτηση θα καθορίζεται από την σχέση:

$$|\psi(t_1)\rangle = \hat{U} |\psi(t_0)\rangle$$

Η κβαντική θεωρία δεν μας λέει ποιός είναι ο τελεστής  $\hat{U}$  απλά μας λέει ότι πρέπει να υπάρχει ο τελεστής αυτός. Είδαμε μερικά παραδείγματα τέτοιων τελεστών, για παράδειγμα εάν  $|\psi_0\rangle = |\psi(t_0)\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  και η τελική κατάσταση είναι η  $|\psi_1\rangle = |\psi(t_1)\rangle$ , τότε η κβαντική πύλη NOT περιγράφεται από τον τελεστή:

$$\hat{X} |\psi_1\rangle = b|0\rangle + a|1\rangle$$

Στα προηγούμενα είδαμε ότι ο μοναδιαίος τελεστής  $\hat{U}$  μπορεί να περιγραφεί με ένα μοναδιαίο πίνακα  $U$  ο οποίος περιγράφει την δράση του τελεστή  $\hat{U}$  στη βάση  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$ . Για παράδειγμα, στην περίπτωση της κβαντικής NOT:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

#### Παράδειγμα 2.5: Πίνακας μίας πύλης δύο qubit

Ας θεωρήσουμε μία κβαντική πύλη  $\hat{U}$  που δρα σε ένα σύστημα δύο qubit ως εξής: το πρώτο qubit παραμένει αμετάβλητο, ενώ στο δεύτερο qubit εφαρμόζεται η πύλη NOT. Δηλαδή αν η αρχική κατάσταση των δύο qubit είναι μία από τις τέσσερις βασικές καταστάσεις  $|c_1 c_2\rangle$ , με  $c_1, c_2 \in \{0, 1\}$ , τότε η πύλη αφήνει το  $c_1$  όπως είναι και αντιστρέφει το  $c_2$ :

$$\hat{U} |c_1 c_2\rangle = |c_1\rangle |\bar{c}_2\rangle$$

όπου  $\bar{c}_2$  συμβολίζει το αντίστροφο bit του  $c_2$  (δηλαδή  $\bar{0} = 1$  και  $\bar{1} = 0$ ).

Για να υπολογίσουμε τον πίνακα που αντιστοιχεί στην πύλη αυτή, είναι βολικό να αριθμήσουμε τα τέσσερα διανύσματα της ορθοκανονικής βάσης ως  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, |\psi_4\rangle$ :

$$|\psi_1\rangle = |00\rangle, \quad |\psi_2\rangle = |01\rangle, \quad |\psi_3\rangle = |10\rangle, \quad |\psi_4\rangle = |11\rangle$$

Εφαρμόζοντας την πύλη σε καθένα από αυτά παίρνουμε:

$$\hat{U} |\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle, \quad \hat{U} |\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle, \quad \hat{U} |\psi_3\rangle = |\psi_4\rangle, \quad \hat{U} |\psi_4\rangle = |\psi_3\rangle$$

Όπως είδαμε στην ενότητα 1.23, τα στοιχεία  $u_{pq}$  του πίνακα  $U$  ως προς μία ορθοκανονική βάση  $|\psi_i\rangle$  δίνονται από τη σχέση

$$u_{pq} = \langle \psi_p | \hat{U} | \psi_q \rangle.$$

Για παράδειγμα, το στοιχείο  $u_{21}$  προκύπτει χρησιμοποιώντας ότι  $\hat{U} |\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle$  και ότι η βάση είναι ορθοκανονική, δηλαδή  $\langle \psi_p | \psi_q \rangle = 1$  αν  $p = q$  και 0 διαφορετικά:

$$u_{21} = \langle \psi_2 | \hat{U} | \psi_1 \rangle = \langle \psi_2 | \psi_2 \rangle = 1$$

ενώ το στοιχείο  $u_{11}$  είναι

$$u_{11} = \langle \psi_1 | \hat{U} | \psi_1 \rangle = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0,$$

αφού  $|\psi_1\rangle$  και  $|\psi_2\rangle$  είναι ορθογώνια. Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο για όλα τα ζεύγη  $(p, q)$ , το στοιχείο  $u_{pq}$  ισούται με 1 όταν  $\hat{U} |\psi_q\rangle = |\psi_p\rangle$  και με 0 σε κάθε άλλη περίπτωση. Επειδή  $\hat{U} |\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle$ ,  $\hat{U} |\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle$ ,  $\hat{U} |\psi_3\rangle = |\psi_4\rangle$  και  $\hat{U} |\psi_4\rangle = |\psi_3\rangle$ , τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία είναι τα  $u_{21}$ ,  $u_{12}$ ,  $u_{43}$  και  $u_{34}$ , οπότε:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Ας επαληθεύσουμε ότι ο πίνακας αυτός δίνει πράγματι το αναμενόμενο αποτέλεσμα. Αν η αρχική κατάσταση του συστήματος είναι μία γενική υπέρθεση

$$|\psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

τότε

$$U|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a \\ d \\ c \end{bmatrix} = b|00\rangle + a|01\rangle + d|10\rangle + c|11\rangle$$

Παρατηρούμε ότι το πλάτος του  $|00\rangle$  αντάλλαξε θέση με το πλάτος του  $|01\rangle$  (δηλαδή έγινε NOT στο δεύτερο qubit ενώ το πρώτο παρέμεινε  $c_1 = 0$ ), και το ίδιο συνέβη ανάμεσα στα πλάτη των  $|10\rangle$  και  $|11\rangle$  (όπου το πρώτο qubit παραμένει  $c_1 = 1$ ). Οι συντελεστές που αντιστοιχούν σε διαφορετική τιμή του  $c_1$  δεν αναμιγνύονται ποτέ μεταξύ τους, ακριβώς επειδή η πύλη δεν επηρεάζει καθόλου το πρώτο qubit.

Υπάρχουν και περιπτώσεις όπου η περιγραφή με την βοήθεια του πίνακα δεν είναι η καλύτερη δυνατή. Είδαμε για παράδειγμα ότι όταν έχουμε να κάνουμε με την θέση ενός ηλεκτρονίου τότε χρησιμοποιούμε μία συνάρτηση  $\psi(x)$  για να περιγράψουμε την κατάσταση του συστήματος και όχι ένα διάνυσμα. Στην περίπτωση αυτή, όπου η κατάσταση περιγράφεται από μία συνάρτηση  $\psi(x, t)$  και όχι ένα διάνυσμα, η εξίσωση (1.18) γενικεύεται ως εξής:

$$j\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(x, t) \quad (2.2)$$

όπου  $\hbar$  η σταθερά του Planck και  $\hat{H}$  ένας Ερμιτιανός τελεστής (η Χαμιλτονιανή) που εξαρτάται από το φυσικό σύστημα και δρα πάνω στη μεταβλητή  $x$ , ακριβώς όπως ο πίνακας  $-\frac{q}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$  έδρασε πάνω στο διάνυσμα  $|\psi\rangle$  στην εξίσωση (1.18).

Στην απλούστερη δυνατή περίπτωση, όπου το ηλεκτρόνιο κινείται ελεύθερα πάνω σε έναν άξονα  $x$  χωρίς να ασκείται πάνω του καμία δύναμη, η Χαμιλτονιανή περιέχει μόνο την κινητική ενέργεια και γράφεται:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (2.3)$$

όπου  $m$  η μάζα του ηλεκτρονίου. Η εξίσωση Schrödinger (2.2) γίνεται τότε:

$$j\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

Παρακάτω δείχνουμε ένα παράδειγμα πως η εξίσωση Schrödinger μπορεί να γραφτεί στην περίπτωση όπου η κατάσταση του ηλεκτρονίου μπορεί να περιγραφεί από μία Gaussian κατανομή. Αν σας δυσκολεύει παραλείψτε το, το περιλαμβάνουμε για πληρότητα εδώ. Έχει ένα ενδιαφέρον να δούμε ότι σύμφωνα με το παράδειγμα όσο περνάει ο χρόνος, η κατανομή που περιγράφει τη θέση του ηλεκτρονίου “ανοίγει”. Με άλλα λόγια και εφόσον η μορφή του  $|\psi(x, t)|^2$  είναι ένα μέτρο του πόσο καλά γνωρίζουμε που είναι το ηλεκτρόνιο (στενή  $|\psi(x, t)|^2$  σημαίνει μεγάλη βεβαιότητα στη θέση του ηλεκτρονίου, διευρυμένη  $|\psi(x, t)|^2$  σημαίνει μικρότερη βεβαιότητα), έπεται ότι με την πάροδο του χρόνου η βεβαιότητα μας για την θέση του ηλεκτρονίου μειώνεται. Είναι ένα από τα χαρακτηριστικά της κβαντικής θεωρίας, η αβεβαιότητα με την οποία γνωρίζουμε κάτι αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου!

### Εμβάθυνση 2.1: Ελεύθερη κίνηση ηλεκτρονίου με αρχική κατάσταση Gaussian

Ας θεωρήσουμε ένα ηλεκτρόνιο που κινείται ελεύθερα πάνω σε έναν άξονα  $x$ , του οποίου η κυματοσυνάρτηση τη χρονική στιγμή  $t = 0$  είναι μία κανονικοποιημένη Gaussian κατανομή, κεντραρισμένη στο

$x = 0$  και με εύρος  $\sigma_0$ :

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma_0^2}\right)$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η κυματοσυνάρτηση αυτή είναι κανονικοποιημένη, αφού η αντίστοιχη πυκνότητα πιθανότητας είναι

$$|\psi(x, 0)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}\right),$$

δηλαδή μία κανονική (Gaussian) κατανομή με τυπική απόκλιση  $\sigma_0$ , οπότε χρησιμοποιώντας τη γνωστή σχέση  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$  παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, 0)|^2 dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \cdot \sqrt{2\pi}\sigma_0 = 1.$$

Θέλουμε τώρα να βρούμε πως εξελίσσεται η  $\psi(x, t)$  σύμφωνα με την (2.4). Επειδή η αρχική κατάσταση είναι μία Gaussian, δοκιμάζουμε μία λύση της ίδιας μορφής,

$$\psi(x, t) = A(t) \exp(-B(t)x^2),$$

όπου  $A(t)$  και  $B(t)$  είναι εν γένει μιγαδικές συναρτήσεις του χρόνου, με αρχικές τιμές  $A(0) = (2\pi\sigma_0^2)^{-1/4}$  και  $B(0) = 1/(4\sigma_0^2)$ . Παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\frac{\dot{A}}{A} - \dot{B}x^2\right)\psi, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = (-2B + 4B^2x^2)\psi.$$

Αντικαθιστώντας στην (2.4), διαιρώντας με  $\psi$  και στη συνέχεια με  $\hbar$  έχουμε

$$j\left(\frac{\dot{A}}{A} - \dot{B}x^2\right) = \frac{\hbar B}{m} - \frac{2\hbar B^2}{m}x^2.$$

Η σχέση αυτή πρέπει να ισχύει για κάθε  $x$ , οπότε εξισώνοντας χωριστά τους συντελεστές του  $x^2$  και τους σταθερούς όρους παίρνουμε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις:

$$\dot{B} = -\frac{2j\hbar}{m}B^2 \quad (2.5)$$

$$\frac{\dot{A}}{A} = -\frac{j\hbar}{m}B \quad (2.6)$$

Η πρώτη εξίσωση χωρίζει τις μεταβλητές,  $dB/B^2 = -(2j\hbar/m) dt$ , οπότε ολοκληρώνοντας και χρησιμοποιώντας ότι  $B(0) = 1/(4\sigma_0^2)$  βρίσκουμε

$$\frac{1}{B(t)} = 4\sigma_0^2 + \frac{2j\hbar}{m}t = 4\sigma_0^2 \left(1 + \frac{j\hbar t}{2m\sigma_0^2}\right).$$

Αν ορίσουμε  $w(t) = 1 + \frac{j\hbar t}{2m\sigma_0^2}$  τότε  $B(t) = 1/(4\sigma_0^2 w(t))$ . Αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση, και παρατηρώντας ότι  $\dot{w} = j\hbar/(2m\sigma_0^2)$ , βρίσκουμε

$$\frac{\dot{A}}{A} = -\frac{j\hbar}{4m\sigma_0^2 w} = -\frac{1}{2} \frac{\dot{w}}{w},$$

η οποία ολοκληρώνεται εύκολα δίνοντας  $A(t) = A(0)/\sqrt{w(t)}$ . Επομένως η κυματοσυνάρτηση τη χρονική στιγμή  $t$  είναι

$$\psi(x, t) = \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{1/4} \sqrt{w(t)}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma_0^2 w(t)}\right), \quad w(t) = 1 + \frac{j\hbar t}{2m\sigma_0^2}. \quad (2.7)$$

Ας υπολογίσουμε τώρα την πυκνότητα πιθανότητας  $|\psi(x, t)|^2$ . Θέτοντας  $\tau = \hbar t / (2m\sigma_0^2)$  έχουμε  $w(t) = 1 + j\tau$ , οπότε  $|w(t)|^2 = 1 + \tau^2$  και

$$\frac{1}{w(t)} = \frac{1 - j\tau}{1 + \tau^2} \Rightarrow \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{w(t)} \right] = \frac{1}{1 + \tau^2}.$$

Χρησιμοποιώντας ότι  $|e^{-Bx^2}|^2 = e^{-2\operatorname{Re}(B)x^2}$  καταλήγουμε στο

$$|\psi(x, t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma(t)^2} \right), \quad \sigma(t) = \sigma_0 \sqrt{1 + \left( \frac{\hbar t}{2m\sigma_0^2} \right)^2}. \quad (2.8)$$

Παρατηρούμε ότι η  $|\psi(x, t)|^2$  παραμένει Gaussian σε κάθε χρονική στιγμή, με το ολοκλήρωμά της να παραμένει ίσο με τη μονάδα (όπως αναμένεται αφού η εξέλιξη είναι μοναδιαία), όμως το εύρος της  $\sigma(t)$  αυξάνεται συνεχώς με τον χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι η κατανομή πιθανότητας ανοίγει: το ηλεκτρόνιο, παρότι δεν ασκείται πάνω του καμία δύναμη, γίνεται προοδευτικά όλο και πιο απεντοπισμένο στον χώρο. Πρόκειται για ένα καθαρά κβαντικό φαινόμενο, συνέπεια της αρχής της απροσδιοριστίας: μία αρχική κατάσταση εντοπισμένη στο χώρο (μικρό  $\sigma_0$ ) αντιστοιχεί αναγκαστικά σε μεγάλη αβεβαιότητα στην ορμή, και οι διαφορετικές συνιστώσες ορμής «κινούνται» με διαφορετική ταχύτητα  $v = p/m$ , με αποτέλεσμα το πακέτο να διαχέεται με τον χρόνο. Πράγματι, για μεγάλους χρόνους

$$\sigma(t) \approx \frac{\hbar t}{2m\sigma_0},$$

δηλαδή το εύρος της κατανομής αυξάνεται τελικά γραμμικά με τον χρόνο και επομένως μειώνεται η βεβαιότητα με την οποία γνωρίζουμε την θέση του σωματιδίου.

Στο παρακάτω πλαίσιο δείχνουμε ότι η εξίσωση Schrödinger συνεπάγεται την μοναδιαία εξέλιξη. Επειδή και αυτό έχει κάποια παραπάνω μαθηματικά μπορείτε να το παραλείψετε, αν όμως σας ενδιαφέρει να είστε πιο διεξοδικόι μπορείτε να το προσπαθήσετε.

## Εμβάθυνση 2.2: Από την εξίσωση Schrödinger στην μοναδιαία εξέλιξη

Όσο και αν φαίνεται περίεργο, οι περιγραφές με τον μοναδιαίο τελεστή  $\hat{U}$  και η περιγραφή με την εξίσωση Schrödinger δεν διαφέρουν. Η δεύτερη συνεπάγεται την πρώτη. Για να το δούμε αυτό, θα ορίσουμε τώρα κάτι πολύ χρήσιμο: την παράγωγο ενός τελεστή  $\hat{U}$  που εξαρτάται από μία παράμετρο όπως ο χρόνος  $t$ . Θυμηθείτε τι κάνει ένας τελεστής: παίρνει την είσοδο του μία κατάσταση ενός συστήματος  $|\psi\rangle$  και την μετασχηματίζει σε μία άλλη κατάσταση  $|\psi\rangle$ ,

$$|\phi\rangle = \hat{U} |\psi\rangle = \hat{U} (|\psi\rangle)$$

Το τελευταίο μέρος της παραπάνω εξίσωσης έχει ιδιαίτερη σημασία καθώς μας θυμίζει ότι στην ουσία ο τελεστής είναι μία συνάρτηση που δρα πάνω στο  $|\psi\rangle$  και μας δίνει μία άλλη κατάσταση  $|\phi\rangle$ . Για πολύ μικρό  $\Delta t$  θα μπορούσαμε επομένως να ορίσουμε την παράγωγο του τελεστή ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{U} \approx \frac{\hat{U}(t + \Delta t) - \hat{U}(t)}{\Delta t}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το  $|\psi\rangle$  δεν εξαρτάται από τον χρόνο και ότι  $|\phi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi\rangle$ . Μπορούμε τότε να δούμε πως μεταβάλλεται το  $|\phi\rangle$  σε ένα μικρό χρονικό διάστημα  $\Delta t$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} |\phi\rangle \approx \frac{|\phi(t + \Delta t)\rangle - |\phi(t)\rangle}{\Delta t} = \frac{\hat{U}(t + \Delta t) |\psi\rangle - \hat{U}(t) |\psi\rangle}{\Delta t} = \left( \frac{\hat{U}(t + \Delta t) - \hat{U}(t)}{\Delta t} \right) |\psi\rangle$$

δηλαδή, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου του τελεστή που μόλις είδαμε,

$$\frac{\partial}{\partial t} |\phi\rangle = \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} |\psi\rangle \quad (2.9)$$

Ας ασχοληθούμε τώρα με την παράγωγο ενός τελεστή της μορφής:

$$\hat{U} = \exp(-j\alpha\hat{H}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-j\alpha)^n}{n!} \hat{H}^n$$

όπου  $\exp(x) = e^x$ ,  $\alpha = t/\hbar$  μία πραγματική σταθερά και  $\hat{H}$  είναι ένας οποιοσδήποτε τελεστής που δεν εξαρτάται από το  $t$  (αν και εμάς μας ενδιαφέρουν κυρίως οι Ερμιτιανοί τελεστές που συναντούμε στην εξίσωση Schrödinger). Θα έχουμε:

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-j\alpha)^n}{n!} \hat{H}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{(-j\alpha)^n}{n!} \right\} \hat{H}^n$$

Ο υπολογισμός της παραγώγου για  $n > 0$ , δίνει:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{(-j\alpha)^n}{n!} = (-j) \frac{\partial \alpha}{\partial t} \frac{d}{d\alpha} \frac{(-j\alpha)^n}{n!} = -\frac{j}{\hbar} \frac{(-j\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}$$

ενώ για  $n = 0$ , ο αντίστοιχος όρος είναι ο  $(-j\alpha)^0/0! = 1$  οπότε η παράγωγος του είναι μηδέν. Τελικά:

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} = -\frac{j}{\hbar} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-j\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} \hat{H}^n = -\frac{j\hat{H}}{\hbar} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-j\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} \hat{H}^{n-1}$$

Αν τώρα θέσουμε  $m = n - 1$  θα πάρουμε:

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} = -\frac{j\hat{H}}{\hbar} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-j\alpha)^m}{m!} \hat{H}^m = -\frac{j\hat{H}}{\hbar} \hat{U}$$

Τώρα αν θέσουμε  $|\psi_0\rangle = |\psi(x, 0)\rangle$  να είναι η αρχική κατάσταση του κβαντικού μας συστήματος και  $|\phi(x, t)\rangle = \hat{U} |\psi_0\rangle$ , τότε σύμφωνα με την (2.9) θα έχουμε (εφόσον το  $|\psi_0\rangle = |\psi(x, 0)\rangle$  δεν εξαρτάται από το  $t$ ):

$$\frac{\partial}{\partial t} |\phi\rangle = \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} |\psi_0\rangle = -\frac{j\hat{H}}{\hbar} \hat{U} |\psi_0\rangle = -\frac{j\hat{H}}{\hbar} |\phi\rangle$$

δηλαδή, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με  $j\hbar$ ,

$$j\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\phi\rangle = \hat{H} |\phi\rangle. \quad (2.10)$$

Η (2.10) είναι ακριβώς η εξίσωση Schrödinger. Δείξαμε δηλαδή ότι, αν ορίσουμε την εξέλιξη μιας κατάστασης μέσω του τελεστή  $\hat{U}(t) = \exp(-j\hat{H}t/\hbar)$ , δηλαδή  $|\phi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi_0\rangle$ , τότε το  $|\phi(t)\rangle$  ικανοποιεί αυτόματα την εξίσωση Schrödinger με αρχική συνθήκη  $|\phi(0)\rangle = |\psi_0\rangle$ . Η περιγραφή μέσω του  $\hat{U}$  και η περιγραφή μέσω της εξίσωσης Schrödinger είναι επομένως ισοδύναμες.

### Ο $\hat{U}$ είναι μοναδιαίος τελεστής

Μένει να δείξουμε ότι ο τελεστής  $\hat{U} = \exp(-j\alpha\hat{H})$  είναι όντως μοναδιαίος, δηλαδή ότι ικανοποιεί τη σχέση  $\hat{U}^T \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^T = \hat{I}$ , όπου  $\hat{I}$  ο ταυτοτικός τελεστής.

Πριν υπολογίσουμε τον  $\hat{U}^T$ , χρειαζόμαστε το πώς συμπεριφέρεται ο ανάστροφος στις διαδοχικές δυνάμεις  $\hat{H}^n$  του τελεστή  $\hat{H}$ . Θυμηθείτε την ιδιότητα που είδαμε παραπάνω, ότι ο ανάστροφος ενός γινομένου δύο τελεστών ισούται με το γινόμενο των ανάστροφων τους με αντίστροφη σειρά,  $(\hat{A}\hat{B})^T = \hat{B}^T \hat{A}^T$ . Γράφοντας  $\hat{H}^n = \hat{H} (\hat{H}^{n-1})$  και εφαρμόζοντας την ιδιότητα αυτή διαδοχικά (δηλαδή με επαγωγή στο  $n$ ) παίρνουμε:

$$(\hat{H}^n)^T = (\hat{H} \hat{H}^{n-1})^T = (\hat{H}^{n-1})^T \hat{H}^T = \dots = \underbrace{\hat{H}^T \hat{H}^T \dots \hat{H}^T}_n = (\hat{H}^T)^n,$$

δηλαδή  $(\hat{H}^n)^T = (\hat{H}^T)^n$ : ο ανάστροφος μιας δύναμης ισούται με τη δύναμη του ανάστροφου (εδώ η σειρά των παραγόντων δεν αλλάζει τελικά, αφού όλοι είναι ο ίδιος τελεστής  $\hat{H}$ ). Μπορούμε τώρα να βρούμε τον ανάστροφο (adjoint) του  $\hat{U}$ , παίρνοντας τον ανάστροφο κάθε όρου της δυναμοσειράς και χρησιμοποιώντας την παραπάνω ιδιότητα:

$$\hat{U}^T = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-j\alpha)^n}{n!} \hat{H}^n \right]^T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(-j\alpha)^n]^*}{n!} (\hat{H}^n)^T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\alpha)^n}{n!} (\hat{H}^T)^n = \exp(j\alpha \hat{H}^T),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι το  $\alpha$  είναι πραγματικό (άρα  $[(-j\alpha)^n]^* = (j\alpha)^n$ ). Ο  $\hat{H}$  είναι όμως Ερμιτιανός, δηλαδή  $\hat{H}^T = \hat{H}$ , οπότε:

$$\hat{U}^T = \exp(j\alpha \hat{H}).$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας απευθείας τις δυναμοσειρές των  $\hat{U}^T$  και  $\hat{U}$  μπορούμε να υπολογίσουμε το γινόμενο  $\hat{U}^T \hat{U}$  χωρίς να χρειαστεί να επικαλεστούμε κάποια ιδιότητα εκθετικών τελεστών (κάτι που θα απαιτούσε να έχουμε ήδη μιλήσει για το αν δύο τελεστές μετατίθενται μεταξύ τους):

$$\hat{U}^T \hat{U} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\alpha)^n}{n!} \hat{H}^n \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-j\alpha)^m}{m!} \hat{H}^m \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(j\alpha)^n (-j\alpha)^m}{n! m!} \hat{H}^{n+m}$$

Ας ομαδοποιήσουμε τώρα τους όρους του διπλού αθροίσματος ανάλογα με το άθροισμα  $k = n + m$ , δηλαδή μαζεύουμε όλα τα ζεύγη  $(n, m)$  με  $n + m = k$  σταθερό:

$$\hat{U}^T \hat{U} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^k \frac{(j\alpha)^n (-j\alpha)^{k-n}}{n! (k-n)!} \right) \hat{H}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} (j\alpha)^n (-j\alpha)^{k-n} \right) \hat{H}^k,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του διωνυμικού συντελεστή  $\binom{k}{n} = \frac{k!}{n! (k-n)!}$ . Η εσωτερική άθροιση είναι όμως ακριβώς το ανάπτυγμα του διωνύμου Νεύτωνα (εδώ για τους αριθμούς  $j\alpha$  και  $-j\alpha$ ):

$$\sum_{n=0}^k \binom{k}{n} (j\alpha)^n (-j\alpha)^{k-n} = (j\alpha + (-j\alpha))^k = 0^k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k > 0. \end{cases}$$

Άρα στο άθροισμα ως προς  $k$  επιζεί μόνο ο όρος  $k = 0$ , για τον οποίο  $\hat{H}^0 = \hat{I}$ , και καταλήγουμε στο

$$\hat{U}^T \hat{U} = \hat{I}.$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο (αντιστρέφοντας απλά τη σειρά των δύο αθροισμάτων στο αρχικό γινόμενο, κάτι που εδώ δεν αλλάζει τίποτα αφού πρόκειται πάντα για δυνάμεις  $\hat{H}^n \hat{H}^m = \hat{H}^{n+m} = \hat{H}^m \hat{H}^n$  του ίδιου τελεστή  $\hat{H}$ ) προκύπτει και  $\hat{U} \hat{U}^T = \hat{I}$ . Άρα  $\hat{U}^T = \hat{U}^{-1}$ , δηλαδή ο  $\hat{U}$  είναι πράγματι μοναδιαίος τελεστής. Αυτό δεν είναι τυχαίο: η μοναδιαιότητα του  $\hat{U}$  είναι αυτή που εγγυάται ότι η νόρμα  $\langle \phi | \phi \rangle$  —και άρα η συνολική πιθανότητα— διατηρείται σε κάθε χρονική στιγμή κατά την κβαντομηχανική εξέλιξη.

## 2.4 Η μέτρηση στην κβαντική θεωρία

Όπως είδαμε οι Ερμιτιανοί τελεστές σχετίζονται με την διαδικασία της μέτρησης στην κβαντική θεωρία. Κάθε μέγεθος που θέλουμε να μετρήσουμε περιγράφεται από έναν Ερμιτιανό τελεστή  $\hat{H}$  του οποίου οι ιδιοτιμές  $\lambda_m$  είναι οι πιθανές τιμές του μεγέθους που μετράμε και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα  $|\psi_m\rangle$  είναι οι καταστάσεις του συστήματος μετά την μέτρηση. Τα ιδιοδιανύσματα και οι ιδιοτιμές υπολογίζονται βάσει της γνωστής σχέσης:

$$\hat{H} |\psi_m\rangle = \lambda_m |\psi_m\rangle$$

Οποιαδήποτε κατάσταση  $|\psi\rangle$  του συστήματος μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοδιανυ-

σμάτων  $|\psi_m\rangle$  αφού αυτά αποτελούν μία ορθοκανονική βάση,

$$|\psi\rangle = \sum_n a_n |\psi_n\rangle$$

Οι συντελεστές  $a_n$  σχετίζονται όπως είδαμε με τις πιθανότητες  $P_n$  να μετρήσουμε την ιδιοτιμή  $\lambda_n$  που αντιστοιχεί στην ιδιοκατάσταση  $|\psi_n\rangle$ . Έχουμε:

$$P_n = |a_n|^2$$

Είναι ενδιαφέρον ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τελεστές προβολής  $\hat{P}_n = |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$ , τότε είδαμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε τις πιθανότητες αυτές ως,

$$P_n = \langle \psi | \hat{P}_n | \psi \rangle$$

ενώ η τελική κατάσταση που αντιστοιχεί στη μέτρηση του  $\lambda_n$  προκύπτει και ως,

$$|\psi_n\rangle = \frac{1}{P_n} \hat{P}_n |\psi\rangle = \frac{\hat{P}_n |\psi\rangle}{\langle \psi | \hat{P}_n | \psi \rangle}$$

Ο τελεστής  $\hat{H}$  διαγωνιοποιείται ως εξής:

$$\hat{H} = \sum_n \lambda_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| = \sum_n \lambda_n \hat{P}_n$$

και ως αποτέλεσμα αυτού, είδαμε ότι η μέση τιμή  $\mathbb{E}\{f(H)\}$ , οποιασδήποτε συνάρτησης  $f(H)$  του μεγέθους  $H$ ,

$$\mathbb{E}\{f(H)\} = \langle \psi | f(\hat{H}) | \psi \rangle$$

Αυτό είναι το τρίτο και τελευταίο αξίωμα της κβαντικής θεωρίας και έχει μία πολύ ενδιαφέρουσα συνέπεια την οποία ήδη συζητήσαμε εν μέρει στην ενότητα 1.17 όπου είδαμε ότι δεν μπορούμε να μετρήσουμε το spin στον άξονα των  $x$  και το spin στον άξονα των  $z$  καθώς η πρώτη μέτρηση εισάγει επιπλέον αβεβαιότητα για την δεύτερη. Είναι καιρός να διερευνήσουμε λίγο πιο προσεκτικά αυτό το φαινόμενο: έστω ότι έχουμε δύο μεγέθη  $A$  και  $B$  που περιγράφονται από τους τελεστές  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$  που είναι προφανώς Ερμιτιανοί και το σύστημα μας είναι στην κατάσταση  $|\psi\rangle$ . Ας υποθέσουμε επίσης ότι ο πρώτος τελεστής έχει ιδιοδιανύσματα  $|\psi_n\rangle$  που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές  $\alpha_n$ ,

$$\hat{A} |\psi_n\rangle = \alpha_n |\psi_n\rangle$$

και τα  $|\psi_n\rangle$  φτιάχνουν μία ορθοκανονική βάση. Μετά την μέτρηση του  $A$  το σύστημα καταλήγει στην κατάσταση  $|\psi_m\rangle$  εάν έχουμε μετρήσει την  $a_m$  για το  $A$ . Οπότε

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{Μέτρηση του } A} |\psi_m\rangle$$

Στη συνέχεια μετράμε το  $B$ . Υπάρχουν δύο εναλλακτικές: Η πρώτη είναι τα ιδιοδιανύσματα  $|\psi_n\rangle$  του  $\hat{A}$  τυχαίνει να είναι και ιδιοδιανύσματα του  $\hat{B}$ , δηλαδή ισχύει:

$$\hat{B} |\psi_n\rangle = \beta_n |\psi_n\rangle$$

Αν ισχύει το παραπάνω τότε δεδομένου ότι ήδη βρισκόμαστε σε μία κατάσταση  $|\psi_m\rangle$  η οποία είναι ιδιοδιανύσμα του  $B$  τότε είναι βέβαιο ότι μετά την μέτρηση του  $B$ , θα ξανακαταλήξουμε στο  $|\psi_m\rangle$  και θα μετρήσουμε  $\beta_m$ ,

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{Μέτρηση του } A} |\psi_m\rangle \xrightarrow{\text{Μέτρηση του } B} |\psi_m\rangle$$

Στο παραπάνω σενάριο όπου τα  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$  έχουν μία κοινή ορθοκανονική βάση από ιδιοδιανύσματα, βλέπουμε ότι έχοντας μετρήσει το  $A$ , η μέτρηση του  $B$  είναι αδύνατο να μας δώσει διαφορετικό αποτέλεσμα από  $\beta_m$ . Επίσης αν ξαναμετρήσουμε το  $A$  τότε πάλι θα πάρουμε την τιμή  $\alpha_m$  που αντιστοιχεί στο  $|\psi_m\rangle$ . Το σύστημα συμπεριφέρεται σχεδόν σαν ένα κλασικό σύστημα όπου δεν έχουμε κανένα λόγο να πιστεύουμε ότι επί της

αρχής η μέτρηση ενός μεγέθους μπορεί να εισάγει οποιαδήποτε αβεβαιότητα στην μέτρηση ενός δεύτερου μεγέθους.

Στην περίπτωση όμως της μέτρησης που είχαμε στην ενότητα 1.17 ήταν αδύνατο να μετρήσουμε το ένα μέγεθος (spin ως προς  $x$ ) χωρίς να εισάγουμε αβεβαιότητα ως προς το άλλο μέγεθος (spin ως προς  $z$ ) ακριβώς επειδή οι αντίστοιχοι τελεστές δεν είχαν κοινή ορθοκανονική βάση από ιδιοδιανύσματα. Έτσι σύμφωνα και με όσα λέγαμε στην ενότητα αυτή:

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{Μέτρηση spin } z} |1\rangle$$

αλλά μετά αν μετράγαμε το spin στην κατεύθυνση  $x$  θα είχαμε δύο ισοπίθανα ενδεχόμενα:

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{Μέτρηση spin } z} |1\rangle \xrightarrow{\text{Μέτρηση spin } x} |-x\rangle \text{ (με πιθανότητα 50\%)}$$

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{Μέτρηση spin } z} |1\rangle \xrightarrow{\text{Μέτρηση spin } x} |+x\rangle \text{ (με πιθανότητα 50\%)}$$

Στη συνέχεια είτε πάρουμε  $|+x\rangle$  είτε  $|-x\rangle$  πάλι έχουμε αβεβαιότητα για την τιμή του spin ως προς τον άξονα των  $z$  επειδή τόσο το  $|-x\rangle$  όσο και το  $|+x\rangle$  είναι υπέρθεση των  $|0\rangle$  (κατάσταση όπου το spin ως προς το  $z$  είναι αρνητικό με πιθανότητα 100%) και  $|1\rangle$  (κατάσταση όπου το spin ως προς το  $z$  είναι θετικό με πιθανότητα 100%),

$$|-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$|+x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

Άρα έχουμε αβεβαιότητα ως προς το spin στον άξονα των  $z$  παρά το ότι το είχαμε μετρήσει πριν! Αυτό δεν έχει να κάνει με τον τρόπο που κάνουμε την μέτρηση! είναι ενγενής ιδιότητα του κβαντικού κόσμου. Στις περιπτώσεις όπου τα  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$  δεν έχουν κοινή βάση ιδιοδιανυσμάτων, η μέτρηση στο ένα θα εισάγει αβεβαιότητα στην τιμή του άλλου: λέμε τότε ότι τα μεγέθη δεν είναι συμβιβαστά μεταξύ τους.

Υπάρχει ένας εύκολος τρόπος να διαπιστώσουμε ότι δύο μεγέθη είναι ή δεν είναι συμβιβαστά; Προκύπτει πως ναι. Μπορούμε να δείξουμε ότι δύο μεγέθη είναι συμβιβαστά όταν οι τελεστές τους αντιμετατίθενται:

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$$

Συχνά ορίζουμε και τον μεταθέτη των  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$ ,

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω εάν  $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$  τότε και μόνο τότε τα  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$  έχουν κοινή ορθοκανονική βάση από ιδιοδιανύσματα και επομένως είναι συμβιβαστά. Μπορούμε να δείξουμε ως ένα σημείο γιατί συμβαίνει αυτό αλλά δεν θα δώσουμε την πλήρη απόδειξη. Αν υποθέσουμε ότι τα  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$  δεν έχουν κοινή βάση ιδιοδιανυσμάτων  $|\psi_n\rangle$  τότε κάθε  $|\psi\rangle$  μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός αυτών,

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle$$

Μπορούμε τώρα να δούμε ότι:

$$\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle = \sum_n c_n \hat{A}\hat{B}|\psi_n\rangle = \sum_n c_n \hat{A}\beta_n |\psi_n\rangle = \sum_n c_n \alpha_n \beta_n |\psi_n\rangle$$

$$\hat{B}\hat{A}|\psi\rangle = \sum_n c_n \hat{B}\hat{A}|\psi_n\rangle = \sum_n c_n \hat{B}\alpha_n |\psi_n\rangle = \sum_n c_n \beta_n \alpha_n |\psi_n\rangle$$

Προκύπτει επομένως ότι

$$\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle - \hat{B}\hat{A}|\psi\rangle = (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})|\psi\rangle = 0$$

Εφόσον η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε  $|\psi\rangle$  έπεται ότι:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$$

Το να δείξουμε το ανάποδο, δηλαδή ότι όταν  $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$  τότε υπάρχει κοινή ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων είναι αρκετά δύσκολο και δεν θα το κάνουμε εδώ.

## Παράδειγμα 2.6: Ο μεταθέτης $[\hat{H}_y, \hat{H}_z]$

Ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα δύο μεγεθών που δεν είναι συμβιβαστά: το spin ως προς τον άξονα  $y$  και το spin ως προς τον άξονα  $z$ , που περιγράφονται αντίστοιχα από τους Ερμιτιανούς τελεστές  $\hat{H}_y$  και  $\hat{H}_z$ . Θέλουμε να υπολογίσουμε τον μεταθέτη τους,

$$[\hat{H}_y, \hat{H}_z] = \hat{H}_y \hat{H}_z - \hat{H}_z \hat{H}_y$$

Για να υπολογίσουμε τη δράση της σύνθεσης  $\hat{H}_y \hat{H}_z$  (και αντίστροφα) πάνω σε μία τυχαία κατάσταση  $|\psi\rangle$  βολεύει να δουλέψουμε με μία συγκεκριμένη αναπαράσταση των τελεστών, δηλαδή με πίνακες. Επιλέγουμε ως βάση αναπαράστασης τα  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$ , οπότε σύμφωνα με όσα είδαμε στην ενότητα 1.24, ο τελεστής  $\hat{H}_z$  αντιστοιχεί στον πίνακα  $\mathbf{H}_z$  με στοιχεία  $(H_z)_{pq} = \langle \psi_p | \hat{H}_z | \psi_q \rangle$ , ο οποίος όπως έχουμε ήδη υπολογίσει είναι ο  $\mathbf{H}_z = \frac{\hbar}{2} \mathbf{Z}$ . Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο ο τελεστής  $\hat{H}_y$  αντιστοιχεί στον πίνακα  $\mathbf{H}_y = \frac{\hbar}{2} \mathbf{Y}$ ,

$$\mathbf{H}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Επειδή η αντιστοιχία τελεστή-πίνακα διατηρεί τη σύνθεση (η δράση του  $\hat{H}_y \hat{H}_z$  σε ένα διάνυσμα αντιστοιχεί ακριβώς στο γινόμενο πινάκων  $\mathbf{H}_y \mathbf{H}_z$  πάνω στο αντίστοιχο διάνυσμα-στήλη), μπορούμε να υπολογίσουμε τον μεταθέτη των τελεστών δουλεύοντας απευθείας με τους πίνακες:

$$[\hat{H}_y, \hat{H}_z] \longleftrightarrow [\mathbf{H}_y, \mathbf{H}_z] = \mathbf{H}_y \mathbf{H}_z - \mathbf{H}_z \mathbf{H}_y$$

Έχουμε πρώτα:

$$\mathbf{H}_y \mathbf{H}_z = \frac{\hbar^2}{4} \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{\hbar^2}{4} \begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix}$$

και στη συνέχεια:

$$\mathbf{H}_z \mathbf{H}_y = \frac{\hbar^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} = \frac{\hbar^2}{4} \begin{bmatrix} 0 & -j \\ -j & 0 \end{bmatrix}$$

Αφαιρώντας τα δύο γινόμενα παίρνουμε:

$$[\mathbf{H}_y, \mathbf{H}_z] = \mathbf{H}_y \mathbf{H}_z - \mathbf{H}_z \mathbf{H}_y = \frac{\hbar^2}{4} \begin{bmatrix} 0 & 2j \\ 2j & 0 \end{bmatrix} = \frac{j\hbar^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = j\hbar \left( \frac{\hbar}{2} \mathbf{X} \right) = j\hbar \mathbf{H}_x$$

Ο πίνακας  $\mathbf{H}_x = \frac{\hbar}{2} \mathbf{X}$  που προέκυψε είναι ακριβώς η αναπαράσταση, στην ίδια βάση  $|0\rangle, |1\rangle$ , του τελεστή  $\hat{H}_x$  που περιγράφει τη μέτρηση του spin ως προς τον άξονα  $x$ . Αφού πίνακες και τελεστές αντιστοιχούν ένα προς ένα (στη δεδομένη βάση), το αποτέλεσμα  $[\mathbf{H}_y, \mathbf{H}_z] = j\hbar \mathbf{H}_x$  σημαίνει ότι ισχύει η ίδια σχέση και για τους τελεστές:

$$[\hat{H}_y, \hat{H}_z] = j\hbar \hat{H}_x$$

Καταλήγουμε λοιπόν σε έναν μεταθέτη που δεν είναι ίσος με το μηδέν. Αυτό σημαίνει, όπως είδαμε παραπάνω, ότι οι  $\hat{H}_y$  και  $\hat{H}_z$  δεν έχουν κοινή βάση ιδιοδιανυσμάτων και άρα το spin ως προς  $y$  και το spin ως προς  $z$  δεν είναι συμβιβαστά μεγέθη: η μέτρηση του ενός εισάγει αναπόφευκτα αβεβαιότητα στο άλλο, ακριβώς όπως συνέβη και με τα  $x$  και  $z$  στο παράδειγμα που είδαμε παραπάνω. Με τον ίδιο τρόπο μπορεί κανείς να δείξει ότι  $[\hat{H}_x, \hat{H}_y] = j\hbar \hat{H}_z$  και  $[\hat{H}_z, \hat{H}_x] = j\hbar \hat{H}_y$ , σχέσεις που αποτελούν τις γνωστές σχέσεις μετάθεσης του spin.

Το παράδειγμα αυτό δεν είναι ειδική περίπτωση: με τον ίδιο ακριβώς τρόπο υπολογίζονται και οι μεταθέτες των υπόλοιπων συνδυασμών των τελεστών spin, και το αποτέλεσμα είναι πάντα ανάλογο του τρίτου τελεστή. Συνοψίζοντας, οι τελεστές  $\hat{H}_x, \hat{H}_y$  και  $\hat{H}_z$  που περιγράφουν το spin ως προς τους τρεις άξονες ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης:

### Αποτέλεσμα 2.1: Σχέσεις μετάθεσης του spin

$$[\hat{H}_x, \hat{H}_y] = j\hbar \hat{H}_z, \quad [\hat{H}_y, \hat{H}_z] = j\hbar \hat{H}_x, \quad [\hat{H}_z, \hat{H}_x] = j\hbar \hat{H}_y$$

Παρατηρήστε την κυκλική δομή των παραπάνω σχέσεων: κάθε φορά η σειρά  $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$  των δεικτών παραμένει η ίδια. Το γεγονός ότι κανένας από τους μεταθέτες δεν είναι μηδενικός σημαίνει ότι δεν υπάρχουν δύο άξονες ως προς τους οποίους το spin να είναι ταυτόχρονα συμβιβαστά μεγέθη: η μέτρηση του spin σε έναν άξονα εισάγει πάντα αβεβαιότητα στο spin ως προς οποιονδήποτε άλλο (μη παράλληλο) άξονα.

Για πληρότητα υπολογίζουμε και τους μεταθέτες των πινάκων Pauli.

### Παράδειγμα 2.7: Μεταθέτες των πινάκων Pauli

Ας υπολογίσουμε τους μεταθέτες των πινάκων Pauli. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Από τον ορισμό του μεταθέτη έχουμε

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbf{XY} - \mathbf{YX}.$$

Υπολογίζουμε πρώτα τα δύο γινόμενα:

$$\mathbf{XY} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix} = j\mathbf{Z},$$

ενώ

$$\mathbf{YX} = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} = -j\mathbf{Z}.$$

Επομένως

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = j\mathbf{Z} - (-j\mathbf{Z}) = 2j\mathbf{Z}.$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε και τους υπόλοιπους μεταθέτες:

$$[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] = 2j\mathbf{X},$$

και

$$[\mathbf{Z}, \mathbf{X}] = 2j\mathbf{Y}.$$

## 2.5 Τα αξιώματα της κβαντικής θεωρίας

Στην ενότητα αυτή θα συγκεντρώσουμε τα βασικά αξιώματα της κβαντικής θεωρίας όπως θα τα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω. Θα αναφερόμαστε πολύ συχνά σε αυτά καθώς θα εμβαθύνουμε στις έννοιες της κβαντικής υπολογιστικής παρακάτω.

### Αποτέλεσμα 2.2: Τα αξιώματα της κβαντικής θεωρίας

1. Η κατάσταση κάθε κβαντικού συστήματος περιγράφεται από μία κυματοσυνάρτηση  $|\psi\rangle$  που μπορεί να είναι ένα διάνυσμα στήλη ή μία συνάρτηση, αν και είναι προτιμότερο στην περίπτωση αυτή να την συμβολίζουμε με  $\psi$ . Το  $|\psi\rangle$ , ή  $\psi$  περιέχουν όλη την απαραίτητη πληροφορία για το σύστημα, δηλαδή τι μπορούμε να μετρήσουμε σε αυτό. Επιλέγουμε το μέτρο της κυματοσυνάρτησης να ισούται με την μονάδα ώστε οι πιθανότητες να αθροίζονται στην μονάδα,

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1$$

2. Η εξέλιξη κάθε κβαντικού συστήματος περιγράφεται από έναν μοναδιαίο τελεστή  $\hat{U}$  ο οποίος εξαρτάται από το σύστημα. Αν  $|\psi\rangle$  είναι η αρχική κατάσταση του συστήματος και  $|\phi\rangle$  η τελική, θα έχουμε επομένως:

$$|\phi\rangle = \hat{U} |\psi\rangle$$

Το γεγονός ότι το  $\hat{U}$  είναι μοναδιαίο εξασφαλίζει ότι και η τελική κατάσταση θα έχει μέτρο ίσο με 1,

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\phi|\phi\rangle = 1$$

3. Κάθε μέγεθος που μπορεί να μετρηθεί στην κβαντική θεωρία περιγράφεται από ένα Ερμιτιανό τελεστή  $\hat{H}$ . Οι πιθανές τιμές που μετράμε καθορίζονται από τις ιδιοτιμές του  $\hat{H}$  και μετά την μέτρηση, εάν έχουμε μετρήσει την ιδιοτιμή  $\lambda_m$  τότε το σύστημα θα βρεθεί στην ιδιοκατάσταση  $|\psi_m\rangle$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή. Η πιθανότητα  $P_m$  να πάρουμε το αποτέλεσμα  $\lambda_m$  είναι:

$$P_m = \langle\psi|\hat{P}_m|\psi\rangle$$

όπου  $\hat{P}_m = |\psi_m\rangle\langle\psi_m|$  είναι ο τελεστής προβολής στο ιδιοδιάνυσμα  $|\psi_m\rangle$ .

## 2.6 Η σχέση της αβεβαιότητας

Το κατά πόσο δύο παρατηρήσιμα μπορούν να έχουν ταυτόχρονα καλά καθορισμένες τιμές συνδέεται με τη διάσημη *σχέση αβεβαιότητας*. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο μεγέθη  $A$  και  $B$ , τα οποία περιγράφονται από τους τελεστές  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$  αντίστοιχα. Για τα μεγέθη αυτά μπορούμε να υπολογίσουμε τις μέσες τιμές τους  $\mu_A$  και  $\mu_B$  ως εξής:

$$\mu_A = \mathbb{E}\{A\}, \quad \mu_B = \mathbb{E}\{B\},$$

και τις διακυμάνσεις τους:

$$\sigma_A^2 = \mathbb{E}\{(A - \mu_A)^2\}, \quad \sigma_B^2 = \mathbb{E}\{(B - \mu_B)^2\}.$$

Εάν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση  $|\psi\rangle$ , τότε, όπως είδαμε και στα προηγούμενα, οι μέσες τιμές μπορούν να υπολογιστούν από

$$\mu_A = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle, \quad \mu_B = \langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle,$$

ενώ οι διακυμάνσεις δίνονται από

$$\sigma_A^2 = \langle\psi|(\hat{A} - \mu_A)^2|\psi\rangle, \quad \sigma_B^2 = \langle\psi|(\hat{B} - \mu_B)^2|\psi\rangle.$$

Ας προσπαθήσουμε πρώτα να καταλάβουμε τι σημαίνει η διακύμανση. Είναι εύκολο να δούμε ότι, αν είμαστε απολύτως σίγουροι για την τιμή του  $A$ , τότε το αποτέλεσμα μιας μέτρησης δεν παρουσιάζει καμία τυχαιότητα: κάθε φορά που πραγματοποιούμε τη μέτρηση θα παίρνουμε ακριβώς την ίδια τιμή. Η τιμή αυτή θα ταυτίζεται επομένως και με τη μέση τιμή του  $A$ .

Για παράδειγμα, έστω ότι μετράμε το spin ενός ηλεκτρονίου στον άξονα των  $z$  και το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση

$$|\psi\rangle = |1\rangle,$$

όπου έχουμε ορίσει την  $|1\rangle$  ως την κατάσταση με θετικό spin στον άξονα  $z$ . Αν συμβολίσουμε με  $S$  το μέγεθος αυτό, τότε κάθε φορά που πραγματοποιούμε τη μέτρηση θα βρίσκουμε

$$S = +\frac{\hbar}{2}.$$

Είμαστε, δηλαδή, απολύτως βέβαιοι για το αποτέλεσμα της μέτρησης. Επομένως

$$\mu_S = +\frac{\hbar}{2}$$

και

$$\sigma_S^2 = \mathbb{E} \left\{ (S - \mu_S)^2 \right\} = 0.$$

Όταν επομένως είμαστε απολύτως βέβαιοι για την τιμή ενός μεγέθους, η διακύμανσή του είναι μηδέν. Αντίθετα, όσο μεγαλύτερη είναι η διασπορά των αποτελεσμάτων των μετρήσεων γύρω από τη μέση τιμή, τόσο μεγαλύτερη είναι η διακύμανση. Συχνά χρησιμοποιούμε την *τυπική απόκλιση*  $\sigma_A$  (δηλαδή την ρίζα του  $\sigma_A^2$ ) ως μέτρο της αβεβαιότητας που έχουμε για το μέγεθος  $A$ . Αντίστοιχα, η  $\sigma_B$  αποτελεί μέτρο της αβεβαιότητας για το μέγεθος  $B$ .

Η σχέση αβεβαιότητας συνδέει τις αβεβαιότητες δύο μεγεθών  $A$  και  $B$  με τον μεταθέτη

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

των τελεστών τους και έχει τη μορφή

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle \right|^2.$$

Πριν δείξουμε τη σχέση αβεβαιότητας, ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε τη σημασία της. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύστημα στην κατάσταση  $|\psi\rangle$  και δύο μεγέθη  $A$  και  $B$ , τα οποία αντιστοιχούν στους Ερμιτιανούς τελεστές  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$ .

Μπορούμε να πραγματοποιήσουμε το εξής πείραμα. Φέρνουμε με κάποιο τρόπο το σύστημα στην κατάσταση  $|\psi\rangle$  και μετράμε το  $A$ . Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε την προετοιμασία του συστήματος στην ίδια κατάσταση  $|\psi\rangle$  και μετράμε το  $B$ . Συνεχίζουμε επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία.

Μετά από μεγάλο αριθμό, έστω  $2N$ , ανεξάρτητων προετοιμασιών του συστήματος, θα έχουμε πάρει μία σειρά από  $N$  αποτελέσματα

$$\alpha_1, \dots, \alpha_N$$

για τις μετρήσεις του  $A$  και μία σειρά από  $N$  αποτελέσματα

$$\beta_1, \dots, \beta_N$$

για τις μετρήσεις του  $B$ . Τα αποτελέσματα αυτά είναι ιδιοτιμές των αντίστοιχων τελεστών  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$ .

Έχοντας συγκεντρώσει αυτά τα πειραματικά δείγματα, μπορούμε να υπολογίσουμε αριθμητικά τις μέσες τιμές και τις αβεβαιότητες των δύο μεγεθών. Για παράδειγμα, για το  $A$  έχουμε

$$\mu_A \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha_i$$

και

$$\sigma_A^2 \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\alpha_i - \mu_A)^2.$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή και τη διακύμανση του  $B$ .

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι οι μετρήσεις των  $A$  και  $B$  δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα στο ίδιο σύστημα. Τα δύο σύνολα αποτελεσμάτων προέρχονται από πανομοιότυπα πειραματικά αντίγραφα του συστήματος, τα οποία έχουν προετοιμαστεί όλα στην ίδια αρχική κατάσταση  $|\psi\rangle$ . Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να συγκρίνουμε τις στατιστικές ιδιότητες των αποτελεσμάτων των δύο διαφορετικών μετρήσεων.

Η σχέση αβεβαιότητας μας λέει ότι, για μια δεδομένη κβαντική κατάσταση, ο μεταθέτης  $[\hat{A}, \hat{B}]$  θέτει ένα κάτω όριο στο γινόμενο των αβεβαιοτήτων  $\sigma_A \sigma_B$ . Επομένως, όταν δύο τελεστές δεν αντιμετατίθενται, η κβαντική μηχανική μπορεί να επιβάλλει έναν περιορισμό στο πόσο μικρές μπορούν να είναι ταυτόχρονα οι αβεβαιότητες των αντίστοιχων μεγεθών.

Αξίζει να τονίσουμε ότι η αβεβαιότητα αυτή δεν αποτελεί απλώς ένα σφάλμα των πειραματικών μας οργάνων ή έλλειψη γνώσης σχετικά με την πραγματική τιμή του μεγέθους. Πρόκειται για τη στατιστική διασπορά

των αποτελεσμάτων που προκύπτει από την ίδια την κβαντική κατάσταση και τον τρόπο με τον οποίο πραγματοποιείται η μέτρηση.

Στο παρακάτω πλαίσιο δίνουμε την απόδειξη της σχέσης αβεβαιότητας. Επειδή έχει κάποια παραπάνω μαθηματικά, μπορείτε να την παραλείψετε, αν όμως σας ενδιαφέρει να είστε πιο διεξοδικοί μπορείτε να την ακολουθήσετε.

### Εμβάθυνση 2.3: Απόδειξη της σχέσης αβεβαιότητας

Ξεκινάμε ορίζοντας τους «κεντραρισμένους» τελεστές

$$\hat{C} = \hat{A} - \mu_A \hat{I} \quad , \quad \hat{D} = \hat{B} - \mu_B \hat{I},$$

όπου  $\hat{I}$  ο ταυτοτικός τελεστής. Αφαιρώντας απλώς μία σταθερά (τη μέση τιμή) από κάθε τελεστή, οι  $\hat{C}, \hat{D}$  παραμένουν Ερμιτιανοί,  $\hat{C}^T = \hat{C}$  και  $\hat{D}^T = \hat{D}$ . Ο μεταθέτης τους παραμένει επίσης ίδιος με αυτόν των αρχικών τελεστών: αναπτύσσοντας το γινόμενο,

$$\begin{aligned} [\hat{C}, \hat{D}] &= (\hat{A} - \mu_A \hat{I}) (\hat{B} - \mu_B \hat{I}) - (\hat{B} - \mu_B \hat{I}) (\hat{A} - \mu_A \hat{I}) \\ &= \hat{A}\hat{B} - \mu_B \hat{A} - \mu_A \hat{B} + \mu_A \mu_B \hat{I} - \hat{B}\hat{A} + \mu_B \hat{A} + \mu_A \hat{B} - \mu_A \mu_B \hat{I} \\ &= \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \\ &= [\hat{A}, \hat{B}], \end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη γραμμή όλοι οι όροι που περιέχουν τις σταθερές  $\mu_A, \mu_B$  αλληλοαναιρούνται ανά δύο, αφού μία σταθερά επί τον ταυτοτικό τελεστή μετατίθεται με οτιδήποτε. Με τον ορισμό αυτό, οι διακυμάνσεις γράφονται απλούστερα ως

$$\sigma_A^2 = \langle \psi | \hat{C}^2 | \psi \rangle \quad , \quad \sigma_B^2 = \langle \psi | \hat{D}^2 | \psi \rangle .$$

Θυμηθείτε από την ενότητα 1.25 ότι ένας Ερμιτιανός τελεστής  $\hat{E}$  μπορεί πάντα να «μετακινηθεί» από το ket στο bra ενός bracket χωρίς να αλλάξει,  $\langle \phi | \hat{E} | \chi \rangle = \langle \hat{E} \phi | \chi \rangle$ . Εφαρμόζοντάς το (αφού ο  $\hat{C}$  είναι Ερμιτιανός) στο  $\hat{C}^2 = \hat{C}\hat{C}$  παίρνουμε

$$\sigma_A^2 = \langle \psi | \hat{C}\hat{C} | \psi \rangle = \langle \hat{C}\psi | \hat{C}\psi \rangle = \left\| \hat{C} | \psi \rangle \right\|^2 ,$$

δηλαδή η διακύμανση  $\sigma_A^2$  είναι το τετράγωνο της νόρμας της κατάστασης  $\hat{C} | \psi \rangle$ , και ομοίως  $\sigma_B^2 = \left\| \hat{D} | \psi \rangle \right\|^2$ .

Θα χρειαστούμε τώρα μία θεμελιώδη ιδιότητα κάθε χώρου με εσωτερικό γινόμενο, την ανισότητα Cauchy-Schwarz, που πιθανότατα γνωρίζετε ήδη από τη Γραμμική Άλγεβρα: για οποιαδήποτε δύο καταστάσεις  $|\phi\rangle, |\chi\rangle$  ισχύει

$$\| |\phi\rangle \| \| |\chi\rangle \|^2 \geq | \langle \phi | \chi \rangle |^2 .$$

Εφαρμόζοντάς την για  $|\phi\rangle = \hat{C} | \psi \rangle$  και  $|\chi\rangle = \hat{D} | \psi \rangle$ , και χρησιμοποιώντας ξανά την ιδιότητα  $\hat{C}^T = \hat{C}$  για να «επιστρέψουμε» τον  $\hat{C}$  στο ket, παίρνουμε

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 = \left\| \hat{C} | \psi \rangle \right\|^2 \left\| \hat{D} | \psi \rangle \right\|^2 \geq \left| \langle \hat{C}\psi | \hat{D}\psi \rangle \right|^2 = \left| \langle \psi | \hat{C}\hat{D} | \psi \rangle \right|^2 .$$

Μένει να συνδέσουμε το δεξί μέλος με τον μεταθέτη  $[\hat{C}, \hat{D}]$ . Γράφουμε το γινόμενο  $\hat{C}\hat{D}$  ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού μέρους,

$$\hat{C}\hat{D} = \frac{1}{2} \underbrace{(\hat{C}\hat{D} + \hat{D}\hat{C})}_{\{\hat{C}, \hat{D}\}} + \frac{1}{2} \underbrace{(\hat{C}\hat{D} - \hat{D}\hat{C})}_{[\hat{C}, \hat{D}]},$$

όπου το  $\{\hat{C}, \hat{D}\}$  ονομάζεται *αντιμεταθέτης* (anticommutator) των  $\hat{C}, \hat{D}$ . Χρησιμοποιώντας ότι  $(\hat{X}\hat{Y})^T = \hat{Y}^T\hat{X}^T$  (όπως ακριβώς και για πίνακες) μαζί με  $\hat{C}^T = \hat{C}, \hat{D}^T = \hat{D}$ , βρίσκουμε εύκολα ότι ο αντιμεταθέτης είναι Ερμιτιανός ενώ ο μεταθέτης είναι αντι-Ερμιτιανός:

$$\{\hat{C}, \hat{D}\}^T = \{\hat{C}, \hat{D}\}, \quad [\hat{C}, \hat{D}]^T = -[\hat{C}, \hat{D}].$$

Η μέση τιμή ενός Ερμιτιανού τελεστή είναι πάντα πραγματικός αριθμός, όπως είδαμε στα προηγούμενα, οπότε το  $\langle\psi|\{\hat{C}, \hat{D}\}|\psi\rangle$  είναι πραγματικό. Αντίθετα, χρησιμοποιώντας τη γενική ιδιότητα μετακίνησης τελεστή που δείξαμε στην ενότητα 1.25, τη συζυγή συμμετρία του bracket (ενότητα 1.5) και την αντι-Ερμιτιανότητα του μεταθέτη, βρίσκουμε

$$\langle\psi|[\hat{C}, \hat{D}]|\psi\rangle^* = \langle[\hat{C}, \hat{D}]\psi|\psi\rangle = \langle\psi|[\hat{C}, \hat{D}]^T|\psi\rangle = -\langle\psi|[\hat{C}, \hat{D}]|\psi\rangle,$$

δηλαδή ο αριθμός  $\langle\psi|[\hat{C}, \hat{D}]|\psi\rangle$  ταυτίζεται με το αντίθετο του μιγαδικού συζυγή του και επομένως είναι καθαρά φανταστικός.

Γράφοντας λοιπόν  $\langle\psi|\hat{C}\hat{D}|\psi\rangle = x + jy$  με  $x, y$  πραγματικούς αριθμούς, από τα παραπάνω έχουμε

$$x = \frac{1}{2} \langle\psi|\{\hat{C}, \hat{D}\}|\psi\rangle, \quad jy = \frac{1}{2} \langle\psi|[\hat{C}, \hat{D}]|\psi\rangle,$$

οπότε

$$\left|\langle\psi|\hat{C}\hat{D}|\psi\rangle\right|^2 = x^2 + y^2 \geq y^2 = \left|\frac{1}{2} \langle\psi|[\hat{C}, \hat{D}]|\psi\rangle\right|^2 = \frac{1}{4} \left|\langle\psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle\right|^2,$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε ότι  $[\hat{C}, \hat{D}] = [\hat{A}, \hat{B}]$ . Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω καταλήγουμε τελικά στη σχέση αβεβαιότητας:

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left|\langle\psi|\hat{C}\hat{D}|\psi\rangle\right|^2 \geq \frac{1}{4} \left|\langle\psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle\right|^2.$$

### Παράδειγμα 2.8: Η σχέση αβεβαιότητας για το spin

Ας εξετάσουμε τη σχέση αβεβαιότητας για τις δύο συνιστώσες του spin ενός ηλεκτρονίου στους άξονες  $x$  και  $z$ . Οι αντίστοιχοι τελεστές είναι

$$\hat{H}_x = \frac{\hbar}{2} \hat{X}, \quad \hat{H}_z = \frac{\hbar}{2} \hat{Z}.$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα δείξαμε ότι  $[\mathbf{Z}, \mathbf{X}] = 2j\mathbf{Y}$  για τους αντίστοιχους πίνακες, άρα ισχύει η ίδια σχέση και για τους τελεστές,  $[\hat{Z}, \hat{X}] = 2j\hat{Y}$ . Λόγω της αντισυμμετρίας του μεταθέτη, δηλαδή της ιδιότητας  $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$ , προκύπτει ότι

$$[\hat{X}, \hat{Z}] = -[\hat{Z}, \hat{X}] = -2j\hat{Y}$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} [\hat{H}_x, \hat{H}_z] &= \frac{\hbar^2}{4} [\hat{X}, \hat{Z}] \\ &= -\frac{j\hbar^2}{2} \hat{Y} \\ &= -j\hbar \hat{H}_y. \end{aligned}$$

Η σχέση αβεβαιότητας δίνει επομένως

$$\sigma_{H_x}^2 \sigma_{H_z}^2 \geq \frac{1}{4} \left|\langle\psi|[\hat{H}_x, \hat{H}_z]|\psi\rangle\right|^2.$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω μεταθέτη, παίρνουμε

$$\sigma_{H_x}^2 \sigma_{H_z}^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \left|\langle\psi|\hat{H}_y|\psi\rangle\right|^2.$$

Ισοδύναμα,

$$\sigma_{H_x} \sigma_{H_z} \geq \frac{\hbar}{2} \left| \langle \psi | \hat{H}_y | \psi \rangle \right|$$

Ας δούμε τι σημαίνει αυτό για την κατάσταση

$$|\psi\rangle = | +y \rangle ,$$

δηλαδή την κατάσταση στην οποία το spin είναι θετικά προσανατολισμένο στον άξονα  $y$ . Για αυτή την κατάσταση ισχύει

$$\langle \psi | \hat{H}_y | \psi \rangle = \frac{\hbar}{2}.$$

Άρα

$$\sigma_{H_x} \sigma_{H_z} \geq \frac{\hbar^2}{4}.$$

Στην κατάσταση  $| +y \rangle$  οι μετρήσεις του  $H_x$  δίνουν με ίσες πιθανότητες τις τιμές

$$+\frac{\hbar}{2}, \quad -\frac{\hbar}{2},$$

οπότε

$$\sigma_{H_x} = \frac{\hbar}{2}.$$

Το ίδιο ισχύει και για το  $H_z$ :

$$\sigma_{H_z} = \frac{\hbar}{2}.$$

Επομένως

$$\sigma_{H_x} \sigma_{H_z} = \frac{\hbar^2}{4},$$

οπότε στην περίπτωση αυτή η σχέση αβεβαιότητας γίνεται ισότητα.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι η μη αντιμεταθετικότητα των δύο τελεστών περιορίζει το πόσο μικρές μπορούν να είναι ταυτόχρονα οι αβεβαιότητες των αντίστοιχων μεγεθών. Παρατηρούμε επίσης ότι το κάτω όριο εξαρτάται από την κατάσταση  $|\psi\rangle$ , μέσω της μέσης τιμής

$$\langle \psi | \hat{H}_y | \psi \rangle .$$

Η μη αντιμεταθετικότητα επομένως δεν σημαίνει ότι οι δύο αβεβαιότητες είναι υποχρεωτικά μεγάλες σε κάθε κατάσταση.

## 2.7 Τι ακριβώς είναι το $|\psi\rangle$ ;

Να ένα πολύ ενδιαφέρον ερώτημα. Μιλάμε για το  $|\psi\rangle$ , αλλά τι ακριβώς είναι αυτό; Έχει πραγματική υπόσταση; Είναι κάτι που “υπάρχει” στο φυσικό σύστημα ή είναι απλώς ένα μαθηματικό εργαλείο που χρησιμοποιούμε για να το περιγράψουμε;

Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα εξαρτάται, σε μεγάλο βαθμό, από το ποιον ρωτάμε. Και εδώ αρχίζουν τα ενδιαφέροντα.

**Ο μαθηματικός.** Ο μαθηματικός πιθανότατα θα σηκώσει τους ώμους και θα πει: «Γιατί πρέπει να υπάρχει κάτι περισσότερο; Το  $|\psi\rangle$  είναι ένα διάνυσμα σε έναν μιγαδικό διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο». Και από τη δική του οπτική έχει απόλυτο δίκιο.

Για τον μαθηματικό, το  $|\psi\rangle$  είναι ένα μαθηματικό αντικείμενο. Αν ανήκει στον χώρο Hilbert, τότε μπορούμε να το προσθέσουμε με άλλα διανύσματα, να το πολλαπλασιάσουμε με μιγαδικούς αριθμούς, να υπολογί-

σουμε εσωτερικά γινόμενα και να εφαρμόσουμε πάνω του γραμμικούς τελεστές. Το ότι το διάνυσμα αυτό χρησιμοποιείται στη φυσική για να περιγράψει ένα ηλεκτρόνιο δεν αλλάζει τη μαθηματική του φύση.

Με άλλα λόγια, ο μαθηματικός δεν χρειάζεται να αποφασίσει αν το  $|\psi\rangle$  “υπάρχει πραγματικά”. Για εκείνον αρκεί ότι είναι καλά ορισμένο και ότι οι πράξεις που κάνουμε πάνω του είναι μαθηματικά συνεπείς.

**Ο πληροφορικός.** Ο πληροφορικός μπορεί να το δει με έναν κάπως διαφορετικό τρόπο. Για εκείνον το  $|\psi\rangle$  είναι, μεταξύ άλλων, η κατάσταση στην οποία βρίσκεται ένα κβαντικό σύστημα και περιέχει όλη την πληροφορία που χρειαζόμαστε για να προβλέψουμε τα αποτελέσματα των μετρήσεων.

Ένα qubit, για παράδειγμα, γράφεται ως

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

με

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Από την οπτική της κβαντικής πληροφορίας, αυτό που έχει ιδιαίτερη σημασία δεν είναι τόσο το αν το  $|\psi\rangle$  είναι “πραγματικό πράγμα”, αλλά το τι μπορούμε να κάνουμε με αυτό. Μπορούμε να εφαρμόσουμε κβαντικές πύλες, να το εμπλέξουμε με άλλα qubits, να το μετρήσουμε και να εξαγάγουμε πληροφορία από αυτό.

Ίσως λοιπόν ο πληροφορικός να έλεγε:

«Δεν ξέρω αν το  $|\psi\rangle$  υπάρχει. Ξέρω όμως ότι αν το χειριστώ σωστά, το κύκλωμά μου θα λειτουργήσει».

**Ο φυσικός.** Εδώ τα πράγματα γίνονται πιο ενδιαφέροντα. Για τον φυσικό, το  $|\psi\rangle$  δεν είναι απλώς ένα οποιοδήποτε διάνυσμα. Είναι το μαθηματικό αντικείμενο που χρησιμοποιεί η κβαντική θεωρία για να περιγράψει την κατάσταση ενός φυσικού συστήματος.

Και εδώ πρέπει να είμαστε προσεκτικοί. Δεν είναι σωστό να φανταζόμαστε το  $|\psi\rangle$  σαν ένα μικρό “σύννεφο” που ταξιδεύει μαζί με το ηλεκτρόνιο ή σαν ένα φυσικό αντικείμενο που μπορούμε να φωτογραφίσουμε. Το  $|\psi\rangle$  μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τις πιθανότητες των διαφορετικών αποτελεσμάτων που μπορούμε να παρατηρήσουμε.

Για παράδειγμα, αν

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

τότε η θεωρία μάς λέει ότι, όταν μετρήσουμε στη συγκεκριμένη βάση, οι πιθανότητες των αποτελεσμάτων 0 και 1 είναι  $|\alpha|^2$  και  $|\beta|^2$ , αντίστοιχα. Το ερώτημα όμως παραμένει: περιγράφει το  $|\psi\rangle$  κάτι που υπάρχει αντικειμενικά εκεί έξω ή απλώς την πληροφορία που έχουμε για το σύστημα;

Και εδώ ο φυσικός αρχίζει να κοιτάζει προς τον φιλόσοφο.

**Ο φιλόσοφος.** Ο φιλόσοφος πιθανότατα θα χαμογελάσει. Το ερώτημα που μόλις κάναμε είναι ακριβώς το είδος ερωτήματος που μπορεί να κρατήσει μια ολόκληρη φιλοσοφική συζήτηση ζωντανή για αρκετούς αιώνες.

Υπάρχουν διαφορετικές ερμηνείες της κβαντικής μηχανικής και δεν συμφωνούν όλες στο τι ακριβώς αντιπροσωπεύει η κυματοσυνάρτηση. Σε κάποιες ερμηνείες το  $|\psi\rangle$  αντιμετωπίζεται ως μέρος της αντικειμενικής φυσικής πραγματικότητας. Σε άλλες συνδέεται περισσότερο με την πληροφορία ή τις προσδοκίες ενός παρατηρητή για τα αποτελέσματα των μετρήσεων. Υπάρχουν επίσης ερμηνείες στις οποίες η κυματοσυνάρτηση αποτελεί στοιχείο μιας ευρύτερης περιγραφής της πραγματικότητας, με διαφορετικό τρόπο από τις παραπάνω.

Έτσι, στο ερώτημα

«Τι είναι πραγματικά το  $|\psi\rangle$ ;»

η κβαντική μηχανική μάς δίνει εξαιρετικά ακριβείς κανόνες για το πώς συμπεριφέρεται, αλλά δεν υπάρχει μία καθολικά αποδεκτή απάντηση για το τι “είναι”. Και ίσως αυτή να είναι μία από τις πιο παράξενες πλευρές της κβαντικής μηχανικής: μπορούμε να προβλέψουμε με εκπληκτική ακρίβεια τι θα συμβεί σε ένα πείραμα, ενώ ακόμη συζητάμε για το τι ακριβώς πρέπει να θεωρήσουμε ότι περιγράφει η κυματοσυνάρτηση. Για τις ανάγκες της κβαντικής υπολογιστικής, πάντως, μπορούμε να κάνουμε κάτι πολύ πιο πρακτικό. Δεν χρειάζεται να λύσουμε το φιλοσοφικό πρόβλημα για να χρησιμοποιήσουμε το  $|\psi\rangle$ . Μας αρκεί να γνωρίζουμε τους μαθηματικούς κανόνες που το διέπουν και τον τρόπο με τον οποίο συνδέεται με τα αποτελέσματα των μετρήσεων.

Το αν το  $|\psi\rangle$  είναι ‘εκεί έξω’, ‘στο μυαλό μας’ ή κάπου ανάμεσα έχει απασχολήσει πάντως πολλούς στο παρελθόν. Ας δούμε πρώτα ένα βασικό προβληματισμό που έχει να κάνει με την κβαντική μέτρηση

## 2.8 Το πρόβλημα της κβαντικής μέτρησης

Ας δούμε όμως από πού προκύπτει όλη αυτή η συζήτηση. Ένα από τα βαθύτερα προβλήματα της κβαντικής μηχανικής είναι το λεγόμενο **πρόβλημα της κβαντικής μέτρησης**. Μέχρι τώρα έχουμε δει ότι η εξέλιξη ενός κβαντικού συστήματος είναι μοναδιαία. Αν ένα qubit βρίσκεται στην κατάσταση

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle,$$

η εξέλιξή του πραγματοποιείται σύμφωνα με έναν μοναδιαίο τελεστή  $\hat{U}$ :

$$|\psi'\rangle = \hat{U} |\psi\rangle.$$

Αυτή η εξέλιξη είναι συνεχής και πλήρως καθορισμένη από την αρχική κατάσταση. Τι συμβαίνει όμως όταν πραγματοποιήσουμε μία μέτρηση; Αν μετρήσουμε το qubit στην υπολογιστική βάση, η κβαντική μηχανική μάς λέει ότι θα πάρουμε είτε το αποτέλεσμα 0 είτε το αποτέλεσμα 1, με πιθανότητες

$$P(0) = |\alpha|^2, \quad P(1) = |\beta|^2.$$

Μετά τη μέτρηση, η κατάσταση του συστήματος δεν παραμένει γενικά η αρχική

$$\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle,$$

αλλά βρίσκεται στην κατάσταση που αντιστοιχεί στο αποτέλεσμα που παρατηρήσαμε:

$$|\psi\rangle \longrightarrow \begin{cases} |0\rangle, & \text{με πιθανότητα } |\alpha|^2, \\ |1\rangle, & \text{με πιθανότητα } |\beta|^2. \end{cases}$$

Αυτό ονομάζεται **κατάρρευση της κυματοσυνάρτησης**. Και εδώ εμφανίζεται κάτι αρκετά παράξενο. Από τη μία πλευρά, η κβαντική κατάσταση εξελίσσεται σύμφωνα με έναν μοναδιαίο και αιτιοκρατικό νόμο. Από την άλλη, όταν πραγματοποιούμε μια μέτρηση, φαίνεται να συμβαίνει κάτι εντελώς διαφορετικό: από μία υπέρθεση δυνατοτήτων καταλήγουμε σε ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα. Το ερώτημα λοιπόν είναι:

*Τι ακριβώς συμβαίνει κατά τη μέτρηση;*

Είναι η κατάρρευση μία πραγματική φυσική διαδικασία; Αν ναι, γιατί δεν περιγράφεται από τη μοναδιαία εξέλιξη; Πότε ακριβώς συμβαίνει; Και τι είναι αυτό που ξεχωρίζει έναν “παρατηρητή” ή μία “μέτρηση” από οποιαδήποτε άλλη φυσική αλληλεπίδραση; Η κβαντική μηχανική δίνει εξαιρετικά ακριβείς κανόνες για να

υπολογίσουμε τις πιθανότητες των αποτελεσμάτων. Το πώς ακριβώς πρέπει να κατανοήσουμε τη σχέση ανάμεσα στη μοναδιαία εξέλιξη και την κατάρρευση, όμως, βρίσκεται στην καρδιά του προβλήματος της κβαντικής μέτρησης. Και κάπου εδώ επιστρέφουμε στο αρχικό μας ερώτημα: *τι ακριβώς είναι το  $|\psi\rangle$* ; Οι διαφορετικές απαντήσεις σε αυτό το ερώτημα οδηγούν, μεταξύ άλλων, και στις διαφορετικές ερμηνείες της κβαντικής μηχανικής. Έχει ένα ενδιαφέρον να δούμε τι κατά καιρούς έχει υποστηριχθεί.

#### Εμβάθυνση 2.4: Πώς ερμηνεύεται η κυματοσυνάρτηση;

Δεν υπάρχει μία και μοναδική απάντηση στο ερώτημα τι ακριβώς αντιπροσωπεύει η κυματοσυνάρτηση  $|\psi\rangle$ . Οι διαφορετικές ερμηνείες της κβαντικής μηχανικής συμφωνούν στους υπολογισμούς και στις πειραματικές προβλέψεις, αλλά διαφέρουν ως προς το τι θεωρούν ότι βρίσκεται “πίσω” από αυτούς τους υπολογισμούς.

- **Ερμηνεία της Κοπεγχάγης:** Η  $|\psi\rangle$  αποτελεί την κβαντική περιγραφή της κατάστασης ενός συστήματος και μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τις πιθανότητες των αποτελεσμάτων μιας μέτρησης. Δεν είναι απαραίτητο να θεωρήσουμε ότι η κυματοσυνάρτηση αντιστοιχεί σε κάποιο κλασικό φυσικό αντικείμενο που υπάρχει ανεξάρτητα από τη μέτρηση.
- **Πολλοί Κόσμοι (Many-Worlds):** Η κυματοσυνάρτηση θεωρείται μέρος της αντικειμενικής φυσικής πραγματικότητας και εξελίσσεται πάντοτε μοναδιαία. Δεν υπάρχει θεμελιώδης “κατάρρευση” της κυματοσυνάρτησης κατά τη μέτρηση· αντίθετα, οι διαφορετικές δυνατότητες που περιέχονται σε αυτήν αντιστοιχούν σε διαφορετικούς κλάδους της πραγματικότητας.
- **Ερμηνείες τύπου de Broglie–Bohm:** Η κυματοσυνάρτηση θεωρείται πραγματικό φυσικό αντικείμενο που καθοδηγεί την εξέλιξη του συστήματος. Στην περίπτωση ενός σωματιδίου, για παράδειγμα, υπάρχει επιπλέον μια σαφώς καθορισμένη θέση του σωματιδίου, ενώ η  $|\psi\rangle$  καθορίζει, μεταξύ άλλων, τον τρόπο με τον οποίο αυτή εξελίσσεται.
- **QBism και άλλες πληροφοριακές ερμηνείες:** Η  $|\psi\rangle$  δεν θεωρείται απαραίτητα ιδιότητα που διαθέτει αντικειμενικά το φυσικό σύστημα. Αντίθετα, μπορεί να ερμηνευθεί ως έκφραση της πληροφορίας, των προσδοκιών ή των πιθανοτήτων που αποδίδει ένας παρατηρητής στα πιθανά αποτελέσματα μιας μέτρησης.

Έτσι, στο ερώτημα

«Είναι η  $|\psi\rangle$  πραγματική;»

οι διαφορετικές ερμηνείες δίνουν διαφορετικές απαντήσεις. Και αυτό είναι ίσως το πιο ενδιαφέρον σημείο: **μπορούμε να συμφωνούμε απόλυτα στους υπολογισμούς και στις πειραματικές προβλέψεις, αλλά να διαφωνούμε για το τι μας λένε αυτοί οι υπολογισμοί για τη φύση της πραγματικότητας.**

## 2.9 Το τανυστικό γινόμενο για τις καταστάσεις

Μέχρι τώρα έχουμε ασχοληθεί κυρίως με ένα qubit, ωστόσο έχουμε δει και παραδείγματα συστημάτων με περισσότερα qubits. Το ερώτημα όμως που δεν έχουμε απαντήσει είναι το εξής: Αν το πρώτο qubit βρίσκεται στην κατάσταση  $|\psi\rangle$  και το δεύτερο στην κατάσταση  $|\phi\rangle$ , υπάρχει τρόπος να κατασκευάσουμε την κατάσταση του συνολικού συστήματος που αποτελείται από τα δύο qubits; Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε το **τανυστικό γινόμενο**, το οποίο συμβολίζουμε με  $\otimes$ . Η κατάσταση των δύο qubits γράφεται τότε

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$$

Συχνά, για συντομία, παραλείπουμε το σύμβολο  $\otimes$  και γράφουμε απλώς  $|\psi\rangle |\phi\rangle$  ή ακόμα και  $|\psi\phi\rangle$ . Είδαμε ήδη ένα τέτοιο παράδειγμα στην ενότητα 2.2 όπου είχαμε καταστάσεις της μορφής  $|0\rangle |0\rangle$ ,  $|0\rangle |1\rangle$  κτλ που μάλιστα τις συμβολίζαμε και ως  $|00\rangle$ ,  $|01\rangle$ . Γενικότερα ας υποθέσουμε ότι το πρώτο qubit βρίσκεται στην κατάσταση:

$$|\psi\rangle = a |0\rangle + b |1\rangle ,$$

ενώ το δεύτερο στην κατάσταση:

$$|\phi\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle.$$

Τα δύο αυτά qubit θεωρούμε ότι δεν επιδρούν το ένα με το άλλο. Επομένως μπορεί κανείς να μετρήσει το πρώτο qubit και θα βρει ότι είναι στην κατάσταση  $|0\rangle$  με πιθανότητα  $|a|^2$  και στο  $|1\rangle$  με πιθανότητα  $|b|^2$ . Ομοίως μετρώντας το δεύτερο qubit θα πρέπει να έχουμε ότι είναι στην κατάσταση  $|0\rangle$  με πιθανότητα  $|c|^2$  και στο  $|1\rangle$  με πιθανότητα  $|d|^2$ . Άρα εάν με  $\Pr\{c_1 = b_1, c_2 = b_2\}$  συμβολίσουμε την πιθανότητα μετά την μέτρηση να πάρουμε  $|b_1\rangle |b_2\rangle$  θα έχουμε:

$$\Pr\{c_1 = 0, c_2 = 0\} = |a|^2|c|^2 = |ac|^2 \quad \text{πιθανότητα να έχουμε } |00\rangle$$

$$\Pr\{c_1 = 0, c_2 = 1\} = |a|^2|d|^2 = |ad|^2 \quad \text{πιθανότητα να έχουμε } |01\rangle$$

$$\Pr\{c_1 = 1, c_2 = 0\} = |b|^2|c|^2 = |bc|^2 \quad \text{πιθανότητα να έχουμε } |10\rangle$$

$$\Pr\{c_1 = 1, c_2 = 1\} = |b|^2|d|^2 = |bd|^2 \quad \text{πιθανότητα να έχουμε } |11\rangle$$

Φαίνεται λοιπόν ότι θα μπορούσαμε να περιγράψουμε την συνολική κατάσταση του συστήματος με μία κυματοσυνάρτηση  $|\Psi\rangle$ :

$$|\Psi\rangle = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$$

Προσέξτε κάτι πολύ ενδιαφέρον. Η πιθανότητα να βρούμε το πρώτο qubit σε μία κατάσταση  $\Pr\{c_1 = b_1, c_2 = b_2\}$  γράφεται πάντα σε αυτή την περίπτωση:

$$\Pr\{c_1 = b_1, c_2 = b_2\} = \Pr\{c_1 = b_1\} \Pr\{c_2 = b_2\}$$

*Δηλαδή τα δύο αυτά qubit είναι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο!*

Ενας εύκολος τρόπος να παράγουμε το  $|\Psi\rangle$  είναι να θεωρήσουμε ότι πολλαπλασιάζουμε τους όρους του  $|\psi\rangle$  και του  $|\phi\rangle$  και ομαδοποιούμε ανάλογα.

$$\begin{aligned} |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle &= (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) = \\ &= ac|0\rangle \otimes |0\rangle + ad|0\rangle \otimes |1\rangle + bc|1\rangle \otimes |0\rangle + bd|1\rangle \otimes |1\rangle = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle \end{aligned}$$

Στην παραπάνω σχέση θεωρήσαμε ότι το τανυστικό γινόμενο έχει την επιμεριστική ιδιότητα όπως το σύνηθες γινόμενο και επομένως μπορούμε να διώξουμε τις παρενθέσεις. Μπορούμε να εμπνευστούμε από την παραπάνω σχέση και να ορίσουμε το τανυστικό γινόμενο στην γενικότερη περίπτωση όπου έχουμε δύο καταστάσεις  $|\psi\rangle$  και  $|\phi\rangle$  για δύο ανεξάρτητα συστήματα, οι οποίες γράφονται:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{i=1}^N a_i |\psi_i\rangle \\ |\phi\rangle &= \sum_{i=1}^M b_i |\phi_i\rangle \end{aligned}$$

όπου τα  $|\psi_i\rangle$  και  $|\phi_i\rangle$  είναι ορθοκανονικές βάσεις για το κάθε σύστημα ξεχωριστά. Θεωρούμε ότι έχουμε  $N$  ιδιοδιανύσματα βάσης  $|\psi_i\rangle$  για το πρώτο σύστημα και  $M$  ιδιοδιανύσματα βάσης  $|\phi_i\rangle$  για το δεύτερο σύστημα. Το τανυστικό γινόμενο σε αυτή την περίπτωση θα εφαρμοστεί ανάλογα:

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = \left\{ \sum_{p=1}^N a_p |\psi_p\rangle \right\} \otimes \left\{ \sum_{q=1}^M b_q |\phi_q\rangle \right\} = \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^M a_p b_q |\psi_p\rangle \otimes |\phi_q\rangle$$

### Παράδειγμα 2.9: Τανυστικό γινόμενο $|+y\rangle \otimes |+x\rangle$

Ας υπολογίσουμε το τανυστικό γινόμενο  $|+y\rangle \otimes |+x\rangle$  όπου

$$|+y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{j}{\sqrt{2}}|1\rangle, \quad |+x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle.$$

Πολλαπλασιάζουμε τους όρους των δύο καταστάσεων και ομαδοποιούμε όπως κάναμε παραπάνω:

$$\begin{aligned} |+y\rangle \otimes |+x\rangle &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{j}{\sqrt{2}}|1\rangle \right) \otimes \left( \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \right) = \\ &= \frac{1}{2}|0\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{2}|0\rangle \otimes |1\rangle + \frac{j}{2}|1\rangle \otimes |0\rangle + \frac{j}{2}|1\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{j}{2}|10\rangle + \frac{j}{2}|11\rangle \end{aligned}$$

Επομένως

$$|+y\rangle \otimes |+x\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + j|10\rangle + j|11\rangle).$$

Ας γυρίσουμε τώρα στο σύστημα με τα 2 qubit. Στις κλασικές μνήμες έχουμε συνηθίσει τα bit να μπορούν να διαβαστούν/γραφτούν ανεξάρτητα μεταξύ τους. Συμβαίνει το ίδιο και με τα qubits; Η κατάσταση του πρώτου θα είναι ανεξάρτητη από του δεύτερου; Θα έχουμε πάντα δηλαδή

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$$

όπου  $|\Psi\rangle$  είναι η συνολική κατάσταση του συστήματος,  $|\psi\rangle$  και  $|\phi\rangle$  είναι η κατάσταση των επιμέρους qubit. Επομένως θα είχαμε όπως είδαμε και πιο πριν:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle,$$

$$|\phi\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle.$$

$$|\Psi\rangle = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$$

Ας δούμε ένα παράδειγμα κατάστασης που δεν πληρεί αυτή την ιδιότητα, παρακάτω.

### Παράδειγμα 2.10: Η κατάσταση Bell

Ας θεωρήσουμε την κατάσταση:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

Αν η κατάσταση μπορούσε να γραφτεί ως:

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$$

τότε θα είχαμε:

$$|\Psi\rangle = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$$

οπότε:

$$ac = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad ad = 0$$

$$bc = 0, \quad bd = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι το  $a$  ή το  $d$  πρέπει να είναι μηδέν. Αλλά αν το  $a$  είναι μηδέν, θα πρέπει και  $ac = 0$  ενώ αν το  $d$  είναι μηδέν θα πρέπει  $bd = 0$ . Ούτε το ένα ισχύει ούτε το άλλο. Συμπέρασμα: Δεν μπορούμε να γράψουμε την  $|\Psi\rangle$  ως εξής:

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$$

Επομένως οι κβαντικές καταστάσεις των 2 qubit χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

- Σε καταστάσεις που θα τις ονομάζουμε *διαχωρίσιμες (separable)* όπου γράφονται ως τανυστικό γινόμενο δύο καταστάσεων ενός qubit,

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$$

- Σε καταστάσεις που θα τις ονομάζουμε *διεμπλεγμένες (entangled)* όπου δεν μπορούν να γραφτούν ως τανυστικό γινόμενο καταστάσεων ενός qubit,

$$|\Psi\rangle \neq |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$$

Το φαινόμενο κατά το οποίο δύο (ή περισσότερα) qubit βρίσκονται σε μία τέτοια κοινή, διεμπλεγμένη κατάσταση, η οποία δεν μπορεί να περιγραφεί αναλύοντάς την στα επιμέρους qubit ξεχωριστά, ονομάζεται *κβαντική διεμπλοκή (quantum entanglement)*. Πρόκειται για ένα από τα πιο χαρακτηριστικά φαινόμενα της κβαντικής θεωρίας, χωρίς κανένα κλασικό ανάλογο, και θα το συναντήσουμε αρκετές φορές στη συνέχεια.

Πριν προχωρήσουμε, αξίζει να δούμε πώς υπολογίζεται το εσωτερικό γινόμενο ανάμεσα σε δύο καταστάσεις που προκύπτουν από τανυστικό γινόμενο, αφού θα μας χρειαστεί συνεχώς στη συνέχεια. Μας ενδιαφέρουν δηλαδή γινόμενα της μορφής  $\langle \phi_1 \otimes \phi_2 | \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle$ , όπου τα  $|\phi_1\rangle, |\psi_1\rangle$  είναι καταστάσεις του πρώτου qubit και τα  $|\phi_2\rangle, |\psi_2\rangle$  καταστάσεις του δεύτερου.

Ας το δούμε σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Έστω

$$|\phi_1\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad , \quad |\phi_2\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle$$

$$|\psi_1\rangle = a'|0\rangle + b'|1\rangle \quad , \quad |\psi_2\rangle = c'|0\rangle + d'|1\rangle .$$

Όπως είδαμε παραπάνω, τα αντίστοιχα τανυστικά γινόμενα γράφονται

$$|\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle ,$$

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = a'c'|00\rangle + a'd'|01\rangle + b'c'|10\rangle + b'd'|11\rangle .$$

Εφόσον τα  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$  αποτελούν ορθοκανονική βάση, το εσωτερικό τους γινόμενο υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας τους αντίστοιχους συντελεστές (τον έναν συζυγή) και αθροίζοντας:

$$\langle \phi_1 \otimes \phi_2 | \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle = (ac)^*(a'c') + (ad)^*(a'd') + (bc)^*(b'c') + (bd)^*(b'd') .$$

Ομαδοποιώντας κατάλληλα τους όρους,

$$\langle \phi_1 \otimes \phi_2 | \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle = a^*a' (c^*c' + d^*d') + b^*b' (c^*c' + d^*d') = (a^*a' + b^*b') (c^*c' + d^*d') .$$

Όμως  $a^*a' + b^*b' = \langle \phi_1 | \psi_1 \rangle$  και  $c^*c' + d^*d' = \langle \phi_2 | \psi_2 \rangle$ , οπότε καταλήγουμε στη σχέση

$$\langle \phi_1 \otimes \phi_2 | \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle = \langle \phi_1 | \psi_1 \rangle \langle \phi_2 | \psi_2 \rangle .$$

Δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο δύο διαχωρίσιμων καταστάσεων ισούται με το γινόμενο των επιμέρους εσωτερικών γινομένων. Αν και το δείξαμε εδώ για δύο qubits, το ίδιο ακριβώς επιχείρημα —εφαρμοσμένο στο γενικό ανάπτυγμα σε βάσεις που είδαμε παραπάνω— δείχνει ότι η σχέση ισχύει για οποιαδήποτε δύο κβαντικά συστήματα, ανεξάρτητα από τη διάστασή τους.

Η σχέση αυτή επιβεβαιώνει κάτι που έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει σιωπηρά: αν τα  $|\phi_1\rangle, |\psi_1\rangle$  ανήκουν σε μία ορθοκανονική βάση του πρώτου qubit και τα  $|\phi_2\rangle, |\psi_2\rangle$  σε μία ορθοκανονική βάση του δεύτερου, τότε το  $|\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$  είναι κανονικοποιημένο, αφού  $\langle \phi_1 \otimes \phi_2 | \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle = \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle = 1$ , ενώ είναι ορθογώνιο σε κάθε  $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$  με  $|\psi_1\rangle \neq |\phi_1\rangle$  ή  $|\psi_2\rangle \neq |\phi_2\rangle$ , αφού τότε τουλάχιστον ένα από τα  $\langle \phi_1 | \psi_1 \rangle, \langle \phi_2 | \psi_2 \rangle$  μηδενίζεται. Με άλλα λόγια, καταστάσεις όπως τα  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ , που προκύπτουν ως τανυστικά γινόμενα στοιχείων μίας ορθοκανονικής βάσης του κάθε qubit, σχηματίζουν κι αυτές ορθοκανονική βάση για το σύστημα των δύο qubits.

### Παράδειγμα 2.11: Εσωτερικό γινόμενο τανυστικών καταστάσεων

Ας υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο  $\langle \phi_1 \otimes \phi_2 | \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle$  για

$$|\phi_1\rangle = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle, \quad |\phi_2\rangle = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{j}{\sqrt{2}} |1\rangle,$$

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle, \quad |\psi_2\rangle = |1\rangle.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση που μόλις αποδείξαμε,

$$\langle \phi_1 \otimes \phi_2 | \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle = \langle \phi_1 | \psi_1 \rangle \langle \phi_2 | \psi_2 \rangle = \langle + | 0 \rangle \langle + | 1 \rangle.$$

Από τον ορισμό των  $|+\rangle$  και  $|+\rangle$  έχουμε  $\langle + | = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0 | + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1 |$  και  $\langle + | = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0 | - \frac{j}{\sqrt{2}} \langle 1 |$  (θυμηθείτε ότι στο bra παίρνουμε μιγαδικό συζυγή των συντελεστών), οπότε

$$\langle + | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle + | 1 \rangle = -\frac{j}{\sqrt{2}}.$$

Άρα

$$\langle \phi_1 \otimes \phi_2 | \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left( -\frac{j}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{j}{2}.$$

Ας επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα υπολογίζοντας απευθείας τα δύο τανυστικά γινόμενα. Πολλαπλασιάζοντας τους όρους όπως στα προηγούμενα παραδείγματα,

$$|\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle = \frac{1}{2} (|00\rangle + j|01\rangle + |10\rangle + j|11\rangle),$$

ενώ

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle.$$

Εφόσον τα  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$  είναι ορθοκανονικά, το εσωτερικό γινόμενο προκύπτει απλά από τον (συζυγή του) συντελεστή του  $|01\rangle$  στο πρώτο διάνυσμα:

$$\langle \phi_1 \otimes \phi_2 | \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle = \left( \frac{j}{2} \right)^* = -\frac{j}{2},$$

ακριβώς όπως βρήκαμε και με τη γενική σχέση.

## 2.10 Τανυστικό γινόμενο τελεστών

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε δύο qubit τα οποία περιγράφονται από μία διαχωρίσιμη κατάσταση,

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$$

Είδαμε στα προηγούμενα ότι τα qubit αυτά συμπεριφέρονται επί της ουσίας ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι εφαρμόζουμε έναν μοναδιαίο τελεστή  $\hat{U}_1$  στο πρώτο και έναν μοναδιαίο τελεστή  $\hat{U}_2$  στο δεύτερο. Η τελική κατάσταση  $|\Phi\rangle$  θα είναι επομένως,

$$|\Psi_{\text{out}}\rangle = \hat{U}_1 |\psi\rangle \otimes \hat{U}_2 |\phi\rangle$$

Ορίζουμε το *τανυστικό γινόμενο των τελεστών*  $\hat{U}_1 \otimes \hat{U}_2$  τον τελεστή  $\hat{U}$  τον οποίο συμβολίζουμε,

$$\hat{U} = \hat{U}_1 \otimes \hat{U}_2$$

έτσι ώστε σε κάθε διαχωρίσιμη κατάσταση  $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$  να δρα ως εξής:

$$\hat{U} |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = \hat{U}_1 |\psi\rangle \otimes \hat{U}_2 |\phi\rangle$$

Έχει ένα ενδιαφέρον πως περιγράφεται ο τελεστής αυτός με την μορφή πίνακα. Αρχικά ας επιλέξουμε για ιδιοκαταστάσεις βάσεις  $|x_k\rangle$  για το πρώτο qubit και  $|y_k\rangle$  για το δεύτερο κατά την συνήθη μας πρακτική:

$$\begin{aligned} |x_1\rangle &= |0\rangle, & |x_2\rangle &= |1\rangle \\ |y_1\rangle &= |0\rangle, & |y_2\rangle &= |1\rangle \end{aligned}$$

Τότε μπορούμε να επιλέξουμε την βάση για το συνολικό σύστημα των 2 qubit ως εξής:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= |00\rangle = |x_1\rangle \otimes |y_1\rangle \\ |\psi_2\rangle &= |01\rangle = |x_1\rangle \otimes |y_2\rangle \\ |\psi_3\rangle &= |10\rangle = |x_2\rangle \otimes |y_1\rangle \\ |\psi_4\rangle &= |11\rangle = |x_2\rangle \otimes |y_2\rangle \end{aligned}$$

Επομένως σε κάθε  $|\psi_i\rangle$  με τον ακέραιο  $i$  από το 1 έως το 4 έχουμε αναθέσει την κατάσταση  $|x_{i_1}\rangle \otimes |y_{i_2}\rangle$

$$\begin{aligned} i = 1 &\rightarrow i_1 = 1, i_2 = 1 \\ i = 2 &\rightarrow i_1 = 1, i_2 = 2 \\ i = 3 &\rightarrow i_1 = 2, i_2 = 1 \\ i = 4 &\rightarrow i_1 = 2, i_2 = 2 \end{aligned}$$

τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία του πίνακα  $U$  που περιγράφει τον  $\hat{U}$  ως εξής:

$$U_{pq} = \langle \psi_p | \hat{U} | \psi_q \rangle$$

Αν με την παραπάνω λογική και στους ακέραιους  $p$  και  $q$  αντιστοιχούν τα  $p_1, p_2$  και  $q_1, q_2$  θα έχουμε:

$$U_{pq} = \langle x_{p_1} | \otimes \langle y_{p_2} | \hat{U}_1 \otimes \hat{U}_2 | x_{q_1} \rangle \otimes | y_{q_2} \rangle$$

Όμως όπως είπαμε και παραπάνω:

$$\hat{U}_1 \otimes \hat{U}_2 | x_{q_1} \rangle \otimes | y_{q_2} \rangle = \hat{U}_1 | x_{q_1} \rangle \otimes \hat{U}_2 | y_{q_2} \rangle$$

άρα:

$$U_{pq} = \langle x_{p_1} | \hat{U}_1 | x_{q_1} \rangle \langle y_{p_2} | \hat{U}_2 | y_{q_2} \rangle$$

Η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι τα στοιχεία του πίνακα  $U$  προκύπτουν ως γινόμενο των στοιχείων των επιμέρους πινάκων  $U_1, U_2$  που περιγράφουν τους τελεστές  $\hat{U}_1$  και  $\hat{U}_2$ .

Ας δούμε σχηματικά τι σημαίνει αυτό. Έστω ότι οι πίνακες  $U_1$  και  $U_2$  έχουν στοιχεία

$$U_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}.$$

Θυμηθείτε ότι σε κάθε δείκτη  $p$  (ή  $q$ ) από το 1 έως το 4 αντιστοιχεί ένα ζευγάρι  $(p_1, p_2)$  (ή  $(q_1, q_2)$ ) σύμφωνα με τον πίνακα αντιστοιχίας που είδαμε παραπάνω: ο δείκτης  $p_1$  (ή  $q_1$ ) μας λέει ποιά γραμμή (ή στήλη) του  $U_1$  πρέπει να χρησιμοποιήσουμε, ενώ ο  $p_2$  (ή  $q_2$ ) ποιά γραμμή (ή στήλη) του  $U_2$ . Αντικαθιστώντας λοιπόν στη σχέση  $U_{pq} = \alpha_{p_1 q_1} \beta_{p_2 q_2}$  όλους τους συνδυασμούς  $p, q = 1, \dots, 4$  καταλήγουμε σε έναν  $4 \times 4$  πίνακα  $U$  που μπορεί να γραφτεί σε μορφή  $2 \times 2$  «μπλοκ»: κάθε στοιχείο  $\alpha_{p_1 q_1}$  του  $U_1$  αντικαθίσταται από ολόκληρο τον πίνακα  $U_2$  πολλαπλασιασμένο επί  $\alpha_{p_1 q_1}$ ,

$$U = U_1 \otimes U_2 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} U_2 & \alpha_{12} U_2 \\ \alpha_{21} U_2 & \alpha_{22} U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \beta_{11} & \alpha_{11} \beta_{12} & \alpha_{12} \beta_{11} & \alpha_{12} \beta_{12} \\ \alpha_{11} \beta_{21} & \alpha_{11} \beta_{22} & \alpha_{12} \beta_{21} & \alpha_{12} \beta_{22} \\ \alpha_{21} \beta_{11} & \alpha_{21} \beta_{12} & \alpha_{22} \beta_{11} & \alpha_{22} \beta_{12} \\ \alpha_{21} \beta_{21} & \alpha_{21} \beta_{22} & \alpha_{22} \beta_{21} & \alpha_{22} \beta_{22} \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή το ποιο «μπλοκ»  $2 \times 2$  θα χρησιμοποιήσουμε καθορίζεται από τους δείκτες  $p_1, q_1$  (δηλαδή από το πρώτο qubit), ενώ η θέση μέσα σε κάθε μπλοκ καθορίζεται από τους δείκτες  $p_2, q_2$  (δηλαδή από το δεύτερο qubit).

### Παράδειγμα 2.12: Ο πίνακας του τελεστή $\hat{X} \otimes \hat{I}$

Ας υπολογίσουμε τον πίνακα που περιγράφει τον τελεστή  $\hat{X} \otimes \hat{I}$ , όπου ο  $\hat{X}$  (κβαντική NOT) δρα στο πρώτο qubit ενώ ο ταυτοτικός τελεστής  $\hat{I}$  αφήνει το δεύτερο qubit αμετάβλητο. Στη βάση  $|0\rangle, |1\rangle$  οι δύο τελεστές περιγράφονται από τους πίνακες

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Χρησιμοποιώντας την κατασκευή «μπλοκ» που είδαμε παραπάνω, αντικαθιστούμε κάθε στοιχείο του  $\mathbf{X}$  με το αντίστοιχο πολλαπλάσιο του  $\mathbf{I}$ :

$$\mathbf{X} \otimes \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 \cdot \mathbf{I} & 1 \cdot \mathbf{I} \\ 1 \cdot \mathbf{I} & 0 \cdot \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ας επιβεβαιώσουμε το αποτέλεσμα και εννοιολογικά: ο τελεστής  $\hat{X} \otimes \hat{I}$  πρέπει να αντιστρέφει το πρώτο qubit αφήνοντας το δεύτερο ανέγγιχτο, δηλαδή  $|00\rangle \rightarrow |10\rangle, |01\rangle \rightarrow |11\rangle, |10\rangle \rightarrow |00\rangle$  και  $|11\rangle \rightarrow |01\rangle$ . Πράγματι, αν πολλαπλασιάσουμε τον παραπάνω πίνακα με το διάνυσμα  $(1, 0, 0, 0)^T$  που αντιστοιχεί στο  $|00\rangle = |\psi_1\rangle$ , παίρνουμε το διάνυσμα  $(0, 0, 1, 0)^T$ , δηλαδή το  $|10\rangle = |\psi_3\rangle$ , ακριβώς όπως αναμενόταν.

## 2.11 Εκφυλισμένες ιδιοτιμές

Σε όλα τα παραδείγματα που είδαμε μέχρι τώρα, κάθε ιδιοτιμή ενός τελεστή αντιστοιχούσε σε ένα μοναδικό (μέχρι έναν παράγοντα φάσης) ιδιοδιάνυσμα. Αυτό όμως δεν ισχύει πάντα. Υπάρχουν τελεστές όπου η ίδια ιδιοτιμή  $\lambda$  αντιστοιχεί σε περισσότερα από ένα γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η ιδιοτιμή  $\lambda$  είναι *εκφυλισμένη* (*degenerate*), ενώ τον αριθμό των γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων που της αντιστοιχούν τον ονομάζουμε *βαθμό εκφυλισμού* (*degeneracy*) της  $\lambda$ . Όλα τα ιδιοδιανύσματα (καθώς και οι γραμμικοί τους συνδυασμοί) που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή  $\lambda$  σχηματίζουν έναν διανυσματικό υπόχωρο, τον οποίο ονομάζουμε *ιδιόχωρο* (*eigenspace*) της  $\lambda$ : όταν ο βαθμός εκφυλισμού είναι 1 ο ιδιόχωρος είναι μονοδιάστατος (μία «διεύθυνση»), ενώ όταν είναι μεγαλύτερος του 1 ο ιδιόχωρος έχει περισσότερες διαστάσεις.

Ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα πριν προχωρήσουμε στη γενική θεωρία. Θεωρήστε τον τελεστή  $\hat{X} \otimes \hat{X}$  σε ένα σύστημα δύο qubits, ο οποίος εφαρμόζει την πύλη NOT ταυτόχρονα και στα δύο qubits, δηλαδή αντιστρέφει και το πρώτο και το δεύτερο qubit. Θυμηθείτε από την ενότητα 1.27 ότι ο  $\hat{X}$  έχει τις ιδιοτιμές  $\lambda = 1$  και  $\lambda = -1$  με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα  $|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$  και  $|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ . Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ταυτιστικού γινομένου τελεστών βρίσκουμε ότι

$$(\hat{X} \otimes \hat{X})(|\phi_i\rangle \otimes |\phi_j\rangle) = (\hat{X}|\phi_i\rangle) \otimes (\hat{X}|\phi_j\rangle) = \lambda_i \lambda_j (|\phi_i\rangle \otimes |\phi_j\rangle),$$

δηλαδή κάθε  $|\phi_i\rangle \otimes |\phi_j\rangle$  είναι ιδιοδιάνυσμα του  $\hat{X} \otimes \hat{X}$  με ιδιοτιμή  $\lambda_i \lambda_j$ . Έχουμε λοιπόν τέσσερα ιδιοδιανύσματα συνολικά, αλλά μόνο δύο διαφορετικές ιδιοτιμές: τα  $|\phi_1\rangle \otimes |\phi_1\rangle$  και  $|\phi_2\rangle \otimes |\phi_2\rangle$  αντιστοιχούν και τα δύο στην ιδιοτιμή  $\lambda = 1$ , ενώ τα  $|\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$  και  $|\phi_2\rangle \otimes |\phi_1\rangle$  αντιστοιχούν και τα δύο στην ιδιοτιμή  $\lambda = -1$ . Δηλαδή τόσο η ιδιοτιμή  $\lambda = 1$  όσο και η  $\lambda = -1$  είναι εκφυλισμένες, με βαθμό εκφυλισμού 2 η καθεμία. Ακριβώς τέτοιες περιπτώσεις θέλουμε τώρα να μελετήσουμε πιο συστηματικά.

Ας δούμε πως επηρεάζεται η διαγωνιοποίηση ενός τελεστή  $\hat{A}$  όταν εμφανίζονται εκφυλισμένες ιδιοτιμές. Όπως είδαμε στην ενότητα 1.27, κάθε κανονικός τελεστής  $\hat{A}$  μπορεί να γραφτεί στη διαγωνιοποιημένη μορφή

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^N \lambda_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i|,$$

όπου τα  $|\phi_i\rangle$  αποτελούν μία ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων. Η σχέση αυτή εξακολουθεί να ισχύει και όταν κάποιες ιδιοτιμές είναι εκφυλισμένες, με μία σημαντική διαφορά: η βάση  $|\phi_i\rangle$  δεν είναι πλέον μοναδική.

Αν μία ιδιοτιμή έχει βαθμό εκφυλισμού  $g$ , τότε μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε ορθοκανονική βάση των  $g$  διαστάσεων του αντίστοιχου ιδιόχωρου, και το άθροισμα παραπάνω θα μας δίνει πάντα τον ίδιο τελεστή  $\hat{A}$ .

Ας δούμε τι σημαίνει αυτό συγκεκριμένα στο παράδειγμα του  $\hat{X} \otimes \hat{X}$ . Χρησιμοποιώντας τον συνήθη συμβολισμό  $|\phi_i \phi_j\rangle \equiv |\phi_i\rangle \otimes |\phi_j\rangle$ , η διαγωνιοποιημένη μορφή του τελεστή γράφεται

$$\hat{X} \otimes \hat{X} = |\phi_1 \phi_1\rangle \langle \phi_1 \phi_1| - |\phi_1 \phi_2\rangle \langle \phi_1 \phi_2| - |\phi_2 \phi_1\rangle \langle \phi_2 \phi_1| + |\phi_2 \phi_2\rangle \langle \phi_2 \phi_2|.$$

Έχουμε δηλαδή ακριβώς  $N = 4$  όρους, έναν για κάθε ιδιοδιάνυσμα του χώρου των δύο qubits, με πρόσημο  $+$  όπου η ιδιοτιμή είναι  $\lambda = 1$  και πρόσημο  $-$  όπου είναι  $\lambda = -1$ . Παρακάτω θα δούμε ότι είναι φυσικό να ομαδοποιήσουμε μαζί τον 1ο και τον 4ο όρο (που αντιστοιχούν και οι δύο στην ιδιοτιμή  $\lambda = 1$ ), καθώς και τον 2ο και τον 3ο όρο (που αντιστοιχούν και οι δύο στην ιδιοτιμή  $\lambda = -1$ ). Μπορούμε να γράψουμε δηλαδή:

$$\hat{X} \otimes \hat{X} = (+1) \times (|\phi_1 \phi_1\rangle \langle \phi_1 \phi_1| + |\phi_2 \phi_2\rangle \langle \phi_2 \phi_2|) + (-1) \times (|\phi_1 \phi_2\rangle \langle \phi_1 \phi_2| + |\phi_2 \phi_1\rangle \langle \phi_2 \phi_1|)$$

Οπότε έχουμε δύο διακριτές ιδιοτιμές  $\lambda_1 = 1$  και  $\lambda_2 = -1$  και πλέον μπορούμε να ορίσουμε γενικευμένους τελεστές προβολής,

$$\hat{\mathcal{P}}_1 = |\phi_1 \phi_1\rangle \langle \phi_1 \phi_1| + |\phi_2 \phi_2\rangle \langle \phi_2 \phi_2|$$

$$\hat{\mathcal{P}}_2 = |\phi_1 \phi_2\rangle \langle \phi_1 \phi_2| + |\phi_2 \phi_1\rangle \langle \phi_2 \phi_1|$$

και να γράψουμε τον τελεστή ως άθροισμα των γενικευμένων τελεστών προβολής, θεωρώντας μόνο τις διακριτές ιδιοτιμές:

$$\hat{X} \otimes \hat{X} = \lambda_1 \hat{\mathcal{P}}_1 + \lambda_2 \hat{\mathcal{P}}_2$$

Επειδή η επιλογή βάσης μέσα σε έναν ιδιόχωρο είναι αυθαίρετη, είναι βολικό να ομαδοποιήσουμε τους όρους του αθροίσματος που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή. Αν με  $\lambda_m$  συμβολίσουμε τις διαφορετικές ιδιοτιμές του  $\hat{A}$  (δηλαδή χωρίς να μετράμε τον εκφυλισμό τους παραπάνω από μία φορά), έχουμε

$$\hat{A} = \sum_m \lambda_m \hat{\mathcal{P}}_m,$$

όπου ο τελεστής  $\hat{\mathcal{P}}_m$  είναι ο γενικευμένος τελεστής που προκύπτει από το άθροισμα όλων των ιδιοδιανυσμάτων βάσης που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda_m$ ,

$$\hat{\mathcal{P}}_m = \sum_{\substack{\text{όλα τα } |\phi_i\rangle \text{ που} \\ \text{αντιστοιχούν στην } \lambda_m}} |\phi_i\rangle \langle \phi_i|.$$

Ο τελεστής  $\hat{\mathcal{P}}_m$  δεν είναι πια απλή προβολή πάνω σε ένα μοναδικό ιδιοδιάνυσμα, όπως ο τελεστής  $\hat{P}_\psi = |\psi\rangle \langle \psi|$  που είδαμε στην ενότητα 1.26, αλλά προβολή πάνω σε ολόκληρο τον ιδιόχωρο της  $\lambda_m$ . Το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από την ορθοκανονική βάση που επιλέξαμε μέσα σε αυτόν τον ιδιόχωρο: όποια βάση κι αν διαλέξουμε, το άθροισμα  $\hat{\mathcal{P}}_m$  βγαίνει πάντα το ίδιο, αφού απλά προβάλλει πάνω στον ίδιο υπόχωρο. Όταν η ιδιοτιμή  $\lambda_m$  δεν είναι εκφυλισμένη, ο ιδιόχωρος της είναι μονοδιάστατος και ο τελεστής  $\hat{\mathcal{P}}_m$  ταυτίζεται με τον γνωστό μας τελεστή προβολής  $|\phi_m\rangle \langle \phi_m|$  σε ένα μοναδικό ιδιοδιάνυσμα.

Η παραπάνω γενίκευση μας επιτρέπει να επεκτείνουμε το αξίωμα της μέτρησης που είδαμε στην ενότητα 1.31 στην περίπτωση εκφυλισμένων ιδιοτιμών. Αντί λοιπόν να αντιστοιχίζουμε σε κάθε δυνατό αποτέλεσμα μέτρησης έναν τελεστή προβολής  $|\psi_i\rangle \langle \psi_i|$  σε ένα μεμονωμένο ιδιοδιάνυσμα, αντιστοιχίζουμε σε κάθε διαφορετική ιδιοτιμή  $\lambda_m$  τον τελεστή προβολής  $\hat{\mathcal{P}}_m$  στον αντίστοιχο ιδιόχωρο. Η πιθανότητα να μετρήσουμε την τιμή  $\lambda_m$  σε μία κατάσταση  $|\psi\rangle$  δίνεται τότε από

$$P_m = \langle \psi | \hat{\mathcal{P}}_m | \psi \rangle,$$

ακριβώς όπως και πριν, ενώ η (μη κανονικοποιημένη) κατάσταση του συστήματος αμέσως μετά τη μέτρηση είναι  $\hat{\mathcal{P}}_m |\psi\rangle$ . Η μόνη ουσιαστική διαφορά σε σχέση με τη μη εκφυλισμένη περίπτωση είναι ότι, όταν το αποτέλεσμα της μέτρησης είναι μία εκφυλισμένη ιδιοτιμή, δεν μαθαίνουμε απαραίτητα σε ποιο συγκεκριμένο ιδιοδιάνυσμα του ιδιόχωρου βρίσκεται πλέον το σύστημα, παρά μόνο ότι βρίσκεται κάπου μέσα σε αυτόν τον υπόχωρο.

### Παράδειγμα 2.13: Μέτρηση του λογικού ΚΑΙ (AND) δύο qubits

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν τελεστή μέτρησης  $\hat{M}$  σε ένα σύστημα δύο qubits, του οποίου το αποτέλεσμα να είναι το λογικό ΚΑΙ (AND) των τιμών  $c_1, c_2$  των δύο qubits: δηλαδή να παίρνουμε αποτέλεσμα 1 μόνο όταν και τα δύο qubit βρίσκονται στην κατάσταση  $|1\rangle$ , και αποτέλεσμα 0 σε κάθε άλλη περίπτωση.

Θυμηθείτε από την ενότητα 1.26 τον τελεστή προβολής  $\hat{P}_1 = |1\rangle\langle 1|$ , ο οποίος δρώντας σε ένα qubit «ελέγχει» αν αυτό βρίσκεται στην κατάσταση  $|1\rangle$ :  $\hat{P}_1 |1\rangle = |1\rangle$  ενώ  $\hat{P}_1 |0\rangle$  είναι το μηδενικό διάνυσμα. Στη βάση  $|0\rangle, |1\rangle$  ο  $\hat{P}_1$  περιγράφεται από τον πίνακα

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ορίζουμε τότε τον τελεστή  $\hat{M} = \hat{P}_1 \otimes \hat{P}_1$ , ο οποίος ελέγχει ταυτόχρονα και τα δύο qubits. Χρησιμοποιώντας την κατασκευή «μπλοκ» που είδαμε παραπάνω βρίσκουμε τον πίνακα

$$M = P_1 \otimes P_1 = \begin{bmatrix} 0 \cdot P_1 & 0 \cdot P_1 \\ 0 \cdot P_1 & 1 \cdot P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας  $M$  είναι ήδη διαγώνιος, με τα  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$  να είναι ιδιοδιανύσματα του: το  $|11\rangle$  αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda = 1$  (δηλαδή  $\text{AND}(1, 1) = 1$ ), ενώ τα  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$  αντιστοιχούν όλα στην ιδιοτιμή  $\lambda = 0$  (δηλαδή  $\text{AND}(c_1, c_2) = 0$  σε κάθε άλλη περίπτωση). Έχουμε λοιπόν μία μη εκφυλισμένη ιδιοτιμή ( $\lambda = 1$ , βαθμός εκφυλισμού 1) και μία εκφυλισμένη ιδιοτιμή με βαθμό εκφυλισμού 3 ( $\lambda = 0$ ) – σε αντίθεση με το επόμενο παράδειγμα, όπου και οι δύο ιδιοτιμές θα είναι εκφυλισμένες με τον ίδιο βαθμό.

Οι αντίστοιχοι τελεστές προβολής είναι

$$\hat{P}_1 = |11\rangle\langle 11|, \quad \hat{P}_0 = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|.$$

Παρατηρήστε ότι ο  $\hat{P}_1$  συμπίπτει με τον ίδιο τον τελεστή  $\hat{M}$ , αφού η μη εκφυλισμένη ιδιοτιμή έχει μονοδιάστατο ιδιόχωρο, ενώ ο  $\hat{P}_0$  προβάλλει σε ολόκληρο τον τρισδιάστατο ιδιόχωρο της  $\lambda = 0$ . Εφαρμόζοντάς τους σε μία γενική κατάσταση  $|\Psi\rangle = \psi_{00}|00\rangle + \psi_{01}|01\rangle + \psi_{10}|10\rangle + \psi_{11}|11\rangle$  παίρνουμε τις πιθανότητες

$$P_1 = \langle \Psi | \hat{P}_1 | \Psi \rangle = |\psi_{11}|^2, \quad P_0 = \langle \Psi | \hat{P}_0 | \Psi \rangle = |\psi_{00}|^2 + |\psi_{01}|^2 + |\psi_{10}|^2,$$

που είναι ακριβώς αυτό που θα περιμέναμε: η πιθανότητα να μετρήσουμε  $\text{AND} = 1$  είναι απλά η πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση  $|11\rangle$ , ενώ η πιθανότητα να μετρήσουμε  $\text{AND} = 0$  είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των υπόλοιπων καταστάσεων.

### Παράδειγμα 2.14: Μέτρηση του πρώτου qubit σε ένα σύστημα δύο qubits

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα δύο qubits και τον τελεστή  $\hat{H} = \hat{Z} \otimes \hat{I}$ , όπου ο  $\hat{Z}$  δρα στο πρώτο qubit και ο ταυτοτικός τελεστής  $\hat{I}$  αφήνει το δεύτερο qubit αμετάβλητο. Θυμηθείτε ότι  $\hat{Z} |0\rangle = |0\rangle$  και  $\hat{Z} |1\rangle = -|1\rangle$ , δηλαδή στη βάση  $|0\rangle, |1\rangle$  ο  $\hat{Z}$  περιγράφεται από τον πίνακα

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ο τελεστής  $\hat{H}$  αντιστοιχεί σε μία μέτρηση που «ρωτάει» μόνο για την τιμή του πρώτου qubit, αδιαφορώντας τελείως για το δεύτερο. Χρησιμοποιώντας την κατασκευή «μπλοκ» που είδαμε παραπάνω

βρίσκουμε τον πίνακα του  $\hat{H}$  στη βάση  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ :

$$\mathbf{H} = \mathbf{Z} \otimes \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 \cdot \mathbf{I} & 0 \cdot \mathbf{I} \\ 0 \cdot \mathbf{I} & -1 \cdot \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας  $\mathbf{H}$  είναι ήδη διαγώνιος, οπότε τα ίδια τα  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$  είναι ιδιοδιανύσματα του: τα  $|00\rangle$  και  $|01\rangle$  αντιστοιχούν και τα δύο στην ιδιοτιμή  $\lambda = 1$ , ενώ τα  $|10\rangle$  και  $|11\rangle$  αντιστοιχούν και τα δύο στην ιδιοτιμή  $\lambda = -1$ . Βλέπουμε δηλαδή ότι και οι δύο ιδιοτιμές του  $\hat{H}$  είναι εκφυλισμένες με βαθμό εκφυλισμού 2 – κάτι απολύτως λογικό, αφού η τιμή του δεύτερου qubit δεν επηρεάζει καθόλου το αποτέλεσμα της μέτρησης.

Σύμφωνα με όσα είδαμε παραπάνω, ο τελεστής προβολής στον ιδιόχωρο της  $\lambda = 1$  είναι

$$\hat{\mathcal{P}}_{+1} = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01|,$$

ενώ ο τελεστής προβολής στον ιδιόχωρο της  $\lambda = -1$  είναι

$$\hat{\mathcal{P}}_{-1} = |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11|.$$

Παρατηρήστε ότι αυτοί οι δύο τελεστές δεν είναι τίποτα άλλο από τους γνωστούς μας τελεστές προβολής του πρώτου qubit επεκτεταμένους στο σύστημα των δύο qubits, δηλαδή  $\hat{\mathcal{P}}_{+1} = |0\rangle\langle 0| \otimes \hat{I}$  και  $\hat{\mathcal{P}}_{-1} = |1\rangle\langle 1| \otimes \hat{I}$  (κάτι που επαληθεύεται εύκολα εφαρμόζοντας ξανά την κατασκευή «μπλοκ»).

Ας δούμε τώρα τι μας δίνουν αυτοί οι τελεστές αν εφαρμοστούν σε μία γενική (όχι απαραίτητα διαχωρίσιμη) κατάσταση των δύο qubits,

$$|\Psi\rangle = \psi_{00}|00\rangle + \psi_{01}|01\rangle + \psi_{10}|10\rangle + \psi_{11}|11\rangle.$$

Επειδή τα  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$  είναι ορθοκανονικά, η πιθανότητα να μετρήσουμε  $\lambda = 1$  (δηλαδή το πρώτο qubit να βρεθεί στο  $|0\rangle$ ) είναι

$$P_{+1} = \langle \Psi | \hat{\mathcal{P}}_{+1} | \Psi \rangle = |\psi_{00}|^2 + |\psi_{01}|^2,$$

ενώ η πιθανότητα να μετρήσουμε  $\lambda = -1$  (δηλαδή το πρώτο qubit να βρεθεί στο  $|1\rangle$ ) είναι

$$P_{-1} = \langle \Psi | \hat{\mathcal{P}}_{-1} | \Psi \rangle = |\psi_{10}|^2 + |\psi_{11}|^2.$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι, ακριβώς επειδή η ιδιοτιμή είναι εκφυλισμένη, η πιθανότητα κάθε αποτελέσματος προκύπτει αθροίζοντας τις πιθανότητες όλων των καταστάσεων του δεύτερου qubit που συμβιβάζονται με αυτό το αποτέλεσμα – ό,τι θα περιμέναμε άλλωστε διαισθητικά, αφού η μέτρηση αυτή δεν μας λέει τίποτα για το δεύτερο qubit.

## 2.12 Οι καταστάσεις Bell

Στο παράδειγμα 2.10 είδαμε ένα παράδειγμα κατάστασης δύο qubit

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

που δεν είναι διαχωρίσιμη, δηλαδή δεν μπορεί να γραφτεί ως τανυστικό γινόμενο καταστάσεων του πρώτου και του δεύτερου qubit. Αυτό όπως είχαμε πει και στην αντίστοιχη ενότητα σημαίνει ότι τα δύο qubit δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους – υπάρχει μία βαθύτερη σχέση μεταξύ τους που θα την συζητήσουμε και παρακάτω. Μπορούμε να φτιάξουμε και παραλλαγές της παραπάνω κατάστασης, αλλάζοντας το πρόσημο ανάμεσα στους δύο όρους ή/και χρησιμοποιώντας τις άλλες δύο βασικές καταστάσεις  $|01\rangle, |10\rangle$  αντί των  $|00\rangle, |11\rangle$ . Οι τέσσερις καταστάσεις που προκύπτουν έτσι είναι γνωστές ως *καταστάσεις Bell* (*Bell states*) και

αποτελούν τα πιο γνωστά παραδείγματα διεμπλεγμένων καταστάσεων δύο qubit:

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) \quad , \quad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |11\rangle) \\ |\Psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle) \quad , \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle) \end{aligned}$$

Η αρχική κατάσταση που εξετάσαμε στο παράδειγμα 2.10 δεν είναι τίποτα άλλο από την  $|\Phi^+\rangle$ . Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που δείξαμε εκεί ότι η  $|\Phi^+\rangle$  δεν μπορεί να γραφτεί ως τανυστικό γινόμενο  $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$ , μπορεί κανείς να δείξει ότι το ίδιο ισχύει και για τις  $|\Phi^-\rangle$ ,  $|\Psi^+\rangle$  και  $|\Psi^-\rangle$ : και οι τέσσερις καταστάσεις Bell είναι διεμπλεγμένες.

Αξίζει τέλος να παρατηρήσουμε ότι οι τέσσερις καταστάσεις Bell αποτελούν οι ίδιες μία ορθοκανονική βάση για το σύστημα των δύο qubits, εναλλακτική της συνηθισμένης βάσης  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ . Αυτό μπορεί κανείς να το επαληθεύσει εύκολα υπολογίζοντας το εσωτερικό γινόμενο ανάμεσα σε οποιοσδήποτε δύο από αυτές: επειδή τα  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$  είναι ορθοκανονικά, όλοι οι διασταυρούμενοι όροι μηδενίζονται, και μένει μόνο ο όρος κάθε κατάστασης με τον εαυτό της, που δίνει πάντα 1. Ας το δούμε αναλυτικά στο επόμενο παράδειγμα.

#### Παράδειγμα 2.15: Ορθογωνιότητα των καταστάσεων Bell

Ας επιβεβαιώσουμε ότι οι καταστάσεις Bell είναι ανά δύο ορθογώνιες, υπολογίζοντας ενδεικτικά τα εσωτερικά γινόμενα  $\langle\Phi^+|\Phi^-\rangle$  και  $\langle\Phi^+|\Psi^+\rangle$ .

Ξεκινάμε με τα  $|\Phi^+\rangle$  και  $|\Phi^-\rangle$ , που διαφέρουν μόνο στο πρόσημο:

$$\langle\Phi^+|\Phi^-\rangle = \frac{1}{2} (\langle 00| + \langle 11|) (|00\rangle - |11\rangle) = \frac{1}{2} (\langle 00|00\rangle - \langle 00|11\rangle + \langle 11|00\rangle - \langle 11|11\rangle).$$

Επειδή τα  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$  είναι ορθοκανονικά, έχουμε  $\langle 00|00\rangle = \langle 11|11\rangle = 1$  ενώ  $\langle 00|11\rangle = \langle 11|00\rangle = 0$ , οπότε

$$\langle\Phi^+|\Phi^-\rangle = \frac{1}{2} (1 - 0 + 0 - 1) = 0.$$

Ας δούμε τώρα ένα ζευγάρι που διαφέρει και στις δύο βασικές καταστάσεις που εμπλέκει, τα  $|\Phi^+\rangle$  και  $|\Psi^+\rangle$ :

$$\langle\Phi^+|\Psi^+\rangle = \frac{1}{2} (\langle 00| + \langle 11|) (|01\rangle + |10\rangle) = \frac{1}{2} (\langle 00|01\rangle + \langle 00|10\rangle + \langle 11|01\rangle + \langle 11|10\rangle).$$

Εδώ κανένας από τους τέσσερις όρους δεν αφορά το εσωτερικό γινόμενο μίας βασικής κατάστασης με τον εαυτό της, άρα όλοι μηδενίζονται:

$$\langle\Phi^+|\Psi^+\rangle = \frac{1}{2} (0 + 0 + 0 + 0) = 0.$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο —είτε επειδή δύο καταστάσεις διαφέρουν μόνο σε πρόσημο (όπως στο πρώτο παράδειγμα) είτε επειδή αναφέρονται σε διαφορετικό ζευγάρι βασικών καταστάσεων (όπως στο δεύτερο)— προκύπτει ότι κάθε άλλο ζευγάρι από τις  $|\Phi^+\rangle, |\Phi^-\rangle, |\Psi^+\rangle, |\Psi^-\rangle$  είναι επίσης ορθογώνιο. Μαζί με το γεγονός ότι η καθεμία έχει νόρμα 1 (κάτι που επαληθεύεται το ίδιο εύκολα, π.χ.  $\langle\Phi^+|\Phi^+\rangle = \frac{1}{2}(1 + 0 + 0 + 1) = 1$ ), καταλήγουμε ότι οι τέσσερις καταστάσεις Bell σχηματίζουν όντως ορθοκανονική βάση.

Ας σκεφτούμε τώρα τι γίνεται όταν κάποιος μετράει το 1ο qubit στην κατάσταση:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$$

Χρησιμοποιώντας τους τελεστές προβολής  $\hat{P}_{+1} = |0\rangle\langle 0| \otimes \hat{I}$  και  $\hat{P}_{-1} = |1\rangle\langle 1| \otimes \hat{I}$  του παραδείγματος 2.14

—που αντιστοιχούν ακριβώς στη μέτρηση του πρώτου qubit, αφήνοντας το δεύτερο ανενόχλητο— έχουμε

$$\hat{P}_{+1} |\Phi^+\rangle = (|0\rangle\langle 0| \otimes \hat{I}) \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle,$$

αφού ο όρος  $|00\rangle$  έχει πρώτο qubit  $|0\rangle$  και επιβιώνει αναλλοίωτος, ενώ ο όρος  $|11\rangle$  έχει πρώτο qubit  $|1\rangle$  και μηδενίζεται, αφού  $\langle 0|1\rangle = 0$ . Η πιθανότητα να μετρήσουμε το πρώτο qubit στο  $|0\rangle$  είναι επομένως

$$P_{+1} = \langle \Phi^+ | \hat{P}_{+1} | \Phi^+ \rangle = \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle \right\|^2 = \frac{1}{2},$$

και η (κανονικοποιημένη) κατάσταση του συστήματος αμέσως μετά τη μέτρηση είναι  $|00\rangle$ . Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο βρίσκουμε

$$\hat{P}_{-1} |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle,$$

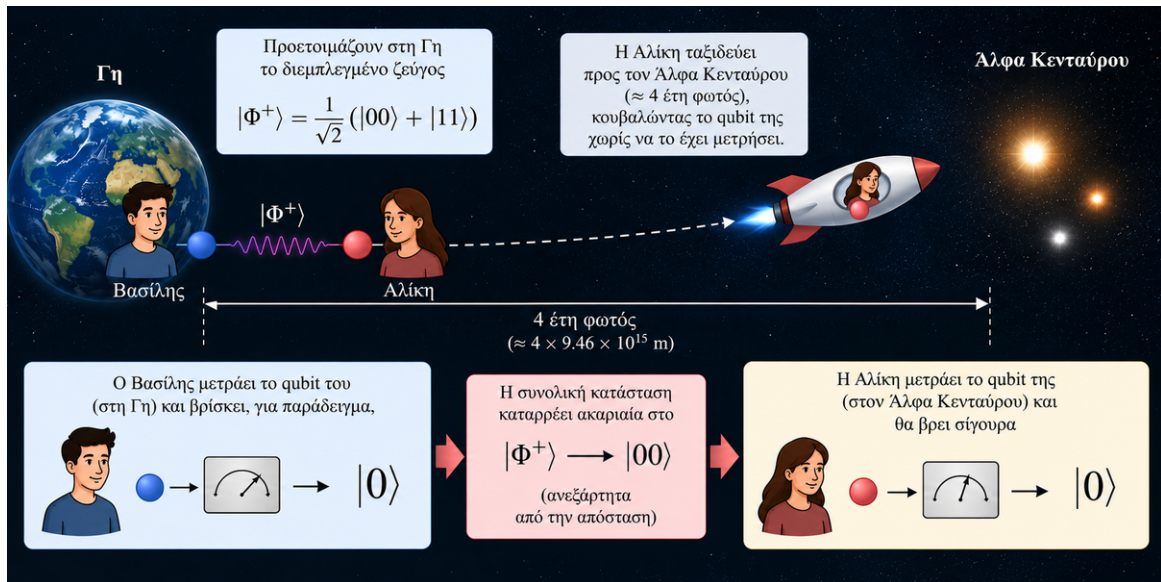
οπότε με πιθανότητα  $P_{-1} = 1/2$  μετράμε το πρώτο qubit στο  $|1\rangle$ , και η κατάσταση του συστήματος γίνεται  $|11\rangle$ .

Παρατηρήστε το εξής εντυπωσιακό: σε καμία από τις δύο περιπτώσεις δεν μετρήσαμε καθόλου το δεύτερο qubit, και όμως μόλις μάθουμε το αποτέλεσμα της μέτρησης του πρώτου, γνωρίζουμε με βεβαιότητα και την κατάσταση του δεύτερου: αν το πρώτο qubit βρεθεί στο  $|0\rangle$ , το δεύτερο είναι σίγουρα στο  $|0\rangle$ , ενώ αν το πρώτο βρεθεί στο  $|1\rangle$ , το δεύτερο είναι σίγουρα στο  $|1\rangle$ . Πριν όμως τη μέτρηση κανένα από τα δύο qubit δεν βρισκόταν σε καθορισμένη κατάσταση· όπως είδαμε, η  $|\Phi^+\rangle$  δεν είναι διαχωρίσιμη, οπότε δεν μπορούμε καν να μιλήσουμε για «την κατάσταση του πρώτου qubit» ξεχωριστά από αυτήν του δεύτερου. Η μέτρηση του πρώτου qubit προκαλεί λοιπόν στιγμιαία «κατάρρευση» ολόκληρης της κυματοσυνάρτησης των δύο qubit, η οποία επηρεάζει άμεσα και το δεύτερο qubit, όσο μακριά κι αν αυτό βρίσκεται από το πρώτο. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως *κβαντική συσχέτιση* (*quantum correlation*) ή, σε πιο δραματική διατύπωση, «αλλόκοτη δράση από απόσταση» (*spooky action at a distance*), όπως την αποκάλεσε ο Αϊνστάιν, και αποτελεί μία από τις πιο χαρακτηριστικές και αντιδιαισθητικές συνέπειες της διεμπλοκής.

Για να αντιληφθούμε πόσο ακραίο είναι στην πραγματικότητα αυτό το αποτέλεσμα, ας φανταστούμε το εξής σενάριο. Δύο φίλοι, η Αλίκη και ο Βασίλης, ετοιμάζουν στη Γη ένα ζεύγος qubit στην κατάσταση Bell  $|\Phi^+\rangle$  και παίρνει ο καθένας από ένα. Η Αλίκη επιβιβάζεται έπειτα σε ένα (υποθετικό, εξαιρετικά γρήγορο) διαστημόπλοιο και ταξιδεύει μέχρι τον Άλφα Κενταύρου, το πλησιέστερο αστρικό σύστημα πέρα από τον Ήλιο, σε απόσταση περίπου 4 ετών φωτός από τη Γη, κουβαλώντας μαζί της το δικό της qubit χωρίς να το έχει μετρήσει. Ο Βασίλης μένει στη Γη με το δικό του.

Μόλις η Αλίκη φτάσει στον προορισμό της, ο Βασίλης μετράει το δικό του qubit και βρίσκει, ας πούμε, την κατάσταση  $|0\rangle$ . Σύμφωνα με όσα είδαμε παραπάνω, αυτό σημαίνει ότι η συνολική κατάσταση των δύο qubit καταρρέει ακαριαία στο  $|00\rangle$ : τη στιγμή ακριβώς που ο Βασίλης παίρνει το αποτέλεσμα της μέτρησής του, το qubit της Αλίκης, που βρίσκεται 4 έτη φωτός μακριά, παύει να βρίσκεται σε υπέρθεση και αποκτά με βεβαιότητα την κατάσταση  $|0\rangle$ . Αν η Αλίκη μετρήσει τώρα το δικό της qubit, θα βρει σίγουρα  $|0\rangle$ · αν αντίθετα ο Βασίλης είχε βρει  $|1\rangle$ , το qubit της Αλίκης θα είχε καταρρεύσει αντίστοιχα στο  $|1\rangle$ .

Είναι όμως σημαντικό να τονίσουμε κάτι που εύκολα παρεξηγείται: αν και η κατάρρευση είναι ακαριαία, ο Βασίλης **δεν** μπορεί με αυτόν τον τρόπο να στείλει κάποιο μήνυμα στην Αλίκη ταχύτερα από το φως. Παρατηρήστε καταρχήν ότι η Αλίκη δεν έχει κανέναν τρόπο να ξέρει αν ο Βασίλης έχει ήδη μετρήσει το δικό του qubit ή όχι, αφού δεν υπάρχει κάποιο σήμα που να την ενημερώνει για αυτό. Ας δούμε όμως ότι αυτό δεν θα άλλαζε τίποτα ακόμα κι αν το ήξερε: είτε ο Βασίλης έχει ήδη μετρήσει (οπότε το qubit της Αλίκης έχει ήδη καταρρεύσει σε  $|0\rangle$  ή  $|1\rangle$ ) είτε όχι (οπότε το qubit της Αλίκης βρίσκεται ακόμα σε υπέρθεση), η Αλίκη, μετρώντας μόνο το δικό της qubit, θα βρει πάντα  $|0\rangle$  ή  $|1\rangle$  με πιθανότητα 50% η καθεμία. Δεν υπάρχει λοιπόν κανένα πείραμα που να μπορεί να κάνει στο δικό της qubit και να της αποκαλύψει αν το αποτέλεσμά της ήταν ήδη «προκαθορισμένο» από τη μέτρηση του Βασίλη ή αν είναι ακόμα γνήσια τυχαίο. Μόνο αν η Αλίκη συγκρίνει κάποια στιγμή το αποτέλεσμά της με αυτό του Βασίλη (κάτι που απαιτεί να επικοινωνήσουν με έναν συνηθισμένο, όχι ταχύτερο από το φως, τρόπο) μπορούν οι δύο τους να διαπιστώσουν ότι τα αποτελέσματα συμφωνούν πάντα. Η ακαριαία κατάρρευση της κοινής κυματοσυνάρτησης δεν παραβιάζει λοιπόν την απαγόρευση της ειδικής σχετικότητας για μετάδοση πληροφορίας ταχύτερα από το φως· απλώς



Σχήμα 2.1: Η Αλίκη και ο Βασίλης μοιράζονται ένα διεμπλεγμένο ζεύγος qubit στην κατάσταση  $|\Phi^+\rangle$ : όσο μακριά κι αν ταξιδέψει η Αλίκη, η μέτρηση του ενός qubit καθορίζει ακαριαία το αποτέλεσμα της μέτρησης του άλλου.

αποκαλύπτει μία συσχέτιση ανάμεσα στα δύο qubit που δεν έχει κανένα κλασικό ανάλογο, και είναι άμεση συνέπεια της κβαντικής διεμπλοκής (*entanglement*) στην οποία βρίσκονταν εξαρχής.

## 2.13 Η γάτα του Schrödinger

Ας επιστρέψουμε τώρα στο πρόβλημα της κβαντικής μέτρησης, οπλισμένοι αυτή τη φορά με το τανυστικό γινόμενο και τη διεμπλοκή. Ο Schrödinger επινόησε ένα διάσημο νοητικό πείραμα ακριβώς για να δείξει πόσο παράξενο γίνεται το πρόβλημα της μέτρησης όταν προσπαθήσουμε να το επεκτείνουμε από ένα μεμονωμένο qubit σε ένα μακροσκοπικό αντικείμενο της καθημερινής μας εμπειρίας.

Φανταστείτε μία γάτα κλεισμένη σε ένα κουτί, μαζί με μία συσκευή που ελέγχει την απελευθέρωση ενός δηλητηριώδους αερίου. Η συσκευή ελέγχεται απλά από ένα qubit: αν το qubit βρεθεί στην κατάσταση  $|1\rangle$ , η συσκευή απελευθερώνει το αέριο και η γάτα πεθαίνει· αν βρεθεί στην κατάσταση  $|0\rangle$ , η συσκευή παραμένει ανενεργή και η γάτα παραμένει ζωντανή.

Ας μοντελοποιήσουμε το πείραμα με δύο qubits. Το πρώτο qubit είναι αυτό που ελέγχει τη συσκευή, με  $|0\rangle$  την κατάσταση «ανενεργό» και  $|1\rangle$  την κατάσταση «ενεργοποιημένο». Το δεύτερο qubit περιγράφει τη γάτα, με  $|0\rangle$  την κατάσταση «ζωντανή» και  $|1\rangle$  την κατάσταση «νεκρή». Την χρονική στιγμή  $t = 0$  που κλείνουμε το κουτί, το πρώτο qubit είναι στην κατάσταση  $|0\rangle$  και η γάτα είναι ζωντανή, οπότε η αρχική κατάσταση του συνολικού συστήματος είναι απλά η διαχωρίσιμη κατάσταση

$$|\Psi(0)\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle.$$

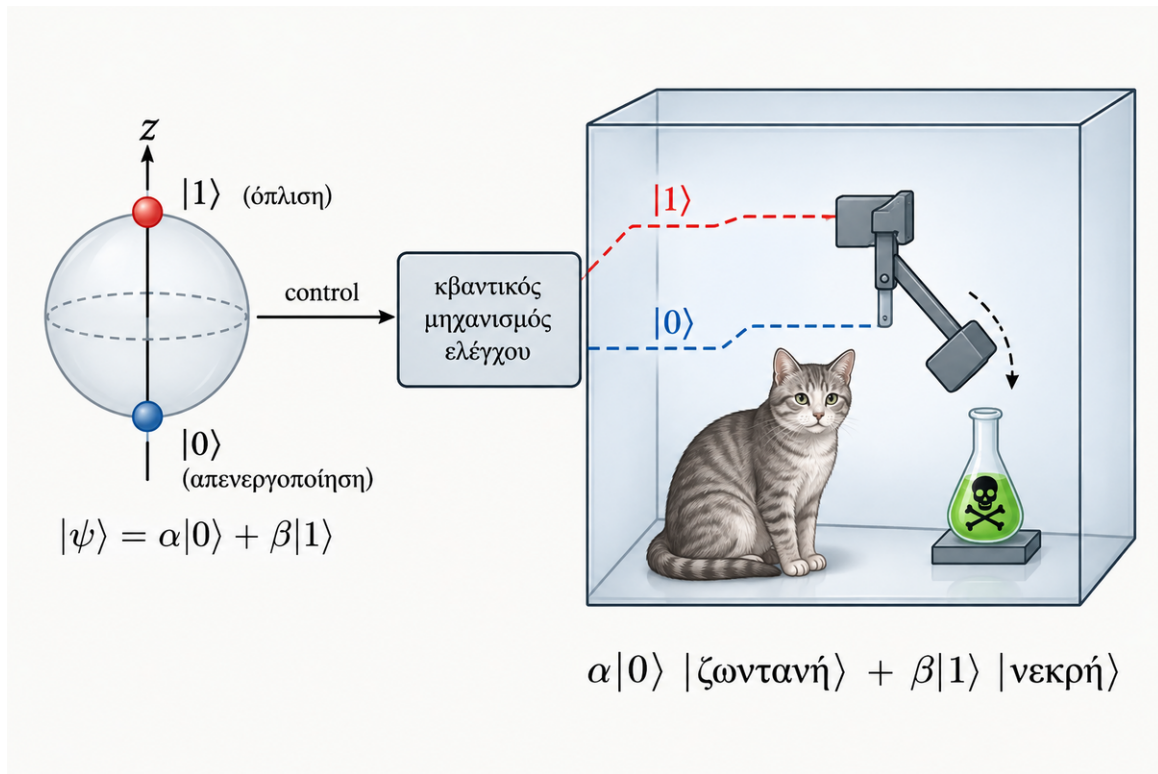
Όσο περνάει ο χρόνος, ας υποθέσουμε ότι το πρώτο qubit εξελίσσεται μοναδιαία, περνώντας σταδιακά σε υπέρθεση των δύο καταστάσεών του,

$$|\psi_1(t)\rangle = \alpha(t)|0\rangle + \beta(t)|1\rangle,$$

με  $|\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2 = 1$ . Όσο η συσκευή δεν έχει ακόμα αντιδράσει στην κατάσταση του πρώτου qubit, η γάτα παραμένει ανεπηρέαστη στην κατάσταση  $|0\rangle$ , οπότε η κατάσταση του συνολικού συστήματος εξελίσσεται σύμφωνα με τον τελεστή  $\hat{U}_1 \otimes \hat{I}$  που είδαμε στο τανυστικό γινόμενο τελεστών,

$$|\Psi(t)\rangle = (\hat{U}_1 \otimes \hat{I}) |00\rangle = (\alpha(t)|0\rangle + \beta(t)|1\rangle) \otimes |0\rangle = \alpha(t)|00\rangle + \beta(t)|10\rangle.$$

Παρατηρήστε ότι η κατάσταση αυτή είναι ακόμα διαχωρίσιμη: το πρώτο qubit είναι σε υπέρθεση αλλά η γάτα είναι ακόμα σίγουρα ζωντανή.



Σχήμα 2.2: Το νοητικό πείραμα της γάτας του Schrödinger: το qubit ελέγχου σε υπέρθεση  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  ενεργοποιεί (ή όχι) τον μηχανισμό που απελευθερώνει το δηλητήριο.

Η συσκευή όμως συνδέει (συζεύγνυει) τα δύο qubit: όποτε το πρώτο qubit ενεργοποιείται, η γάτα πεθαίνει. Περιγράφουμε αυτή τη σύζευξη με έναν μοναδιαίο τελεστή  $\hat{U}$  που δρα στο σύστημα των δύο qubit αφήνοντας το πρώτο qubit αμετάβλητο και αντιστρέφοντας τη γάτα μόνο όταν το πρώτο qubit είναι στην κατάσταση  $|1\rangle$ , δηλαδή, με τον ίδιο συμβολισμό  $|c_1 c_2\rangle$  που χρησιμοποιήσαμε στο παράδειγμα 2.5,

$$\hat{U} |c_1 c_2\rangle = \begin{cases} |c_1 c_2\rangle, & c_1 = 0 \\ |c_1 \bar{c}_2\rangle, & c_1 = 1. \end{cases}$$

Εφαρμόζοντας τον  $\hat{U}$  στην κατάσταση  $|\Psi(t)\rangle = \alpha(t)|00\rangle + \beta(t)|10\rangle$  και χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητά του, παίρνουμε

$$\hat{U} |\Psi(t)\rangle = \alpha(t) \hat{U} |00\rangle + \beta(t) \hat{U} |10\rangle = \alpha(t) |00\rangle + \beta(t) |11\rangle.$$

Η τελική κατάσταση του συστήματος, λίγο πριν ανοίξουμε το κουτί, είναι επομένως

$$|\Psi_{\text{τελικό}}\rangle = \alpha(t) |00\rangle + \beta(t) |11\rangle.$$

Αναγνωρίζετε ίσως τη μορφή αυτής της κατάστασης: είναι ακριβώς η ίδια με αυτή της κατάστασης Bell  $|\Phi^+\rangle$  που είδαμε παραπάνω, με τη διαφορά ότι εδώ τα πλάτη  $\alpha(t), \beta(t)$  δεν είναι απαραίτητα ίσα με  $1/\sqrt{2}$ . Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που δείξαμε ότι η  $|\Phi^+\rangle$  δεν είναι διαχωρίσιμη, μπορούμε να δείξουμε ότι ούτε η  $|\Psi_{\text{τελικό}}\rangle$  είναι διαχωρίσιμη (εκτός αν  $\alpha(t) = 0$  ή  $\beta(t) = 0$ ). Το πρώτο qubit και η γάτα είναι λοιπόν *διεμπλεγμένα*: δεν μπορούμε να αποδώσουμε ξεχωριστή, καθορισμένη κατάσταση ούτε στο ένα ούτε στο άλλο, παρά μόνο στο σύστημα των δύο μαζί. Παίρνοντας κυριολεκτικά τη μαθηματική περιγραφή, η γάτα δεν είναι «ούτε ζωντανή ούτε νεκρή» πριν ανοίξουμε το κουτί, αλλά βρίσκεται σε μία υπέρθεση των δύο. Αυτό είναι ακριβώς το συμπέρασμα που ο Schrödinger θεωρούσε εξωφρενικό για ένα μακροσκοπικό αντικείμενο όπως μία γάτα.

Το να ανοίξουμε το κουτί και να κοιτάξουμε μέσα αποτελεί μία μέτρηση του συνολικού συστήματος στην υπολογιστική βάση  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ . Εφόσον η  $|\Psi_{\text{τελικό}}\rangle$  δεν έχει καθόλου συνιστώσα στα  $|01\rangle$  και  $|10\rangle$ , τα μόνα δυνατά αποτελέσματα είναι

$$|00\rangle \text{ (qubit ανενεργό, γάτα ζωντανή),} \quad |11\rangle \text{ (qubit ενεργοποιημένο, γάτα νεκρή),}$$

με πιθανότητες

$$P(\text{ζωντανή}) = |\alpha(t)|^2, \quad P(\text{νεκρή}) = |\beta(t)|^2.$$

Όσο κι αν η κατάσταση πριν τη μέτρηση ήταν μία γνήσια υπέρθεση, το άνοιγμα του κουτιού μας δίνει πάντα μία σαφή, καθορισμένη απάντηση: ζωντανή ή νεκρή, ποτέ και τα δύο μαζί. Η κατάρρευση της κυματοσυνάρτησης του πρώτου qubit, λόγω της διεμπλοκής του με τη γάτα, συμπαρασύρει άμεσα και τη γάτα στην αντίστοιχη κατάσταση, ακριβώς όπως συνέβη και με το qubit της Αλίκης στο σενάριο που είδαμε παραπάνω, μόνο που εδώ το «απομακρυσμένο» qubit δεν βρίσκεται σε άλλο άστρο, αλλά μέσα στο ίδιο το κουτί.

Το νόημα του πειράματος δεν είναι βέβαια ότι οι γάτες βρίσκονται πραγματικά σε υπέρθεση ζωντανού-νεκρού. Είναι μάλλον μία πρόκληση προς τις διαφορετικές ερμηνείες της κβαντικής μηχανικής που συζητήσαμε παραπάνω: αν πάρουμε στα σοβαρά ότι η μοναδιαία εξέλιξη ισχύει πάντα και για κάθε φυσικό σύστημα, τότε τίποτα στη μαθηματική περιγραφή δεν εμποδίζει την υπέρθεση να «μεγαλώσει» από το επίπεδο ενός μεμονωμένου qubit σε αυτό μίας ολόκληρης γάτας. Το πού ακριβώς σταματά αυτή η υπέρθεση, αν σταματά κάπου, και τι σημαίνει «μέτρηση» ή «παρατηρητής» σε αυτή την ιστορία, παραμένει στην καρδιά του προβλήματος της κβαντικής μέτρησης.

### Εμβάθυνση 2.5: Η γάτα του Schrödinger σε κάθε ερμηνεία

Ας δούμε πώς αντιμετωπίζει η καθεμία από τις ερμηνείες που είδαμε παραπάνω την κατάσταση  $|\Psi_{\text{τελικό}}\rangle = \alpha(t)|00\rangle + \beta(t)|11\rangle$  λίγο πριν ανοίξουμε το κουτί.

- **Ερμηνεία της Κοπεγχάγης:** Η  $|\Psi_{\text{τελικό}}\rangle$  δεν είναι παρά ένα εργαλείο υπολογισμού πιθανοτήτων: μας λέει ότι αν ανοίξουμε το κουτί θα βρούμε τη γάτα ζωντανή με πιθανότητα  $|\alpha(t)|^2$  και νεκρή με πιθανότητα  $|\beta(t)|^2$ . Δεν χρειάζεται να αποφασίσουμε τι «είναι» η γάτα πριν τη μέτρηση, αφού το ερώτημα δεν έχει καν απάντηση μέσα στη θεωρία. Αρκεί να δεχτούμε ότι το άνοιγμα του κουτιού μας δίνει ένα από τα δύο δυνατά αποτελέσματα με τις παραπάνω πιθανότητες.
- **Πολλοί Κόσμοι (Many-Worlds):** Δεν υπάρχει καμία κατάρρευση. Το άνοιγμα του κουτιού είναι απλώς μία ακόμα μοναδιαία αλληλεπίδραση, η οποία διεμπλέκει και εμάς τους ίδιους με το σύστημα: η κοινή κατάσταση γίνεται κάτι σαν  $\alpha(t)|00\rangle|\text{«είδα ζωντανή»}\rangle + \beta(t)|11\rangle|\text{«είδα νεκρή»}\rangle$ . Και οι δύο όροι εξακολουθούν να υπάρχουν, οπότε η γάτα είναι πράγματι «και ζωντανή και νεκρή». Απλώς οι όροι αυτοί αντιστοιχούν πλέον σε δύο κλάδους της πραγματικότητας που δεν επικοινωνούν μεταξύ τους, ο καθένας με το δικό του αντίγραφο του παρατηρητή.
- **Ερμηνείες τύπου de Broglie–Bohm:** Η γάτα έχει ανέκαθεν μία συγκεκριμένη, καθορισμένη κατάσταση, ζωντανή ή νεκρή, ακόμα και πριν ανοίξουμε το κουτί· απλώς εμείς δεν τη γνωρίζουμε. Η  $|\Psi_{\text{τελικό}}\rangle$  δεν περιγράφει μία πραγματική υπέρθεση της γάτας, αλλά καθοδηγεί την εξέλιξη του συστήματος και καθορίζει τις πιθανότητες που αντιστοιχούν στην άγνοιά μας για την ήδη υπαρκτή, καθορισμένη κατάσταση.
- **QBism και άλλες πληροφοριακές ερμηνείες:** Η έκφραση  $\alpha(t)|00\rangle + \beta(t)|11\rangle$  δεν περιγράφει μία ιδιότητα που «έχει» το κουτί, αλλά τον δικό μας βαθμό πεποίθησης για το τι θα δούμε όταν το ανοίξουμε. Το να λέμε ότι «η γάτα είναι σε υπέρθεση» είναι, από αυτή τη σκοπιά, μία δήλωση για τη δική μας αβεβαιότητα και όχι για μία αντικειμενική κατάσταση ζωντανού-νεκρού που να διαθέτει η γάτα ανεξάρτητα από εμάς.

Το εντυπωσιακό είναι ότι και οι τέσσερις ερμηνείες συμφωνούν απόλυτα στην πρόβλεψη  $P(\text{ζωντανή}) = |\alpha(t)|^2$ ,  $P(\text{νεκρή}) = |\beta(t)|^2$ . Καμία πειραματική μέτρηση δεν μπορεί από μόνη της να τις ξεχωρίσει. Διαφωνούν μόνο στο τι θεωρούν ότι συνέβαινε «μέσα στο κουτί» πριν το ανοίξουμε, κάτι που η ίδια η γάτα του Schrödinger έκανε τόσο δύσκολο να αγνοήσουμε.

## 2.14 Αποσυμφωνία (Decoherence)

Μία ερώτηση μένει ανοιχτή από την προηγούμενη συζήτηση: γιατί δεν βλέπουμε ποτέ στην πράξη μακροσκοπικά αντικείμενα σε υπέρθεση, όπως μία γάτα ταυτόχρονα ζωντανή και νεκρή; Ένα μεγάλο μέρος της απάντησης δίνεται από ένα φαινόμενο που ονομάζεται *αποσυμφωνία (decoherence)*: την απώλεια της «συμφωνίας» μίας κβαντικής υπέρθεσης λόγω της αναπόφευκτης αλληλεπίδρασης ενός συστήματος με το περι-

βάλλον του. Ας δούμε πώς προκύπτει αυτό, μένοντας, όπως και παντού αλλού σε αυτές τις σημειώσεις, στο επίπεδο καταστάσεων  $|\psi\rangle$  και τανυστικών γινομένων.

**Συνοχή ενός απομονωμένου qubit.** Ας θεωρήσουμε πρώτα ένα qubit σε πλήρη απομόνωση, στην κατάσταση υπέρθεσης

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle.$$

Η ύπαρξη γνήσιας υπέρθεσης (και όχι απλά άγνοιας για το αν το qubit είναι  $|0\rangle$  ή  $|1\rangle$ ) αποκαλύπτεται αν μετρήσουμε σε μία διαφορετική βάση, για παράδειγμα στη βάση  $|+x\rangle, |-x\rangle$  που είδαμε παλαιότερα. Για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό στη συνέχεια, θα συμβολίζουμε  $|\omega\rangle \equiv |+x\rangle$  και  $|\zeta\rangle \equiv |-x\rangle$ . Η πιθανότητα να μετρήσουμε  $|\omega\rangle$  είναι

$$P(\omega) = |\langle\omega|\psi\rangle|^2 = \left| \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \alpha^*\beta + \alpha\beta^*) = \frac{1}{2} + \text{Re}(\alpha^*\beta).$$

Ο όρος  $\text{Re}(\alpha^*\beta)$  είναι ένας όρος *συμβολής* (interference) ανάμεσα στα  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$ : εξαρτάται από τη σχετική φάση των  $\alpha, \beta$  και δεν έχει κλασικό ανάλογο. Για παράδειγμα, για  $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$  παίρνουμε  $P(\omega) = 1$ : είμαστε δηλαδή βέβαιοι ότι θα μετρήσουμε  $|\omega\rangle$ , κάτι που δεν θα περιμέναμε αν το qubit ήταν απλώς «κρυφά» στο  $|0\rangle$  ή στο  $|1\rangle$  με πιθανότητα 50% το καθένα. Αυτός ακριβώς ο όρος συμβολής είναι αυτό που εννοούμε λέγοντας ότι η υπέρθεση είναι *σύμφωνη* (coherent).

Κανένα πραγματικό σύστημα όμως δεν είναι πλήρως απομονωμένο. Ας θεωρήσουμε ότι το qubit μας αλληλεπιδρά με ένα qubit του περιβάλλοντός του (για παράδειγμα ένα φωτόνιο που σκεδάζεται πάνω του, ή ένα μόριο αέρα που το «ανιχνεύει»), το οποίο ξεκινά σε μία καθαρή κατάσταση  $|e_0\rangle$ . Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που συζεύξαμε το qubit ελέγχου με τη γάτα στην προηγούμενη υποενότητα, η αλληλεπίδραση αυτή περιγράφεται από έναν μοναδιαίο τελεστή  $\hat{U}$  που «αντιγράφει» την κατάσταση του qubit στο περιβάλλον,

$$\hat{U}(|0\rangle \otimes |e_0\rangle) = |0\rangle \otimes |e_0\rangle, \quad \hat{U}(|1\rangle \otimes |e_0\rangle) = |1\rangle \otimes |e_1\rangle,$$

όπου  $|e_1\rangle$  μία κατάσταση του περιβάλλοντος *ορθογώνια* στην  $|e_0\rangle$ , δηλαδή  $\langle e_0|e_1\rangle = 0$ . Δύο παραδοχές κρύβονται εδώ, τις οποίες εξετάζουμε προσεκτικότερα στο παρακάτω πλαίσιο: ότι το περιβάλλον ξεκινά σε καθαρή κατάσταση, και ότι τα  $|e_0\rangle, |e_1\rangle$  είναι ορθογώνια.

### Εμβάθυνση 2.6: Μία παραδοχή που αξίζει να εξετάσουμε

**Γιατί τα  $|e_0\rangle, |e_1\rangle$  είναι ορθογώνια;** Ας ξεκαθαρίσουμε πρώτα ότι η μοναδιαιότητα του  $\hat{U}$  δεν την επιβάλλει αναγκαστικά: οι  $|0\rangle \otimes |e_0\rangle$  και  $|1\rangle \otimes |e_0\rangle$  είναι ήδη ορθογώνιες πριν την αλληλεπίδραση, αφού  $\langle 0|1\rangle = 0$ , οπότε η διατήρηση του εσωτερικού τους γινομένου από τον  $\hat{U}$  δεν μας αναγκάζει να έχουμε  $\langle e_0|e_1\rangle = 0$ . Θα μπορούσαμε κάλλιστα να ορίσουμε έναν μοναδιαίο  $\hat{U}$  με  $\langle e_0|e_1\rangle \neq 0$ . Η ορθογωνιότητα είναι λοιπόν μία *φυσική παραδοχή* για το πόσο καλά «ανιχνεύει» το συγκεκριμένο περιβάλλον την κατάσταση του qubit, όχι μαθηματική αναγκαιότητα: όσο πιο διακριτά είναι τα δύο ίχνη  $|e_0\rangle, |e_1\rangle$  που αφήνει το qubit στο περιβάλλον, τόσο μικρότερο είναι το  $|\langle e_0|e_1\rangle|$ , με  $\langle e_0|e_1\rangle = 0$  να αντιστοιχεί στην ιδανική περίπτωση όπου το περιβάλλον καταγράφει πλήρως, χωρίς καμία αμφιβολία, σε ποια από τις δύο καταστάσεις βρισκόταν το qubit.

Δεν χρειάζεται μία τέλεια, πλήρως διακριτική αλληλεπίδραση με ένα και μόνο σωματίδιο για να φτάσουμε σε ορθογωνιότητα. Στην πράξη το qubit αλληλεπιδρά με ένα τεράστιο πλήθος ανεξάρτητων σωματιδίων του περιβάλλοντος και αφήνει σε αυτά το αποτύπωμά του, το καθένα από τα οποία θεωρούμε ότι ξεκινά στη δική του καθαρή κατάσταση (όπως εξηγήσαμε παραπάνω) και «βλέπει» μόνο ένα ατελές, μερικό ίχνος της κατάστασης του qubit. Δηλαδή αν το qubit είναι στο  $|0\rangle$  ή στο  $|1\rangle$ , το  $k$ -οστό σωματίδιο καταλήγει αντίστοιχα στην κατάσταση  $|e_0^{(k)}\rangle$  ή  $|e_1^{(k)}\rangle$ , με τα δύο αυτά ίχνη *όχι* απαραίτητα ορθογώνια μεταξύ τους: το εσωτερικό τους γινόμενο  $\langle e_0^{(k)}|e_1^{(k)}\rangle$  μπορεί κάλλιστα να είναι κοντά στο 1 αντί για ακριβώς 0. Το εντυπωσιακό είναι ότι αυτά τα ατελή, μεμονωμένα ίχνη *πολλαπλασιάζονται* μεταξύ τους, και αυτό αρκεί για να μας δώσει πρακτικά πλήρη ορθογωνιότητα. Αν το περιβάλλον αποτελείται από  $N$  τέτοια ανεξάρτητα σωματίδια, τότε η συνολική κατάσταση του περιβάλλοντος είναι το τανυστικό γινόμενο των επιμέρους καταστάσεων,  $|e_0\rangle = |e_0^{(1)}\rangle \otimes \dots \otimes |e_0^{(N)}\rangle$  και αντίστοιχα για το  $|e_1\rangle$ . Γενικεύοντας με τον ίδιο τρόπο τη σχέση που δείξαμε στο παράδειγμα 2.11 για το εσωτερικό γινόμενο τανυστικών

καταστάσεων (εκεί για δύο παράγοντες, εδώ για  $N$ ), το συνολικό εσωτερικό γινόμενο είναι το γινόμενο των επιμέρους εσωτερικών γινομένων,

$$\langle e_0 | e_1 \rangle = \prod_{k=1}^N \langle e_0^{(k)} | e_1^{(k)} \rangle .$$

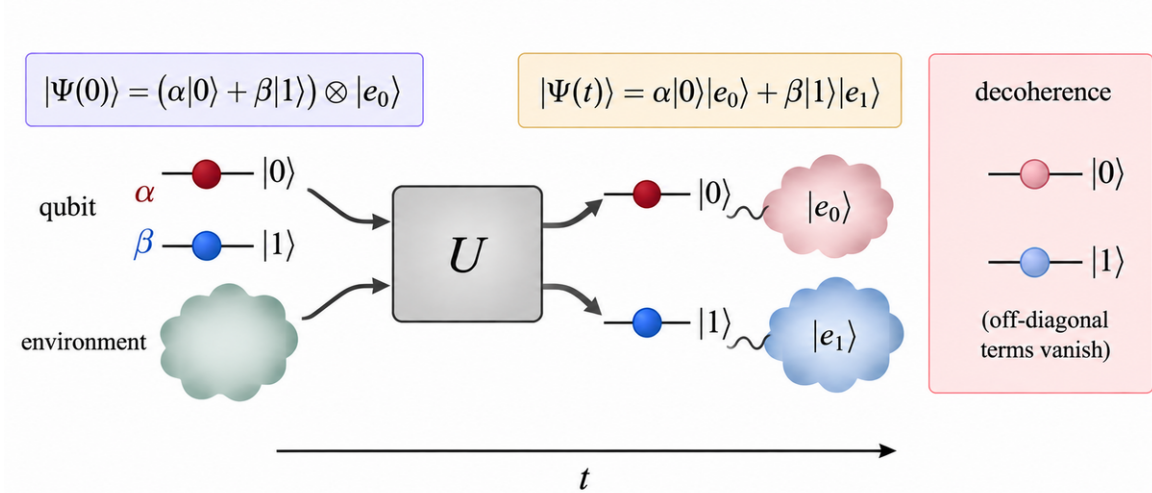
Επειδή κάθε παράγοντας

$$|\langle e_0^{(k)} | e_1^{(k)} \rangle|$$

είναι μικρότερος ή ίσος της μονάδας, το γινόμενο  $N$  τέτοιων παραγόντων τείνει εκθετικά γρήγορα στο μηδέν καθώς το  $N$  μεγαλώνει, ακόμα κι αν ο καθένας ξεχωριστά είναι πολύ κοντά στο 1. Για  $N$  της τάξης των δισεκατομμυρίων σωματιδίων, το  $\langle e_0 | e_1 \rangle$  γίνεται αμελητέο μέσα σε ελάχιστο χρόνο, οπότε η προσέγγιση  $\langle e_0 | e_1 \rangle = 0$  είναι εξαιρετικά ακριβής, παρότι κανένα μεμονωμένο σωματίδιο δεν χρειάστηκε να «μετρήσει» πλήρως το qubit.

Θα δουλέψουμε λοιπόν με την απλοποιημένη περίπτωση ενός μόνο qubit περιβάλλοντος που καταγράφει τέλεια,  $\langle e_0 | e_1 \rangle = 0$ . Εφαρμόζοντας τον  $\hat{U}$  στο qubit μας, με τη γραμμικότητά του, παίρνουμε την διεμπλεγμένη κατάσταση

$$|\Psi\rangle = \hat{U}(|\psi\rangle \otimes |e_0\rangle) = \alpha |0\rangle |e_0\rangle + \beta |1\rangle |e_1\rangle .$$



Σχήμα 2.3: Η αποσυμφωνία ενός qubit λόγω διεμπλοκής με το περιβάλλον του: η αλληλεπίδραση μέσω του  $\hat{U}$  συζευγνύει το qubit με ξεχωριστές καταστάσεις  $|e_0\rangle$ ,  $|e_1\rangle$  του περιβάλλοντος, εξαφανίζοντας τους όρους συμβολής.

**Απώλεια της συμβολής.** Ας υπολογίσουμε τώρα ξανά την πιθανότητα να μετρήσουμε το qubit στην κατάσταση  $|\omega\rangle$ , αγνοώντας τελείως το περιβάλλον (δηλαδή χωρίς να το μετρήσουμε ή να το ελέγξουμε με κανέναν τρόπο). Αυτό περιγράφεται από έναν τελεστή προβολής  $\hat{\mathcal{P}}_\omega \otimes \hat{I}$  της ίδιας μορφής με αυτούς που χρησιμοποιήσαμε στο παράδειγμα 2.14 για τη μέτρηση ενός μόνο qubit από ζεύγος διεμπλεγμένων qubit, με  $\hat{\mathcal{P}}_\omega = |\omega\rangle \langle \omega|$ . Έχουμε πρώτα

$$\begin{aligned} (\hat{\mathcal{P}}_\omega \otimes \hat{I}) |\Psi\rangle &= \alpha \langle \omega | 0 \rangle |\omega\rangle |e_0\rangle + \beta \langle \omega | 1 \rangle |\omega\rangle |e_1\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} |\omega\rangle \otimes (\alpha |e_0\rangle + \beta |e_1\rangle) , \end{aligned}$$

αφού  $\langle \omega|0\rangle = \langle \omega|1\rangle = 1/\sqrt{2}$ . Η πιθανότητα είναι επομένως

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \langle \Psi | (\hat{P}_\omega \otimes \hat{I}) | \Psi \rangle = \frac{1}{2} \|\alpha |e_0\rangle + \beta |e_1\rangle\|^2 \\ &= \frac{1}{2} (|\alpha|^2 \langle e_0|e_0\rangle + |\beta|^2 \langle e_1|e_1\rangle + \alpha^* \beta \langle e_0|e_1\rangle + \alpha \beta^* \langle e_1|e_0\rangle). \end{aligned}$$

Επειδή όμως  $|e_0\rangle, |e_1\rangle$  είναι ορθογώνια, οι δύο τελευταίοι όροι μηδενίζονται, οπότε

$$P(\omega) = \frac{1}{2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) = \frac{1}{2}.$$

Ο όρος συμβολής  $\text{Re}(\alpha^* \beta)$  που είχαμε πριν έχει εξαφανιστεί εντελώς! Όποια κι αν είναι τα  $\alpha, \beta$ , η πιθανότητα να μετρήσουμε  $|\omega\rangle$  είναι πλέον πάντα  $1/2$ , ακριβώς όπως θα περιμέναμε αν το qubit ήταν σε μία απλή, κλασική στατιστική ανάμειξη των  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$  με πιθανότητα  $|\alpha|^2$  και  $|\beta|^2$  αντίστοιχα, και όχι σε γνήσια κβαντική υπέρθεση.

Αυτό είναι το φαινόμενο της αποσυμφωνίας: μόλις το qubit διεμπλακεί με ένα περιβάλλον που «ξεχωρίζει» τις δύο καταστάσεις του, χάνεται κάθε δυνατότητα να παρατηρήσουμε συμβολή μετρώντας μόνο το qubit, ανεξάρτητα από το αν κάποιος «μέτρησε» πραγματικά το περιβάλλον ή όχι. Παρατηρήστε ότι η συνολική κατάσταση  $|\Psi\rangle$  του qubit μαζί με το περιβάλλον παραμένει σε όλη τη διάρκεια μία απολύτως σύμφωνη, καθαρή κβαντική κατάσταση. Καμία κατάρρευση δεν χρειάστηκε να συμβεί. Απλώς η συμβολή «διέρρευσε» στη διεμπλοκή ανάμεσα στο qubit και το περιβάλλον, και δεν είναι πλέον προσβάσιμη αν κοιτάξουμε μόνο το qubit.

#### Παράδειγμα 2.16: Αποσυμφωνία σε μία κατάσταση Bell

Ας δούμε ότι η αποσυμφωνία καταστρέφει με τον ίδιο ακριβώς τρόπο τη συμφωνία μίας διεμπλεγμένης κατάστασης δύο qubit, όπως η κατάσταση Bell  $|\Phi^+\rangle$  του παραδείγματος 2.10. Ονομάζοντας τα δύο qubit  $A$  και  $B$ ,

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B).$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις  $|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\omega\rangle + |\zeta\rangle)$  και  $|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\omega\rangle - |\zeta\rangle)$  (τις αντίστροφες του ορισμού των  $|\omega\rangle, |\zeta\rangle$ ) για το καθένα από τα δύο qubit, και ομαδοποιώντας τους όρους, βρίσκουμε

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\omega\rangle_A |\omega\rangle_B + |\zeta\rangle_A |\zeta\rangle_B),$$

αφού οι «μεικτοί» όροι  $|\omega\rangle_A |\zeta\rangle_B$  και  $|\zeta\rangle_A |\omega\rangle_B$  αλληλοαναιρούνται ακριβώς. Δηλαδή, αν μετρήσουμε και τα δύο qubit στη βάση  $|\omega\rangle, |\zeta\rangle$ , θα πάρουμε πάντα το ίδιο αποτέλεσμα και στα δύο, ποτέ «μεικτό» αποτέλεσμα, ακριβώς όπως συμβαίνει και στην υπολογιστική βάση. Αυτή η τέλεια συσχέτιση σε οποιαδήποτε βάση είναι η υπογραφή της συμφωνίας της κατάστασης Bell.

Ας συζέξουμε τώρα το qubit  $B$  με ένα qubit περιβάλλοντος  $E$ , με τον ίδιο ακριβώς τελεστή  $\hat{U}$  που είδαμε παραπάνω. Εφαρμόζοντας τον  $\hat{I} \otimes \hat{U}$  (ταυτοτικός στο  $A$ , σύζευξη στα  $B, E$ ) στην κατάσταση  $|\Phi^+\rangle \otimes |e_0\rangle$  παίρνουμε

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |0\rangle_B |e_0\rangle + |1\rangle_A |1\rangle_B |e_1\rangle).$$

Ας υπολογίσουμε τώρα την πιθανότητα να μετρήσουμε τα δύο qubit σε διαφορετικές καταστάσεις της βάσης  $\omega, \zeta$ , π.χ.  $|\omega\rangle$  στο  $A$  και  $|\zeta\rangle$  στο  $B$ , αγνοώντας το περιβάλλον. Αντικαθιστώντας ξανά τα  $|0\rangle, |1\rangle$  συναρτήσει των  $|\omega\rangle, |\zeta\rangle$  και για τα δύο qubit, βρίσκουμε

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ |\omega\rangle_A |\omega\rangle_B (|e_0\rangle + |e_1\rangle) + |\omega\rangle_A |\zeta\rangle_B (|e_0\rangle - |e_1\rangle) + |\zeta\rangle_A |\omega\rangle_B (|e_0\rangle - |e_1\rangle) + |\zeta\rangle_A |\zeta\rangle_B (|e_0\rangle + |e_1\rangle) \right].$$

Εφόσον οι τέσσερις συνδυασμοί  $|\omega\rangle_A |\omega\rangle_B, |\omega\rangle_A |\zeta\rangle_B, |\zeta\rangle_A |\omega\rangle_B, |\zeta\rangle_A |\zeta\rangle_B$  είναι ορθοκανονικοί, η πιθανότητα κάθε συνδυασμού (αγνοώντας το  $E$ ) είναι το τετράγωνο της νόρμας του αντίστοιχου «συνημμένου» διανύσματος του περιβάλλοντος, όπως ακριβώς και στο προηγούμενο παράδειγμα. Για τον

συνδυασμό  $\omega, \zeta$  έχουμε επομένως

$$P(\omega, \zeta) = \left\| \frac{1}{2\sqrt{2}} (|e_0\rangle - |e_1\rangle) \right\|^2 = \frac{1}{8} (\langle e_0|e_0\rangle - \langle e_0|e_1\rangle - \langle e_1|e_0\rangle + \langle e_1|e_1\rangle) = \frac{1}{4},$$

αφού τα  $|e_0\rangle, |e_1\rangle$  είναι ορθογώνια. Πριν τη σύζευξη με το περιβάλλον είχαμε  $P(\omega, \zeta) = 0$  (δεν υπήρχε καθόλου τέτοιος όρος στην  $|\Phi^+\rangle$ ). μετά τη σύζευξη,  $P(\omega, \zeta) = 1/4$ , ακριβώς όσο θα περιμέναμε από μία τυχαία, μη συσχετισμένη κατανομή. Η τέλεια συσχέτιση στη βάση  $\omega, \zeta$  καταστράφηκε λοιπόν εντελώς από την αποσυμφωνία, παρότι η συσχέτιση στην υπολογιστική βάση (πάντα  $|0\rangle_A |0\rangle_B$  ή  $|1\rangle_A |1\rangle_B$ , ποτέ «μεικτή») παραμένει απόλυτη. Η αποσυμφωνία δεν καταστρέφει λοιπόν απλώς τη συσχέτιση ανάμεσα στα δύο qubit. Καταστρέφει συγκεκριμένα τη *συμφωνία* που ήταν ορατή μόνο σε βάσεις συμπληρωματικές προς αυτή στην οποία «κοιτάζει» το περιβάλλον.

Σε ένα πραγματικό μακροσκοπικό αντικείμενο, όπως η γάτα του Schrödinger, το «περιβάλλον» δεν είναι ένα μόνο qubit αλλά δισεκατομμύρια φωτόνια, μόρια αέρα και άλλα σωματίδια, καθένα από τα οποία αλληλεπιδρά έστω και ελάχιστα με το αντικείμενο και «καταγράφει» κάτι για την κατάστασή του. Όπως είδαμε στο παραπάνω πλαίσιο, ακόμα κι αν κάθε μεμονωμένο σωματίδιο αφήνει μόνο ένα ατελές ίχνος, η συνδυασμένη επίδραση δισεκατομμυρίων τέτοιων σωματιδίων οδηγεί πρακτικά σε πλήρη ορθογωνιότητα των καταστάσεων του περιβάλλοντος. Η αποσυμφωνία σε τέτοιες κλίμακες συμβαίνει επομένως σε εξαιρετικά μικρούς χρόνους, πρακτικά ακαριαία, γι' αυτό και δεν παρατηρούμε ποτέ μακροσκοπικά αντικείμενα σε σύμφωνη υπέρθεση. Αξίζει πάντως να τονίσουμε ότι η αποσυμφωνία από μόνη της δεν λύνει πλήρως το πρόβλημα της κβαντικής μέτρησης: μας εξηγεί γιατί δεν βλέπουμε ποτέ συμβολή ανάμεσα σε μακροσκοπικά διαφορετικές καταστάσεις, αλλά δεν εξηγεί από μόνη της γιατί εμείς, ως παρατηρητές, βιώνουμε πάντα ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα (π.χ. «η γάτα είναι ζωντανή») και όχι κάποιου είδους υπέρθεση όλων των δυνατών εμπειριών. Το ερώτημα αυτό παραμένει στενά συνδεδεμένο με τις διαφορετικές ερμηνείες της κβαντικής μηχανικής που συζητήσαμε παραπάνω.

Η αποσυμφωνία δεν είναι μόνο ένα ενδιαφέρον θεωρητικό ζήτημα για τα θεμέλια της κβαντικής μηχανικής: είναι επίσης ένας από τους μεγαλύτερους πρακτικούς εχθρούς της κβαντικής υπολογιστικής. Ολόκληρο το πλεονέκτημα ενός κβαντικού υπολογιστή έναντι ενός κλασικού στηρίζεται ακριβώς στη συμφωνία, δηλαδή στην ικανότητα να διατηρούμε τα qubits σε γνήσιες υπερθέσεις και διεμπλοκές, ώστε να εκμεταλλευτούμε φαινόμενα συμβολής ανάμεσα σε διαφορετικούς υπολογιστικούς «δρόμους». Κάθε ανεπιθύμητη αλληλεπίδραση ενός qubit με το περιβάλλον του, όπως οι θερμικοί κραδασμοί, η περιβάλλουσα ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία ή οι ατέλειες στα ίδια τα υλικά που το αποθηκεύουν, λειτουργεί ακριβώς όπως στο παράδειγμα που μόλις είδαμε: καταστρέφει τη συμβολή και μετατρέπει σιωπηρά το qubit σε κάτι πιο κοντά σε ένα κλασικό, τυχαίο bit, χωρίς καν να χρειάζεται κάποιος να το «μετρήσει» επίτηδες. Όσο μεγαλύτερος είναι ένας κβαντικός υπολογισμός, δηλαδή όσα περισσότερα qubits χρησιμοποιεί και όσο περισσότερο χρόνο διαρκεί, τόσο περισσότερες ευκαιρίες έχει το περιβάλλον να «κοιτάξει» τα qubits και να καταστρέψει τη διεμπλοκή που χρειαζόμαστε, πριν προλάβουμε καν να ολοκληρώσουμε τον υπολογισμό. Αυτός είναι ένας από τους βασικούς λόγους που η κατασκευή αξιόπιστων, μεγάλης κλίμακας κβαντικών υπολογιστών παραμένει τόσο δύσκολη: απαιτεί ακραία απομόνωση (για παράδειγμα ψύξη κοντά στο απόλυτο μηδέν και θωράκιση από ηλεκτρομαγνητικό θόρυβο) και εξελιγμένες τεχνικές διόρθωσης σφαλμάτων, ειδικά σχεδιασμένες ώστε να προστατεύουν την πληροφορία ενός qubit από την αποσυμφωνία χωρίς ποτέ να τη μετρήσουν άμεσα, κάτι που θα την κατέστρεφε εξίσου.

## Σύνοψη Ενότητας

Σε αυτή την ενότητα γενικεύσαμε τα εργαλεία της κβαντικής θεωρίας που γνωρίσαμε μέσα από το παράδειγμα ενός qubit, καταλήγοντας σε μία πιο αφηρημένη περιγραφή που μας επιτρέπει να μελετήσουμε συστήματα πολλών qubit και πιο σύνθετα φαινόμενα όπως η διεμπλοκή. Συνοπτικά:

- Γενικεύσαμε τον διανυσματικό χώρο ενός qubit σε *χώρο Hilbert*: έναν διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο (και τη νόρμα  $\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$  που αυτό ορίζει), πεπερασμένης ή άπειρης διάστασης, όπως στην περίπτωση μίας κυματοσυνάρτησης  $\psi(x)$ .

- Συγκεντρώσαμε τα τρία αξιώματα της κβαντικής θεωρίας: η κατάσταση περιγράφεται από ένα κανονικοποιημένο  $|\psi\rangle$ , η εξέλιξή της είναι πάντα μοναδιαία,  $|\psi(t)\rangle = \hat{U} |\psi(0)\rangle$ , και η μέτρηση ενός μεγέθους περιγράφεται από έναν Ερμιτιανό τελεστή μέσω των τελεστών προβολής του.
- Η σχέση αβεβαιότητας  $\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle \right|^2$  δείχνει ότι δύο μεγέθη είναι ταυτόχρονα καλά καθορισμένα μόνο αν οι αντίστοιχοι τελεστές τους μετατίθενται.
- Το τανυστικό γινόμενο  $\otimes$  μας επέτρεψε να περιγράψουμε συστήματα πολλών qubit, τόσο σε επίπεδο καταστάσεων ( $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$ ) όσο και τελεστών ( $\hat{A} \otimes \hat{B}$ ), με τον αντίστοιχο πίνακα να προκύπτει από τα στοιχεία των επιμέρους πινάκων.
- Καταστάσεις που δεν γράφονται ως τανυστικό γινόμενο ονομάζονται *διεμπλεγμένες*, με τις καταστάσεις Bell  $|\Phi^\pm\rangle, |\Psi^\pm\rangle$  να αποτελούν τα πιο γνωστά παραδείγματα: η μέτρηση του ενός qubit καθορίζει ακαριαία την κατάσταση του άλλου, όσο μακριά κι αν βρίσκεται.
- Γενικεύσαμε τη μέτρηση σε *εκφυλισμένες ιδιοτιμές*, αντικαθιστώντας τον τελεστή προβολής  $|\psi_i\rangle \langle \psi_i|$  σε ένα ιδιοδιάνυσμα με τον τελεστή προβολής  $\hat{P}_m$  σε ολόκληρο τον ιδιόχωρο μίας ιδιοτιμής.
- Η γάτα του Schrödinger έδειξε πόσο παράξενες γίνονται η υπέρθεση, η διεμπλοκή και η κατάρρευση όταν επεκταθούν σε μακροσκοπικά αντικείμενα, ένα ερώτημα που παραμένει στην καρδιά του προβλήματος της κβαντικής μέτρησης, στο οποίο οι διαφορετικές ερμηνείες της κβαντικής μηχανικής δίνουν διαφορετικές απαντήσεις.
- Η *αποσυμφωνία* προσφέρει μέρος της εξήγησης: η αναπόφευκτη διεμπλοκή ενός συστήματος με το περιβάλλον του καταστρέφει τη συμβολή που θα αποκάλυπτε τη συμφωνία μίας υπέρθεσης, χωρίς να χρειάζεται καμία πραγματική «κατάρρευση», και αποτελεί έναν από τους βασικότερους πρακτικούς περιορισμούς στην κατασκευή κβαντικών υπολογιστών.