

3 Η σφαίρα του Bloch και πύλες ενός qubit

Μέχρι τώρα περιγράψαμε την κατάσταση ενός qubit αποκλειστικά αλγεβρικά, ως ένα διάνυσμα $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ σε έναν διανυσματικό χώρο δύο μιγαδικών διαστάσεων. Η περιγραφή αυτή είναι ακριβής και πλήρης, αλλά δεν μας δίνει άμεσα κάποια γεωμετρική εικόνα: οι αριθμοί a και b είναι μιγαδικοί και ως εκ τούτου δεν μπορούμε να αναπαραστήσουμε το $|\psi\rangle$ απλά σαν ένα δισδιάστατο διάνυσμα $\vec{\psi} = (a, b)$ στο επίπεδο. Από την άλλη, μία τέτοια αναπαράσταση θα μπορούσε δυνητικά να μας βοηθήσει να καταλάβουμε τι συμβαίνει στο qubit όταν εφαρμόζεται μία πύλη ή γίνεται κάποια μέτρηση.

Στην ενότητα αυτή θα δούμε ότι υπάρχει ένας εναλλακτικός κομψός τρόπος να αναπαραστήσουμε την κατάσταση ενός qubit ως ένα σημείο όχι πάνω σε ένα επίπεδο αλλά στο τρισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων. Μάλιστα, όταν χρησιμοποιούμε αυτόν τον τρόπο, τα αντίστοιχα σημεία που αναπαριστούν του qubit είναι πάνω στην επιφάνεια μίας σφαίρας τη λεγόμενη *σφαίρα του Bloch*, από το όνομα του νομπελίστα φυσικού Felix Bloch. Κάθε δυνατή κατάσταση ενός qubit σε ένα ξεχωριστό σημείο της σφαίρας, με τρόπο που αποκαλύπτει άμεσα πολλές ιδιότητες που στην αλγεβρική περιγραφή έμεναν κρυμμένες.

Θυμηθείτε ότι έχουμε ήδη συναντήσει έξι ειδικές καταστάσεις ενός qubit, που σχετίζονται με τη μέτρηση του spin στους τρεις άξονες x , y και z : τα $|0\rangle$, $|1\rangle$ (άξονας z), τα $|+x\rangle$, $|-x\rangle$ και τα $|+y\rangle$, $|-y\rangle$. Στη σφαίρα του Bloch, όπως θα δούμε, αυτές οι έξι καταστάσεις αντιστοιχούν ακριβώς στους έξι πόλους της σφαίρας, δηλαδή στα σημεία όπου η σφαίρα τέμνεται από τους τρεις άξονες x , y , z , ενώ κάθε άλλη δυνατή κατάσταση υπέρθεσης αντιστοιχεί σε κάποιο άλλο σημείο πάνω στην επιφάνειά της.

Το πιο ενδιαφέρον όμως είναι τι συμβαίνει όταν εφαρμόζουμε μία κβαντική πύλη, δηλαδή έναν μοναδιαίο τελεστή $\hat{U}$, σε ένα qubit. Θα δούμε ότι κάθε τέτοιος τελεστής αντιστοιχεί σε μία *περιστροφή* της σφαίρας του Bloch γύρω από κάποιον άξονα $\mathbf{n}$ του επιπέδου και κατά κάποια γωνία θ . Επομένως υπάρχει μία βαθιά αναλογία ανάμεσα στους μοναδιαίους τελεστές που περιγράφουν την εξέλιξη ενός qubit και στις περιστροφές ενός στερεού σώματος στον τρισδιάστατο χώρο, μία αναλογία που αξίζει να εξερευνήσουμε προσεκτικά, αφού μας επιτρέπει να οπτικοποιήσουμε τη δράση μίας κβαντικής πύλης αντί απλά να την υπολογίζουμε.

Η γεωμετρική αυτή εικόνα δεν είναι μόνο εποπτικά χρήσιμη. Μας επιτρέπει επίσης να καταλάβουμε διαισθητικά γιατί ορισμένες πύλες δεν αντιμετωπίζονται (αφού οι περιστροφές γύρω από διαφορετικούς άξονες γενικά δεν αντιμετωπίζονται μεταξύ τους), πώς να συνθέσουμε πολύπλοκες πύλες από απλούστερες, και πώς να σχεδιάσουμε στην πράξη κυκλώματα ενός qubit. Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας αναλυτικά την αντιστοιχία ανάμεσα σε καταστάσεις qubit και σημεία της σφαίρας, και στη συνέχεια θα δείξουμε πώς οι κβαντικές πύλες μεταφράζονται σε περιστροφές.

Χρησιμοποιώντας αυτές τις αναλογίες με το τρισδιάστατο χώρο, θα δούμε επίσης πως υλοποιούμε οποιαδήποτε κβαντική πύλη ενός qubit με την βοήθεια ορισμένων συγκεκριμένων πυλών. Όπως και στην κλασική ψηφιακή σχεδίαση όπου υπήρχαν πύλες που ονομαζόντουσαν *οικουμενικές* με την έννοια ότι μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για να φτιάξουν οποιαδήποτε λογική συνάρτηση Boole, έτσι και στην κβαντική υπολογιστική έχουμε οικουμενικές πύλες, με μία μικρή υποσημείωση που θα δούμε και παρακάτω.

3.1 Από το qubit στη σφαίρα του Bloch

Ας θεωρήσουμε ένα qubit στην κατάσταση

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$

με a, b μιγαδικούς αριθμούς τέτοιους ώστε

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

Με την πρώτη ματιά, το $|\psi\rangle$ φαίνεται να καθορίζεται από τέσσερις πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των $a = a_r + ja_i$ και $b = b_r + jb_i$ όπου με a_r και a_i συμβολίζουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του a αντίστοιχα και b_r και b_i συμβολίζουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του b αντίστοιχα. Η συνθήκη κανονικοποίησης της παραπάνω εξίσωσης ωστόσο σημαίνει

ότι τα a και b δεν είναι ανεξάρτητα και ως εκ τούτου τα φανταστικά και πραγματικά μέρη αυτών αριθμών θα πρέπει:

$$a_r^2 + a_i^2 + b_r^2 + b_i^2 = 1$$

Η παραπάνω σχέση θα δούμε αμέσως όμως ότι στην πραγματικότητα χρειαζόμαστε μόνο δύο και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι δύο καταστάσεις που $|\psi\rangle$ και $|\phi\rangle = e^{j\gamma} |\psi\rangle$ που διαφέρουν μόνο κατά έναν παράγοντα φάσης $e^{j\gamma}$, όπου το γ είναι πραγματικός, είναι ισοδύναμες. Πράγματι η κατάσταση $|\phi\rangle$ γράφεται:

$$|\phi\rangle = ae^{j\gamma} |0\rangle + be^{j\gamma} |1\rangle$$

οπότε οι πιθανότητες P_0 και P_1 να εμφανιστεί το $|0\rangle$ ή το $|1\rangle$ είναι ίδιες με αυτές της $|\psi\rangle$,

$$P_0 = |ae^{j\gamma}|^2 = |a|^2$$

$$P_1 = |be^{j\gamma}|^2 = |b|^2$$

Γενικότερα για οποιαδήποτε τελεστή προβολής που εμφανίζεται σε μία μέτρηση, $\hat{\mathcal{P}} = |\omega\rangle \langle \omega|$, μπορούμε να σκεφτούμε, θα έχουμε για την πιθανότητα που σχετίζεται με την προβολή:

$$\langle \phi | \hat{\mathcal{P}} | \phi \rangle = \langle \phi | \omega \rangle \langle \omega | \phi \rangle = \langle \psi e^{j\gamma} | \omega \rangle \langle \omega | \psi e^{j\gamma} \rangle$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι:

$$\langle \psi e^{j\gamma} | = e^{-j\gamma} \langle \psi |$$

οπότε θα έχουμε:

$$\langle \psi e^{j\gamma} | \omega \rangle = e^{-j\gamma} \langle \psi | \omega \rangle$$

Τελικά:

$$\langle \psi e^{j\gamma} | \omega \rangle \langle \omega | \psi e^{j\gamma} \rangle = e^{-j\gamma} e^{j\gamma} \langle \psi | \omega \rangle \langle \omega | \psi \rangle = \langle \psi | \omega \rangle \langle \omega | \psi \rangle$$

οπότε προκύπτει ότι:

$$\langle \psi | \omega \rangle \langle \omega | \psi \rangle = \langle \phi | \omega \rangle \langle \omega | \phi \rangle$$

Προκύπτει δηλαδή ότι Οι πιθανότητες που υπολογίζονται από τις $|\phi\rangle$ και $|\psi\rangle$ είναι πάντα οι ίδιες και ως εκ τούτου οι δύο αυτές καταστάσεις πρέπει να περιγράφουν το ίδιο σύστημα και ως εκ τούτου είναι απολύτως ισοδύναμες. Ο παράγοντας $e^{j\gamma}$ ονομάζεται καθολική φάση.

Χρησιμοποιώντας αυτή την ελευθερία, ας γράψουμε τα a, b σε πολική μορφή, $a = |a|e^{j\phi_a}$ και $b = |b|e^{j\phi_b}$, οπότε

$$|\psi\rangle = |a|e^{j\phi_a} |0\rangle + |b|e^{j\phi_b} |1\rangle = e^{j\phi_a} \left(|a| |0\rangle + |b|e^{j(\phi_b - \phi_a)} |1\rangle \right).$$

Εφόσον ο παράγοντας $e^{j\phi_a}$ προστά από την παρένθεση είναι ακριβώς μία καθολική φάση, οπότε μπορούμε να τον αγνοήσουμε χωρίς να αλλάξουμε καμία φυσική πρόβλεψη. Γράφουμε δηλαδή το $|\psi\rangle$ ισοδύναμα ως εξής:

$$|\psi\rangle = |a| |0\rangle + |b|e^{j\phi} |1\rangle, \quad \phi = \phi_b - \phi_a,$$

Το $|a|$ (με το $|b| = \sqrt{1 - |a|^2}$ να προκύπτει αυτόματα από την κανονικοποίηση) και η σχετική φάση ϕ είναι πλέον οι μόνοι δύο πραγματικοί αριθμοί που χρειαζόμαστε.

Επειδή $0 \leq |a| \leq 1$, υπάρχει πάντα μία μοναδική γωνία $\theta \in [0, \pi]$ τέτοια ώστε

$$|a| = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Τότε,

$$|b| = \sqrt{1 - |a|^2} = \sqrt{1 - \cos^2(\theta/2)} = \sin(\theta/2)$$

Προσέξτε ότι παραπάνω κρατήσαμε την θετική ρίζα εφόσον για $\theta \in [0, \pi]$ έχουμε $\sin(\theta/2) \geq 0$ και θα πρέπει το $|b|$ να είναι θετικό ή μηδέν. Καταλήγουμε έτσι στην κανονική μορφή ενός qubit,

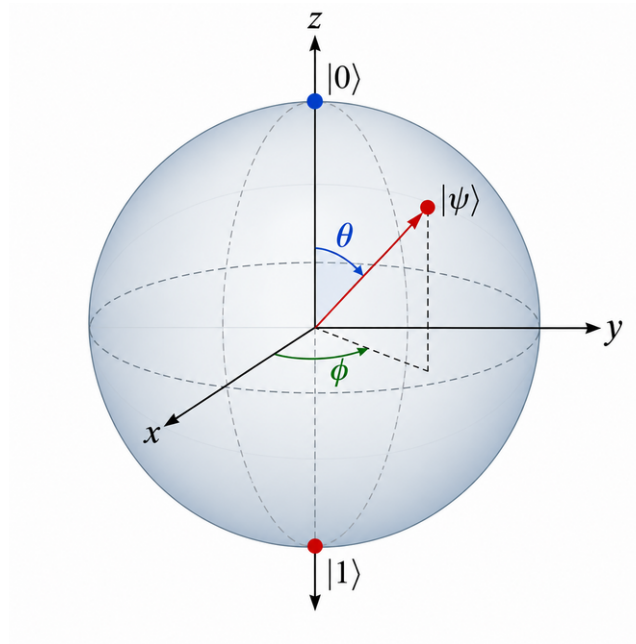
$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{j\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle,$$

που εξαρτάται αποκλειστικά από δύο μόνο πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή τις δύο γωνίες $\theta \in [0, \pi]$ και $\phi \in [0, 2\pi)$.

Δύο γωνίες είναι ακριβώς ό,τι χρειαζόμαστε για να προσδιορίσουμε ένα σημείο πάνω στην επιφάνεια μίας σφαίρας ακτίνας 1, χρησιμοποιώντας τις συνήθεις σφαιρικές συντεταγμένες: το θ παίζει τον ρόλο της πολικής γωνίας (η γωνία που σχηματίζει το σημείο με τον άξονα z) και το ϕ τον ρόλο της αζιμουθιακής γωνίας (η γωνία της προβολής του σημείου στο επίπεδο $x-y$ με τον άξονα x). Οι καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) του σημείου δίνονται τότε από τις γνωστές σχέσεις:

$$x = \sin \theta \cos \phi, \quad y = \sin \theta \sin \phi, \quad z = \cos \theta.$$

Καταλήγουμε έτσι στην *σφαίρα του Bloch*: κάθε κατάσταση ενός qubit καθορίζει τις γωνίες θ και ϕ και ισοδυναμεί με ένα μοναδικό σημείο πάνω στην επιφάνεια μίας μοναδιαίας σφαίρας, και αντίστροφα. Απλά καλό είναι να θυμόμαστε ότι πάντα αναφερόμαστε στην κανονική μορφή του qubit και η καθολική φάση έχει επιλεγεί έτσι ώστε το πλάτος $a = \cos(\theta/2) \geq 0$ να είναι θετικός αριθμός ή μηδέν.



Σχήμα 3.1: Η σφαίρα του Bloch: μία κατάσταση qubit $|\psi\rangle$ αναπαρίσταται ως σημείο στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας, με πολική γωνία θ και αζιμουθιακή γωνία ϕ . Οι πόλοι $|0\rangle$ και $|1\rangle$ βρίσκονται στον άξονα z .

Παράδειγμα 3.1: Οι έξι πόλοι της σφαίρας Bloch

Ας επιβεβαιώσουμε ότι οι έξι ειδικές καταστάσεις spin που είδαμε στις ενότητες 1.15 και 1.16 αντιστοιχούν πράγματι στους έξι πόλους της σφαίρας Bloch, δηλαδή στα σημεία τομής της με τους άξονες x, y, z .

Για το $|0\rangle$ έχουμε $a = 1, b = 0$, οπότε

$$\theta = 2 \arccos(1) = 0$$

(η τιμή του ϕ δεν έχει καμία σημασία όταν $\theta = 0$, αφού τότε βρισκόμαστε ακριβώς πάνω στον πόλο), δηλαδή

$$(x, y, z) = (0, 0, 1),$$

τον βόρειο πόλο. Για το $|1\rangle$ έχουμε $a = 0, b = 1$, άρα

$$\theta = 2 \arccos(0) = \pi,$$

δίνοντας

$$(x, y, z) = (0, 0, -1),$$

τον νότιο πόλο.

Ας θεωρήσουμε τώρα τα:

$$|+x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$|-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

έχουμε και στις δύο περιπτώσεις $|a| = |b| = 1/\sqrt{2}$, άρα

$$\theta = 2 \arccos(1/\sqrt{2}) = \pi/2$$

Τα σημεία με $\theta = \pi/2$ βρίσκονται στο επίπεδο xy δηλαδή πάνω στον “ισημερινό” της σφαίρας Bloch. Το $b = \pm 1/\sqrt{2}$ είναι πραγματικός, οπότε η σχετική φάση είναι

$$\phi = \arg(1/\sqrt{2}) = 0 \text{ για το } |+x\rangle, \quad \phi = \arg(-1/\sqrt{2}) = \pi \text{ για το } |-x\rangle.$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) \text{ για το } |+x\rangle, \quad (x, y, z) = (-1, 0, 0) \text{ για το } |-x\rangle,$$

δηλαδή ακριβώς οι δύο πόλοι πάνω στον άξονα x .

Τέλος, για τα

$$|+y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + j|1\rangle)$$

$$|-y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - j|1\rangle)$$

έχουμε πάλι $\theta = \pi/2$. Τώρα όμως το $b = \pm j/\sqrt{2}$ είναι καθαρά φανταστικός, οπότε

$$\phi = \arg(j/\sqrt{2}) = \pi/2 \text{ για το } |+y\rangle, \quad \phi = \arg(-j/\sqrt{2}) = -\pi/2 \text{ για το } |-y\rangle.$$

Αυτό δίνει

$$(x, y, z) = (0, 1, 0) \text{ για το } |+y\rangle, \quad (x, y, z) = (0, -1, 0) \text{ για το } |-y\rangle,$$

δηλαδή τους δύο πόλους πάνω στον άξονα y .

Επιβεβαιώσαμε έτσι ότι οι έξι καταστάσεις spin αντιστοιχούν ακριβώς στους έξι πόλους της σφαίρας Bloch όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.2, όπως είχαμε υποσχεθεί.

Αξίζει τέλος να σημειώσουμε δύο ακόμα χρήσιμα σημεία. Πρώτον, η αντιστοιχία ανάμεσα σε καταστάσεις qubit (στην κανονική τους μορφή) και σημεία της σφαίρας είναι *αμφιμονοσήμαντη*: όπως κάθε qubit αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό σημείο (x, y, z) , έτσι και κάθε σημείο της σφαίρας προσδιορίζει μονοσήμαντα την κανονική κατάσταση του qubit από το οποίο προήλθε, αφού μπορούμε πάντα να αντιστρέψουμε τις παραπάνω σχέσεις και να ξαναβρούμε τα $\theta = \arccos z$ και $\phi = \arg(x + jy)$.

Δεύτερον, μπορούμε να υπολογίσουμε απευθείας τις συντεταγμένες x, y, z απευθείας από τα πλάτη a, b χωρίς να υπολογίσουμε τις γωνίες θ, ϕ . Θεωρώντας το $a = |a|$ πραγματικό και μη αρνητικό (έχοντας ήδη αφαιρέσει την καθολική φάση) και χρησιμοποιώντας τις γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες

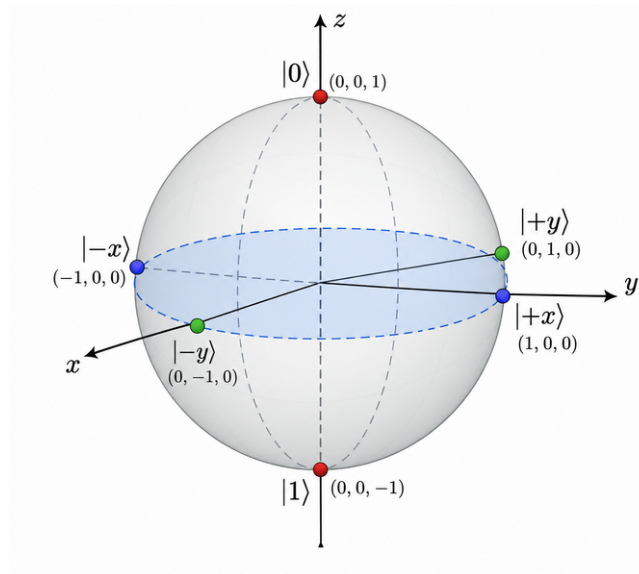
$$\sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$$

$$\cos \theta = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)$$

και το γεγονός ότι:

$$a = \cos \frac{\theta}{2}$$

$$b = \sin \frac{\theta}{2} e^{j\phi}$$



Σχήμα 3.2: Τα σημεία που αντιστοιχούν στο παράδειγμα 3.1.

Θα έχουμε:

$$\text{Re}(b) = \sin \frac{\theta}{2} \cos \phi$$

$$\text{Im}(b) = \sin \frac{\theta}{2} \sin \phi$$

Κάνοντας τις πράξεις, βρίσκουμε ότι:

$$z = \cos \theta = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) = a^2 - |b|^2$$

$$y = \sin \theta \sin \phi = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \phi = 2a\text{Im}(b)$$

$$x = \sin \theta \cos \phi = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \phi = 2a\text{Re}(b)$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι μία εξαιρετικά βολική συνταγή, για παράδειγμα, όταν θέλουμε να υπολογίσουμε αριθμητικά (π.χ. σε Python) το σημείο της σφαίρας Bloch που αντιστοιχεί σε ένα δεδομένο qubit. Θα χτίσουμε σταδιακά, σε όλες τις επόμενες ενότητες, μία μικρή βιβλιοθήκη `qulib.py` με μία κλάση `Qubit` που αναπαριστά ένα qubit με τα πλάτη του a, b . Η μέθοδος που υπολογίζει ακριβώς τις παραπάνω σχέσεις είναι η εξής:

```
def bloch(self):
    a, b = self.a, self.b
    x = (a.conjugate() * b + b.conjugate() * a).real
    y = -2 * (a * b.conjugate()).imag
    z = abs(a)**2 - abs(b)**2
    return x, y, z
```

Ένα ολοκληρωμένο παράδειγμα χρήσης, που υπολογίζει τις συντεταγμένες Bloch για τις έξι καταστάσεις του παραδείγματος 3.1, βρίσκεται στο αρχείο `python/ex_bloch_six_poles.py`:

```
import math

from qulib import Qubit

states = {
    "|0>": Qubit(1, 0),
    "|1>": Qubit(0, 1),
```

```

    "+x>": Qubit(1 / math.sqrt(2), 1 / math.sqrt(2)),
    "-x>": Qubit(1 / math.sqrt(2), -1 / math.sqrt(2)),
    "+y>": Qubit(1 / math.sqrt(2), 1j / math.sqrt(2)),
    "-y>": Qubit(1 / math.sqrt(2), -1j / math.sqrt(2)),
}

for name, q in states.items():
    x, y, z = q.bloch()
    print(f"{name}: (x, y, z) = ({x:.3f}, {y:.3f}, {z:.3f})")

```

Παράδειγμα 3.2: Από τη σφαίρα Bloch πίσω στο qubit

Ας δούμε τώρα το αντίστροφο πρόβλημα: δίνεται ένα σημείο της σφαίρας Bloch,

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right),$$

και θέλουμε να βρούμε το αντίστοιχο qubit $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$.

Από το z βρίσκουμε αμέσως την πολική γωνία,

$$\theta = \arccos z = \arccos(0) = \frac{\pi}{2},$$

οπότε

$$a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Από τα x, y βρίσκουμε την αζιμουθιακή γωνία,

$$\phi = \arg(x + jy) = \arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4},$$

οπότε

$$b = e^{j\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = e^{j\pi/4} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}.$$

Άρα το qubit που αντιστοιχεί στο σημείο αυτό είναι

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right)|1\rangle.$$

Ας επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τις σχέσεις-συντόμευση: με $a = 1/\sqrt{2}$ και $b = 1/2 + j/2$ έχουμε $|b|^2 = 1/2$, οπότε

$$z = a^2 - |b|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0, \quad x = 2a \operatorname{Re}(b) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = 2a \operatorname{Im}(b) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ακριβώς όπως ξεκινήσαμε.

Η αντίστοιχη μέθοδος στη βιβλιοθήκη μας, που θέτει τα a, b ενός Qubit από ένα σημείο (x, y, z) της σφαίρας Bloch, υλοποιεί ακριβώς τους παραπάνω τύπους:

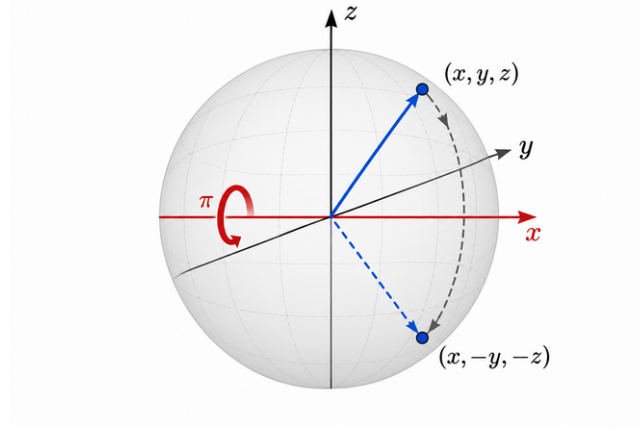
```

def set_bloch(self, x, y, z):
    theta = np.arccos(z)
    phi = np.angle(x + 1j * y)
    a = np.cos(theta / 2)
    b = np.exp(1j * phi) * np.sin(theta / 2)
    self.state = np.array([a, b], dtype=complex)

```

3.2 Οι τελεστές Pauli ως περιστροφές της σφαίρας Bloch

Είδαμε στην προηγούμενη υποενότητα πώς αντιστοιχεί κάθε κατάσταση qubit σε ένα σημείο της σφαίρας Bloch. Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει σε αυτό το σημείο όταν εφαρμόζουμε πάνω στο qubit έναν από τους τρεις τελεστές Pauli, $\hat{X}$, $\hat{Y}$ και $\hat{Z}$ που ορίσαμε στην ενότητα 1.30. Θα δούμε ότι ο καθένας τους αντιστοιχεί ακριβώς σε μία περιστροφή της σφαίρας κατά γωνία π (δηλαδή 180°) γύρω από τον ομώνυμο άξονα. Στο σχήμα 3.3 δείχνουμε μία τέτοια περιστροφή γύρω από τον άξονα των x . Στην ουσία το σημείο (x, y, z) μεταφέρεται στο σημείο $(x, -y, -z)$ δηλαδή η περιστροφή αφήνει αμετάβλητη τη συνιστώσα του σημείου κατά μήκος του άξονα περιστροφής, ενώ αντιστρέφει το πρόσημο και των δύο άλλων συνιστωσών. Το ίδιο συμβαίνει όταν περιστρέφουμε κατά π γύρω από τους άλλους δύο άξονες y και z .



Σχήμα 3.3: Περιστροφή κατά π γύρω από τον άξονα των x .

Ας ξεκινήσουμε από το qubit στην κανονική του μορφή,

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{j\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle,$$

που όπως είδαμε αντιστοιχεί στο σημείο (x, y, z) με

$$x = \sin\theta \cos\phi$$

$$y = \sin\theta \sin\phi$$

$$z = \cos\theta$$

Ας εξετάσουμε πρώτα τον τελεστή $\hat{X}$. Θυμηθείτε (ενότητα 1.30) ότι για $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ έχουμε $\hat{X}|\psi\rangle = b|0\rangle + a|1\rangle$, οπότε με $a = \cos(\theta/2)$ και $b = e^{j\phi}\sin(\theta/2)$,

$$\hat{X}|\psi\rangle = e^{j\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle.$$

Ο συντελεστής του $|0\rangle$ δεν είναι πραγματικός, οπότε για να φέρουμε την κατάσταση στην κανονική μορφή αφαιρούμε την καθολική φάση $e^{j\phi}$,

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{-j\phi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle.$$

Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες

$$\sin\frac{\theta}{2} = \cos\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right)$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sin\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right)$$

αναγνωρίζουμε την παραπάνω ως την κανονική μορφή $|\Psi\rangle$ ενός qubit

$$|\Psi\rangle = \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)|0\rangle + e^{j\Phi}\sin\left(\frac{\Theta}{2}\right)|1\rangle,$$

με νέες γωνίες

$$\Theta = \pi - \theta, \quad \Phi = -\phi.$$

Το αντίστοιχο σημείο (X, Y, Z) της σφαίρας είναι επομένως

$$X = \sin \Theta \cos \Phi = \sin \theta \cos \phi = x,$$

$$Y = \sin \Theta \sin \Phi = -\sin \theta \sin \phi = -y,$$

$$Z = \cos \Theta = -\cos \theta = -z,$$

δηλαδή $(x, y, z) \rightarrow (x, -y, -z)$, που είναι ακριβώς η περιστροφή κατά π γύρω από τον άξονα x που περιμέναμε.

Με τον ίδιο τρόπο εξετάζουμε τον τελεστή $\hat{Y}$ αλλά και τον συντελεστή $\hat{Z}$ και προκύπτει το παρακάτω αποτέλεσμα:

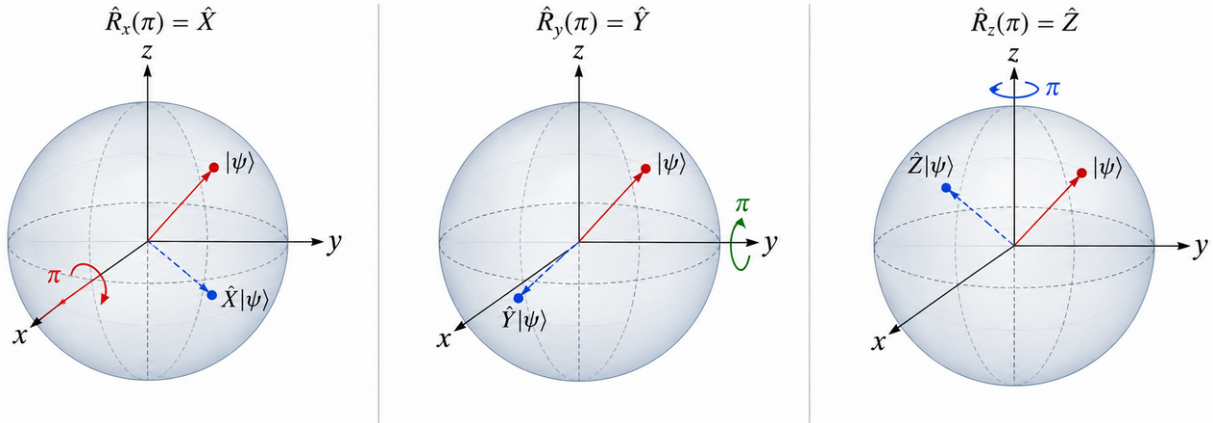
Αποτέλεσμα 3.1: Οι πίνακες Pauli ως περιστροφές κατά π

Όπως δείχνει και το σχήμα 3.4, οι τρεις τελεστές Pauli αντιστοιχούν σε περιστροφές της σφαίρας Bloch κατά γωνία π (δηλαδή 180°) γύρω από τον ομώνυμο άξονα:

$$\hat{X} : (x, y, z) \rightarrow (x, -y, -z), \quad \hat{Y} : (x, y, z) \rightarrow (-x, y, -z), \quad \hat{Z} : (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z).$$

Επειδή πρόκειται ακριβώς για περιστροφές κατά γωνία π , θα τους συμβολίζουμε από εδώ και πέρα (όπου χρειάζεται να τονίσουμε αυτή τη γεωμετρική τους σημασία) και ως

$$\hat{R}_x(\pi) = \hat{X}, \quad \hat{R}_y(\pi) = \hat{Y}, \quad \hat{R}_z(\pi) = \hat{Z}.$$



Σχήμα 3.4: Οι τρεις τελεστές Pauli ως περιστροφές κατά γωνία π της σφαίρας Bloch, γύρω από τους άξονες x, y, z αντίστοιχα.

Το αποτέλεσμα αυτό δεν είναι καθόλου τυχαίο: όπως θα δούμε στη συνέχεια, κάθε μοναδιαίος τελεστής ενός qubit αντιστοιχεί σε μία περιστροφή της σφαίρας Bloch γύρω από κάποιον άξονα και κατά κάποια γωνία, και οι τρεις τελεστές Pauli $\hat{R}_x(\pi), \hat{R}_y(\pi), \hat{R}_z(\pi)$ είναι απλώς οι ειδικές περιπτώσεις περιστροφής κατά τη μέγιστη δυνατή γωνία π γύρω από τους τρεις κύριους άξονες. Γενικεύοντας τον συμβολισμό που μόλις εισαγάγαμε, θα γράφουμε $\hat{R}_n(\theta)$ για τον τελεστή της περιστροφής γύρω από τον άξονα n κατά γωνία θ .

3.3 Ο τελεστής $\hat{R}_n(\pi)$ και οι ιδιότητές του

Στην προηγούμενη υποενότητα είδαμε ότι οι τελεστές $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ που αντιστοιχούν στα $\hat{R}_x(\pi), \hat{R}_y(\pi)$ και $\hat{R}_z(\pi)$ αντίστοιχα, μεταφράζονται σε περιστροφές της σφαίρας Bloch κατά γωνία π γύρω από τους τρεις άξονες x, y, z . Είναι φυσικό να αναρωτηθούμε αν υπάρχει τελεστής που να πραγματοποιεί την ίδια περιστροφή γύρω από έναν τυχαίο άξονα που ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n}$,

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$$

με $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ και τον τελεστή:

$$\hat{R}_n(\pi) = n_x \hat{X} + n_y \hat{Y} + n_z \hat{Z}.$$

Ονομάζουμε ήδη τον τελεστή αυτό $\hat{R}_n(\pi)$, προεξοφλώντας το αποτέλεσμα που θα αποδείξουμε παρακάτω: ότι πρόκειται πράγματι για περιστροφή κατά γωνία π γύρω από το $\mathbf{n}$, γενικεύοντας τους $\hat{R}_x(\pi), \hat{R}_y(\pi), \hat{R}_z(\pi)$. Ο $\hat{R}_n(\pi)$ είναι Ερμιτιανός, αφού είναι γραμμικός συνδυασμός των Ερμιτιανών $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ με πραγματικούς συντελεστές n_x, n_y και n_z όπως δείχνουμε και στο παρακάτω παράδειγμα. Παρατηρήστε ότι οι ίδιοι οι $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ είναι απλώς οι ειδικές περιπτώσεις $\mathbf{n} = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα 3.3: Ο $\hat{R}_n(\pi)$ είναι πράγματι Ερμιτιανός, για κάθε πραγματικό $\mathbf{n}$

Ας επαληθεύσουμε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας τον πίνακα του $\hat{R}_n(\pi) = n_x \hat{X} + n_y \hat{Y} + n_z \hat{Z}$ ρητά, για τυχαία πραγματικά n_x, n_y, n_z , και όχι για κάποια συγκεκριμένη τιμή τους. Χρησιμοποιώντας τους πίνακες Pauli (ενότητα 1.30),

$$\mathbf{R}_n(\pi) = n_x \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + n_y \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} + n_z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_z & n_x - jn_y \\ n_x + jn_y & -n_z \end{bmatrix}.$$

Για να δείξουμε ότι ο πίνακας αυτός είναι Ερμιτιανός πρέπει να δείξουμε ότι $\mathbf{R}_n(\pi)^T = \mathbf{R}_n(\pi)$, δηλαδή ότι παραμένει αναλλοίωτος όταν εναλλάσσουμε γραμμές με στήλες και παίρνουμε το μιγαδικό συζυγές κάθε στοιχείου. Εναλλάσσοντας πρώτα γραμμές με στήλες,

$$\begin{bmatrix} n_z & n_x - jn_y \\ n_x + jn_y & -n_z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} n_z & n_x + jn_y \\ n_x - jn_y & -n_z \end{bmatrix},$$

και έπειτα παίρνοντας το μιγαδικό συζυγές κάθε στοιχείου, κάτι που αλλάζει μόνο το πρόσημο μπροστά από κάθε j , αφού τα n_x, n_y, n_z είναι πραγματικοί αριθμοί,

$$\begin{bmatrix} n_z & n_x + jn_y \\ n_x - jn_y & -n_z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} n_z & n_x - jn_y \\ n_x + jn_y & -n_z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_n(\pi).$$

Καταλήγουμε δηλαδή ξανά στον αρχικό πίνακα, άρα $\mathbf{R}_n(\pi)^T = \mathbf{R}_n(\pi)$: ο $\hat{R}_n(\pi)$ είναι Ερμιτιανός, για οποιονδήποτε μοναδιαίο άξονα $\mathbf{n}$ με πραγματικές συντεταγμένες και όχι μόνο για κάποια συγκεκριμένη επιλογή του. Παρατηρήστε ακριβώς πού χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση ότι τα n_x, n_y, n_z είναι πραγματικά: αν, αντίθετα, κάποιο από αυτά ήταν μιγαδικό, η συζυγία στο δεύτερο βήμα θα άλλαζε και το δικό του πρόσημο, όχι μόνο το πρόσημο μπροστά από το j , και ο τελικός πίνακας δεν θα ταυτιζόταν με τον αρχικό.

Θα χρειαστούμε επιπλέον μία χρήσιμη παρατήρηση, ότι το σημείο (x, y, z) που αντιστοιχεί η κατάσταση $|\psi\rangle$ πάνω στη σφαίρα Bloch καθορίζεται από τις μέσες τιμές των τελεστών $\hat{X}, \hat{Y}$ και $\hat{Z}$ αντίστοιχα, δηλαδή:

$$\langle \psi | \hat{X} | \psi \rangle = x$$

$$\langle \psi | \hat{Y} | \psi \rangle = y$$

$$\langle \psi | \hat{Z} | \psi \rangle = z$$

Ας το δείξουμε με την μορφή παραδείγματος:

Παράδειγμα 3.4: Οι μέσες τιμές των $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$ δίνουν τις συντεταγμένες Bloch

Θυμηθείτε από την ενότητα 1.30 ότι για $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, οι δράσεις των τελεστών περιγράφονται ως εξής:

$$\hat{X}|\psi\rangle = b|0\rangle + a|1\rangle$$

$$\hat{Y}|\psi\rangle = -jb|0\rangle + ja|1\rangle$$

$$\hat{Z}|\psi\rangle = a|0\rangle - b|1\rangle$$

Θυμηθείτε επίσης (παράδειγμα 1.4) ότι τα $|0\rangle, |1\rangle$ είναι ορθοκανονικά, δηλαδή $\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$ και $\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0$, ενώ το bra της $|\psi\rangle$ είναι $\langle\psi| = a^*\langle 0| + b^*\langle 1|$.

Ας υπολογίσουμε αναλυτικά τη μέση τιμή του $\hat{X}$. Αντικαθιστώντας το $\hat{X}|\psi\rangle = b|0\rangle + a|1\rangle$,

$$\langle\psi|\hat{X}|\psi\rangle = (a^*\langle 0| + b^*\langle 1|)(b|0\rangle + a|1\rangle).$$

Αναπτύσσοντας το γινόμενο σε τέσσερις όρους,

$$\langle\psi|\hat{X}|\psi\rangle = a^*b\langle 0|0\rangle + a^*a\langle 0|1\rangle + b^*b\langle 1|0\rangle + b^*a\langle 1|1\rangle.$$

Χρησιμοποιώντας την ορθοκανονικότητα, οι δύο μεσαίοι όροι μηδενίζονται ενώ οι δύο ακραίοι επιζούν με $\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$, οπότε

$$\langle\psi|\hat{X}|\psi\rangle = a^*b + b^*a.$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, για τον $\hat{Y}$, αντικαθιστώντας το $\hat{Y}|\psi\rangle = -jb|0\rangle + ja|1\rangle$,

$$\langle\psi|\hat{Y}|\psi\rangle = (a^*\langle 0| + b^*\langle 1|)(-jb|0\rangle + ja|1\rangle) = -ja^*b\langle 0|0\rangle + ja^*a\langle 0|1\rangle - jb^*b\langle 1|0\rangle + jb^*a\langle 1|1\rangle.$$

Πάλι, οι όροι με $\langle 0|1\rangle$ και $\langle 1|0\rangle$ μηδενίζονται, και μένουμε με

$$\langle\psi|\hat{Y}|\psi\rangle = -ja^*b + jb^*a = j(ab^* - a^*b).$$

Τέλος, για τον $\hat{Z}$, αντικαθιστώντας το $\hat{Z}|\psi\rangle = a|0\rangle - b|1\rangle$,

$$\langle\psi|\hat{Z}|\psi\rangle = (a^*\langle 0| + b^*\langle 1|)(a|0\rangle - b|1\rangle) = a^*a\langle 0|0\rangle - a^*b\langle 0|1\rangle + b^*a\langle 1|0\rangle - b^*b\langle 1|1\rangle.$$

Οι όροι με $\langle 0|1\rangle$ και $\langle 1|0\rangle$ μηδενίζονται και πάλι, οπότε

$$\langle\psi|\hat{Z}|\psi\rangle = a^*a - b^*b = |a|^2 - |b|^2.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στις τρεις μέσες τιμές:

$$\langle\psi|\hat{X}|\psi\rangle = a^*b + b^*a$$

$$\langle\psi|\hat{Y}|\psi\rangle = j(ab^* - a^*b)$$

$$\langle\psi|\hat{Z}|\psi\rangle = |a|^2 - |b|^2$$

Ας επαληθεύσουμε αναλυτικά ότι, όταν το qubit βρίσκεται στην κανονική του μορφή, δηλαδή $a = \cos(\theta/2)$ πραγματικός και μη αρνητικός και $b = e^{j\phi} \sin(\theta/2)$, οι παραπάνω εκφράσεις ταυτίζονται ακριβώς με τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) του σημείου Bloch.

Εφόσον το a είναι πραγματικό, $a^* = a$, οπότε

$$\langle\psi|\hat{X}|\psi\rangle = a^*b + b^*a = a(b + b^*) = 2a \operatorname{Re}(b).$$

Το πραγματικό μέρος του b είναι

$$\operatorname{Re}(b) = \operatorname{Re}(e^{j\phi} \sin(\theta/2)) = \cos \phi \sin(\theta/2),$$

άρα, χρησιμοποιώντας $a = \cos(\theta/2)$ και την ταυτότητα $\sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$,

$$\langle \psi | \hat{X} | \psi \rangle = 2 \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \cos \phi = \sin \theta \cos \phi = x.$$

Με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας ξανά $a^* = a$,

$$\langle \psi | \hat{Y} | \psi \rangle = j(ab^* - a^*b) = ja(b^* - b).$$

Επειδή $b^* - b = -2j \operatorname{Im}(b)$ για κάθε μιγαδικό b , έχουμε

$$\langle \psi | \hat{Y} | \psi \rangle = ja \cdot (-2j \operatorname{Im}(b)) = 2a \operatorname{Im}(b).$$

Το φανταστικό μέρος του b είναι

$$\operatorname{Im}(b) = \operatorname{Im} \left(e^{j\phi} \sin(\theta/2) \right) = \sin \phi \sin(\theta/2),$$

οπότε, με τον ίδιο τρόπο όπως πριν,

$$\langle \psi | \hat{Y} | \psi \rangle = 2 \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \sin \phi = \sin \theta \sin \phi = y.$$

Τέλος, από τη σχέση $|b|^2 = \sin^2(\theta/2)$ (η οποία ισχύει αφού το $\sin(\theta/2)$ είναι ήδη πραγματικό και μη αρνητικό) και τη διπλή γωνία $\cos \theta = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)$,

$$\langle \psi | \hat{Z} | \psi \rangle = |a|^2 - |b|^2 = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) = \cos \theta = z.$$

Επιβεβαιώσαμε λοιπόν ότι

$$\langle \psi | \hat{X} | \psi \rangle = x$$

$$\langle \psi | \hat{Y} | \psi \rangle = y$$

$$\langle \psi | \hat{Z} | \psi \rangle = z$$

Η ταύτιση αυτή είναι εξαιρετικά χρήσιμη: μας επιτρέπει να δουλέψουμε απευθείας με τελεστές, χωρίς να χρειάζεται να περνάμε συνέχεια από τις γωνίες θ, ϕ . Στη συνέχεια θα δείξουμε ένα ακόμα χρήσιμο αποτέλεσμα: ο τελεστής $\hat{R}_n(\pi)$ αντιστρέφεται από τον εαυτό του, δηλαδή:

$$\hat{R}_n^2(\pi) = \hat{R}_n(\pi) \hat{R}_n(\pi) = \hat{I}$$

Παράδειγμα 3.5: Ο $\hat{R}_n(\pi)$ αντιστρέφεται από τον εαυτό του

Ας δείξουμε τώρα ότι $\hat{R}_n(\pi)^2 = \hat{I}$. Είδαμε ήδη στο παράδειγμα 2.7, ότι $\hat{X}\hat{Y} = j\hat{Z}$ και $\hat{Y}\hat{X} = -j\hat{Z}$. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο (κυκλική εναλλαγή των δεικτών $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$) βρίσκουμε:

$$\hat{Y}\hat{Z} = j\hat{X}$$

$$\hat{Z}\hat{Y} = -j\hat{X}$$

$$\hat{Z}\hat{X} = j\hat{Y}$$

$$\hat{X}\hat{Z} = -j\hat{Y}$$

ενώ φυσικά $\hat{X}^2 = \hat{Y}^2 = \hat{Z}^2 = \hat{I}$. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω πινακάκι, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \hat{R}_n^2(\pi) &= (n_x \hat{X} + n_y \hat{Y} + n_z \hat{Z})^2 \\ &= (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \hat{I} + n_x n_y (\hat{X}\hat{Y} + \hat{Y}\hat{X}) + n_y n_z (\hat{Y}\hat{Z} + \hat{Z}\hat{Y}) + n_z n_x (\hat{Z}\hat{X} + \hat{X}\hat{Z}). \end{aligned}$$

Κάθε ένας από τους τρεις τελευταίους όρους μηδενίζεται, αφού π.χ. $\hat{X}\hat{Y} + \hat{Y}\hat{X} = j\hat{Z} - j\hat{Z} = 0$ (και ανάλογα για τους άλλους δύο), ενώ $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ αφού το $\mathbf{n}$ είναι μοναδιαίο. Μένουμε λοιπόν με

$$\hat{R}_{\mathbf{n}}^2(\pi) = \hat{I}.$$

Ακριβώς όπως και για τους $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$, που είναι άλλωστε ειδικές περιπτώσεις του $\hat{R}_{\mathbf{n}}(\pi)$, η σχέση $\hat{R}_{\mathbf{n}}^2(\pi) = \hat{I}$ περιορίζει και τις ιδιοτιμές του. Ας δούμε πώς, βρίσκοντας παράλληλα και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

Παράδειγμα 3.6: Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του $\hat{R}_{\mathbf{n}}(\pi)$

Αν $\hat{R}_{\mathbf{n}}|\chi\rangle = \lambda|\chi\rangle$ τότε:

$$|\chi\rangle = \hat{R}_{\mathbf{n}}^2(\pi)|\chi\rangle = \lambda^2|\chi\rangle$$

άρα $\lambda^2 = 1$, δηλαδή ο $\hat{R}_{\mathbf{n}}(\pi)$ έχει δύο ιδιοτιμές,

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1,$$

με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $|\chi_1\rangle$ και $|\chi_2\rangle$. Ας βρούμε τώρα το $|\chi_1\rangle$. Έστω $\mathbf{r}_1$ το αντίστοιχο σημείο του πάνω στη σφαίρα Bloch. Εξ ορισμού, το $|\chi_1\rangle$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $\hat{R}_{\mathbf{n}}(\pi)$ με ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$, δηλαδή

$$\hat{R}_{\mathbf{n}}(\pi)|\chi_1\rangle = \lambda_1|\chi_1\rangle = |\chi_1\rangle.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη από αριστερά με το $\langle\chi_1|$,

$$\langle\chi_1|\hat{R}_{\mathbf{n}}(\pi)|\chi_1\rangle = \langle\chi_1|\chi_1\rangle.$$

Το $|\chi_1\rangle$, όπως κάθε φυσική κατάσταση qubit, είναι κανονικοποιημένο, δηλαδή $\langle\chi_1|\chi_1\rangle = 1$, οπότε

$$\langle\chi_1|\hat{R}_{\mathbf{n}}(\pi)|\chi_1\rangle = 1.$$

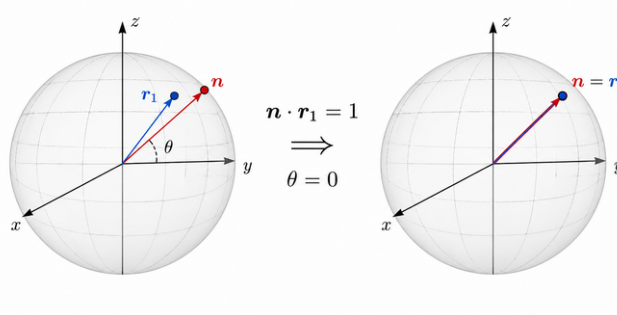
Όμως, από την παρατήρηση παραπάνω και τη γραμμικότητα της μέσης τιμής,

$$\langle\chi_1|\hat{R}_{\mathbf{n}}(\pi)|\chi_1\rangle = n_x \langle\chi_1|\hat{X}|\chi_1\rangle + n_y \langle\chi_1|\hat{Y}|\chi_1\rangle + n_z \langle\chi_1|\hat{Z}|\chi_1\rangle = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_1.$$

Άρα $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_1 = 1$. Εφόσον όμως τόσο το $\mathbf{n}$ όσο και το $\mathbf{r}_1$ είναι μοναδιαία διανύσματα ο μόνος τρόπος για να έχουν εσωτερικό γινόμενο ίσο με 1 είναι να ταυτίζονται όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.5. Αυτό φαίνεται και από την ανισότητα Cauchy-Schwarz $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_1 \leq |\mathbf{n}||\mathbf{r}_1| = 1$ γίνεται ισότητα μόνο όταν τα δύο διανύσματα ταυτίζονται,

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{n}.$$

Το $|\chi_1\rangle$ είναι λοιπόν ακριβώς η κατάσταση qubit που αντιστοιχεί στο ίδιο το σημείο $\mathbf{n}$ της σφαίρας Bloch! Με τον ίδιο τρόπο, το $|\chi_2\rangle$ αντιστοιχεί στο αντιδιαμετρικό σημείο $\mathbf{r}_2 = -\mathbf{n}$.



Σχήμα 3.5: Μοναδιαία διανύσματα με εσωτερικό γινόμενο την μονάδα.

Παράδειγμα 3.7: Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του $\hat{R}_n(\pi)$ για ένα συγκεκριμένο n

Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω στη συγκεκριμένη περίπτωση

$$\mathbf{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Επαληθεύουμε πρώτα ότι πρόκειται όντως για μοναδιαίο διάνυσμα,

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1.$$

Ο αντίστοιχος τελεστής είναι

$$\hat{R}_n(\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{X} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{Z},$$

με ιδιοτιμές, όπως δείξαμε παραπάνω για κάθε μοναδιαίο $\mathbf{n}$,

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1.$$

Για τα ιδιοδιανύσματα, χρησιμοποιούμε ότι το $|\chi_1\rangle$ αντιστοιχεί ακριβώς στο σημείο $\mathbf{n}$ της σφαίρας Bloch. Οι γωνίες θ, ϕ του σημείου αυτού δίνονται όπως είδαμε και στην ενότητα 3.1 από τις σχέσεις:

$$\theta = \arccos(n_z) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad \phi = \arg(n_x + jn_y) = \arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Άρα

$$|\chi_1\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)|1\rangle.$$

Το $|\chi_2\rangle$ αντιστοιχεί στο αντιδιαμετρικό σημείο $-\mathbf{n}$, δηλαδή στις γωνίες $\theta' = \pi - \theta = 3\pi/4$ και $\phi' = \phi + \pi = \pi$,

$$|\chi_2\rangle = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)|0\rangle + e^{j\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)|1\rangle = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)|0\rangle - \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)|1\rangle,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $\cos(3\pi/8) = \sin(\pi/8)$, $\sin(3\pi/8) = \cos(\pi/8)$ και $e^{j\pi} = -1$.

Ας επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα και απευθείας, υπολογίζοντας τον πίνακα του $\hat{R}_n(\pi)$ στη βάση $|0\rangle, |1\rangle$. Θυμηθείτε (παράδειγμα 1.11) ότι τα στοιχεία h_{pq} του πίνακα ενός τελεστή $\hat{H}$ σε μία βάση $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ δίνονται από $h_{pq} = \langle\psi_p|\hat{H}|\psi_q\rangle$. Εδώ $|\psi_1\rangle = |0\rangle$, $|\psi_2\rangle = |1\rangle$, και εφόσον $n_y = 0$ ο τελεστής μας απλοποιείται σε $\hat{R}_n(\pi) = n_x\hat{X} + n_z\hat{Z}$, οπότε αρκεί η γνωστή δράση (ενότητα 1.30) $\hat{X}|0\rangle = |1\rangle$, $\hat{X}|1\rangle = |0\rangle$, $\hat{Z}|0\rangle = |0\rangle$, $\hat{Z}|1\rangle = -|1\rangle$. Δρώντας με τον $\hat{R}_n$ πάνω στα $|0\rangle, |1\rangle$,

$$\hat{R}_n(\pi)|0\rangle = n_x\hat{X}|0\rangle + n_z\hat{Z}|0\rangle = n_z|0\rangle + n_x|1\rangle$$

$$\hat{R}_n(\pi)|1\rangle = n_x\hat{X}|1\rangle + n_z\hat{Z}|1\rangle = n_x|0\rangle - n_z|1\rangle.$$

Τα τέσσερα στοιχεία του πίνακα προκύπτουν τώρα παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο με τα $\langle 0|$, $\langle 1|$ και χρησιμοποιώντας την ορθοκανονικότητα (παράδειγμα 1.4),

$$R_{11} = \langle 0|\hat{R}_n(\pi)|0\rangle = n_z, \quad R_{12} = \langle 0|\hat{R}_n(\pi)|1\rangle = n_x,$$

$$R_{21} = \langle 1|\hat{R}_n(\pi)|0\rangle = n_x, \quad R_{22} = \langle 1|\hat{R}_n(\pi)|1\rangle = -n_z.$$

Αντικαθιστώντας $n_x = n_z = 1/\sqrt{2}$, ο πίνακας του $\hat{R}_n(\pi)$ στη βάση $|0\rangle, |1\rangle$ είναι

$$\mathbf{R}_n(\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή τιμή $\tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$, ο λόγος των δύο συντελεστών του $|\chi_1\rangle$ είναι

$$\frac{\sin(\pi/8)}{\cos(\pi/8)} = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1,$$

οπότε αρκεί να εφαρμόσουμε τον πίνακα στο (μη κανονικοποιημένο) διάνυσμα $(1, \sqrt{2} - 1)$,

$$\mathbf{R}_n(\pi) \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 + (\sqrt{2} - 1) \\ 1 - (\sqrt{2} - 1) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{bmatrix},$$

δηλαδή πράγματι $\hat{R}_n(\pi) |\chi_1\rangle = |\chi_1\rangle$, όπως αναμενόταν.

3.4 Ο πίνακας του τελεστή $\hat{R}_n(\pi)$

Στο προηγούμενο παράδειγμα εμφανίστηκε, για πρώτη φορά, ο πίνακας που περιγράφει τον τελεστή $\hat{R}_n(\pi)$ στη βάση $|0\rangle, |1\rangle$ σε μία συγκεκριμένη περίπτωση όπου είχαμε και $n_y = 0$. Ας γενικεύσουμε τον υπολογισμό για τυχαίο μοναδιαίο $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$. Θυμηθείτε (ενότητα 1.30) τη δράση των $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ πάνω στα $|0\rangle, |1\rangle$,

$$\hat{X}|0\rangle = |1\rangle, \quad \hat{X}|1\rangle = |0\rangle,$$

$$\hat{Y}|0\rangle = j|1\rangle, \quad \hat{Y}|1\rangle = -j|0\rangle,$$

$$\hat{Z}|0\rangle = |0\rangle, \quad \hat{Z}|1\rangle = -|1\rangle.$$

Δρώντας με τον $\hat{R}_n(\pi) = n_x \hat{X} + n_y \hat{Y} + n_z \hat{Z}$ πάνω στα $|0\rangle, |1\rangle$ θα έχουμε επομένως:

$$\hat{R}_n(\pi)|0\rangle = n_x \hat{X}|0\rangle + n_y \hat{Y}|0\rangle + n_z \hat{Z}|0\rangle = n_z|0\rangle + (n_x + jn_y)|1\rangle,$$

$$\hat{R}_n(\pi)|1\rangle = n_x \hat{X}|1\rangle + n_y \hat{Y}|1\rangle + n_z \hat{Z}|1\rangle = (n_x - jn_y)|0\rangle - n_z|1\rangle.$$

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, τα στοιχεία του πίνακα προκύπτουν παίρνοντας εσωτερικά γινόμενα με τα $\langle 0|, \langle 1|$:

$$R_{11} = \langle 0|\hat{R}_n(\pi)|0\rangle = n_z, \quad R_{12} = \langle 0|\hat{R}_n(\pi)|1\rangle = n_x - jn_y,$$

$$R_{21} = \langle 1|\hat{R}_n(\pi)|0\rangle = n_x + jn_y, \quad R_{22} = \langle 1|\hat{R}_n(\pi)|1\rangle = -n_z.$$

Άρα στη βάση $|0\rangle, |1\rangle$, ο τελεστής $\hat{R}_n(\pi)$ περιγράφεται από τον πίνακα:

$$\mathbf{R}_n(\pi) = \begin{bmatrix} n_z & n_x - jn_y \\ n_x + jn_y & -n_z \end{bmatrix}.$$

Ας επιβεβαιώσουμε ότι η γενική αυτή σχέση συμφωνεί με το προηγούμενο παράδειγμα: για $\mathbf{n} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$, δηλαδή $n_y = 0$, δίνει

$$\mathbf{R}_n(\pi) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

ακριβώς όπως βρήκαμε εκεί. Παρατηρήστε επίσης ότι θέτοντας $\mathbf{n} = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ ξαναβρίσκουμε αμέσως τους ίδιους τους πίνακες Pauli $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ ως ειδικές περιπτώσεις.

Παράδειγμα 3.8: Ο πίνακας του $\hat{R}_n(\pi)$ για $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$

Ας εφαρμόσουμε τον γενικό τύπο για το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

όπου τώρα και οι τρεις συνιστώσες είναι μη μηδενικές (σε αντίθεση με τα $\mathbf{n}$ που είδαμε μέχρι τώρα).

Επαληθεύουμε πρώτα ότι είναι πράγματι μοναδιαίο,

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Αντικαθιστώντας στον γενικό τύπο του πίνακα,

$$\mathbf{R}_n(\pi) = \begin{bmatrix} n_z & n_x - jn_y \\ n_x + jn_y & -n_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1-j \\ 1+j & -1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήστε ότι, σε αντίθεση με το προηγούμενο παράδειγμα (όπου $n_y = 0$ και ο πίνακας ήταν πραγματικός), εδώ τα εκτός διαγωνίου στοιχεία είναι γνήσια μιγαδικοί αριθμοί, ακριβώς επειδή $n_y \neq 0$.

Ας επιβεβαιώσουμε το αποτέλεσμα υπολογίζοντας απευθείας το άθροισμα $n_x \mathbf{X} + n_y \mathbf{Y} + n_z \mathbf{Z}$,

$$\mathbf{R}_n(\pi) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1-j \\ 1+j & -1 \end{bmatrix},$$

ακριβώς όπως βρήκαμε παραπάνω. Παρατηρήστε τέλος ότι ο πίνακας είναι όντως Ερμιτιανός, όπως αναμενόταν: το στοιχείο $R_{12} = (1-j)/\sqrt{3}$ είναι πράγματι το μιγαδικό συζυγές του $R_{21} = (1+j)/\sqrt{3}$.

Παράδειγμα 3.9: Η πύλη Hadamard ως περιστροφή

Ο πίνακας

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ονομάζεται *πύλη Hadamard*, και είναι μία από τις σημαντικότερες κβαντικές πύλες: εφαρμοσμένη στα $|0\rangle, |1\rangle$ παράγει τις ισοπίθανες υπερθέσεις $|+\rangle, |-\rangle$, και αποτελεί βασικό «δομικό στοιχείο» σχεδόν κάθε κβαντικού αλγορίθμου. Χρησιμοποιείται π.χ. σχεδόν πάντα στην αρχή ενός κβαντικού κυκλώματος, για να φέρει τα qubit σε υπέρθεση πριν την εφαρμογή των υπόλοιπων πυλών.

Ας δούμε ότι η πύλη αυτή δεν είναι τίποτα άλλο από μία περιστροφή κατά γωνία π γύρω από τον άξονα

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1),$$

δηλαδή τον άξονα που διχοτομεί τους x και z . Πράγματι, θυμηθείτε (παράδειγμα 3.7) ότι για αυτό ακριβώς το $\mathbf{n}$ βρήκαμε

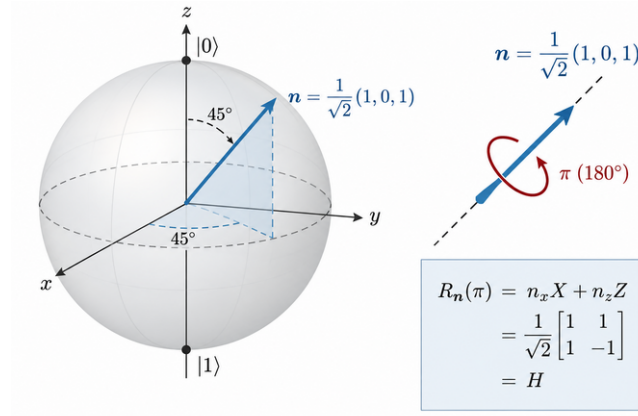
$$\mathbf{R}_n(\pi) = n_x \mathbf{X} + n_z \mathbf{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{H}.$$

Η πύλη Hadamard είναι λοιπόν ακριβώς η περιστροφή κατά 180° γύρω από τον άξονα που βρίσκεται στο επίπεδο των αξόνων x και z όπως δείχνει και το σχήμα 3.6. Η εικόνα αυτή εξηγεί εποπτικά, για παράδειγμα, γιατί $\mathbf{H}^2 = \mathbf{I}_2$ (δύο διαδοχικές περιστροφές κατά π γύρω από τον ίδιο άξονα επαναφέρουν κάθε σημείο στην αρχική του θέση), καθώς και γιατί $\mathbf{H}|0\rangle = |+\rangle$: το $|0\rangle$ αντιστοιχεί στον βόρειο πόλο $(0, 0, 1)$, που βρίσκεται σε γωνία 45° από τον άξονα $\mathbf{n}$, οπότε η περιστροφή κατά 180° γύρω από το $\mathbf{n}$ τον στέλνει ακριβώς στο συμμετρικό του σημείο ως προς το $\mathbf{n}$, δηλαδή στο $(1, 0, 0)$, τον πόλο του $|+\rangle$.

Αποτέλεσμα 3.2: Ο πίνακας $\mathbf{R}_n(\pi)$ στη βάση $|0\rangle, |1\rangle$

Στη βάση $|0\rangle, |1\rangle$, ο τελεστής $\hat{\mathbf{R}}_n(\pi) = n_x \hat{\mathbf{X}} + n_y \hat{\mathbf{Y}} + n_z \hat{\mathbf{Z}}$ περιγράφεται από τον πίνακα

$$\mathbf{R}_n(\pi) = \begin{bmatrix} n_z & n_x - jn_y \\ n_x + jn_y & -n_z \end{bmatrix}.$$

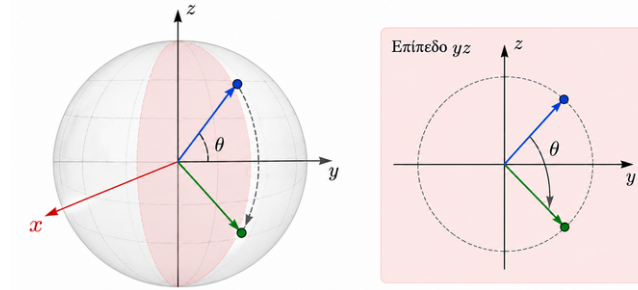


Σχήμα 3.6: Η περιστροφή που αντιστοιχεί στην πύλη Hadamard.

3.5 Οι πίνακες περιστροφής γύρω από τους άξονες x, y, z στη σφαίρα Bloch

Είδαμε στην ενότητα 3.2 ότι οι τελεστές $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ αντιστοιχούν σε περιστροφές της σφαίρας Bloch κατά γωνία π γύρω από τους αντίστοιχους άξονες. Είναι καιρός να δούμε τι συμβαίνει όταν η γωνία δεν είναι ίση με π αλλά μία οποιαδήποτε γωνία θ . Πριν όμως το κάνουμε αυτό, ας εκφράσουμε πρώτα αυτές τις περιστροφές ως 3×3 πίνακες που δρουν πάνω στο σύνηθες τρισδιάστατο διάνυσμα $\mathbf{r} = (x, y, z)$ στο τρισδιάστατο χώρο που χρησιμοποιούμε για την σφαίρα Bloch.

Ας βρούμε τον πίνακα που περιγράφει μία περιστροφή κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα x όπως αυτή που δείχνουμε στο 3.7. Μία τέτοια περιστροφή αφήνει, αμετάβλητη τη συνιστώσα x κάθε σημείου εφόσον ο άξονας περιστροφής είναι ο ίδιος ο άξονας x , ενώ περιστρέφει το ζεύγος (y, z) μέσα στο επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα, γύρω από την αρχή των αξόνων.



Σχήμα 3.7: Στροφή γύρω από τον άξονα των x κατά γωνία θ .

Ας θεωρήσουμε λοιπόν ένα σημείο (y, z) σε αυτό το επίπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα 3.8, και ας το γράψουμε σε πολική μορφή,

$$y = \rho \cos \alpha, \quad z = \rho \sin \alpha,$$

όπου $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$ η απόσταση του σημείου από τον άξονα x και α η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα y . Όπως είπαμε και προηγουμένως, μία περιστροφή κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα x αφήνει το ρ αμετάβλητο (το σημείο παραμένει στην ίδια απόσταση από τον άξονα) και απλώς αυξάνει τη γωνία κατά θ ,

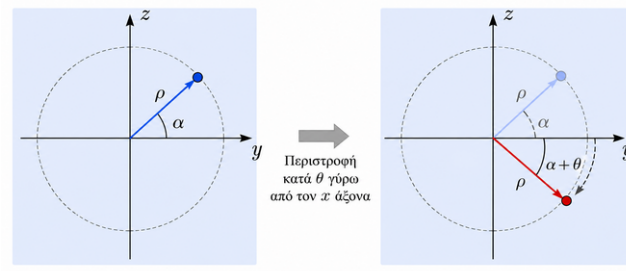
$$y' = \rho \cos(\alpha + \theta), \quad z' = \rho \sin(\alpha + \theta).$$

Αναπτύσσοντας με τις γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες του αθροίσματος γωνιών,

$$y' = \rho \cos \alpha \cos \theta - \rho \sin \alpha \sin \theta, \quad z' = \rho \sin \alpha \cos \theta + \rho \cos \alpha \sin \theta,$$

και αντικαθιστώντας $\rho \cos \alpha = y, \rho \sin \alpha = z$,

$$y' = y \cos \theta - z \sin \theta, \quad z' = y \sin \theta + z \cos \theta.$$



Σχήμα 3.8: Στροφή γύρω από τον άξονα των x κατά γωνία θ στο επίπεδο yz .

Μαζί με το $x' = x$, οι παραπάνω σχέσεις γράφονται σε μορφή πίνακα ως

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}}_{M_x(\theta)} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

δηλαδή καταλήγουμε στον πίνακα περιστροφής

$$M_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο (κυκλική εναλλαγή των αξόνων $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$), οι περιστροφές γύρω από τους y, z περιγράφονται από

$$M_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad M_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αποτέλεσμα 3.3: Οι πίνακες $M_x(\theta), M_y(\theta), M_z(\theta)$

Οι περιστροφές της σφαίρας Bloch κατά γωνία θ γύρω από τους άξονες x, y, z περιγράφονται από τους 3×3 πίνακες

$$M_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad M_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix},$$

$$M_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ας προσθέσουμε και τους τρεις αυτούς πίνακες στη βιβλιοθήκη μας `qulib.py`, ως τρεις ανεξάρτητες συναρτήσεις (όχι μεθόδους της `Qubit`, αφού δρουν πάνω σε ένα σημείο της σφαίρας Bloch και όχι πάνω σε ένα qubit):

```
def M_x(theta):
    c, s = np.cos(theta), np.sin(theta)
    return np.array([
        [1, 0, 0],
        [0, c, -s],
        [0, s, c],
    ])
```

```
def M_y(theta):
    c, s = np.cos(theta), np.sin(theta)
    return np.array([
        [c, 0, s],
        [0, 1, 0],
        [-s, 0, c],
    ])

def M_z(theta):
    c, s = np.cos(theta), np.sin(theta)
    return np.array([
        [c, -s, 0],
        [s, c, 0],
        [0, 0, 1],
    ])

```

Παράδειγμα 3.10: Οι πίνακες περιστροφής για $\theta = \pi/3$

Ας εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα 3.3 για τη συγκεκριμένη γωνία $\theta = \pi/3$ (60°), όπου $\cos(\pi/3) = 1/2$ και $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$. Αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$M_x\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad M_y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$M_z\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ας επαληθεύσουμε τον πίνακα $M_x(\pi/3)$ εφαρμόζοντάς τον στο σημείο $(0, 1, 0)$, τον βόρειο πόλο του άξονα y , δηλαδή την κατάσταση $|+y\rangle$. Το σημείο αυτό βρίσκεται ήδη πάνω στον άξονα y , σε απόσταση $\rho = 1$ από τον άξονα περιστροφής x και με γωνία $\alpha = 0$ ως προς τον άξονα y (αφού $y = \rho \cos \alpha = 1, z = \rho \sin \alpha = 0$ δίνουν $\alpha = 0$). Σύμφωνα με τη γεωμετρική περιγραφή που δώσαμε παραπάνω, η περιστροφή κατά $\theta = \pi/3$ πρέπει να αφήσει το ρ αμετάβλητο και να αυξήσει τη γωνία σε $\alpha + \theta = \pi/3$, δίνοντας το σημείο $(y', z') = (\cos(\pi/3), \sin(\pi/3)) = (1/2, \sqrt{3}/2)$. Πράγματι,

$$M_x\left(\frac{\pi}{3}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix},$$

ακριβώς όπως προβλέψαμε.

Ένα σύντομο script που επιβεβαιώνει αριθμητικά τους παραπάνω πίνακες, χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις M_x, M_y, M_z της βιβλιοθήκης μας `qulib.py`, βρίσκεται στο αρχείο `python/ex_Mxyz_pi3.py`:

```
import numpy as np

from qulib import M_x, M_y, M_z

theta = np.pi / 3

for name, M in [("M_x", M_x(theta)), ("M_y", M_y(theta)), ("M_z", M_z(theta))]:
    print(f"{name}(pi/3) =")
    print(np.round(M, 3))
    print()

```

```
point = np.array([0, 1, 0])
rotated = M_x(theta) @ point
print(f"M_x(pi/3) @ (0, 1, 0) = {np.round(rotated, 3)}")
```

Θέτοντας $\theta = \pi$ (δηλαδή $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$) παίρνουμε τους τρεις συγκεκριμένους πίνακες

$$\mathbf{M}_x(\pi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_y(\pi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_z(\pi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ας επιβεβαιώσουμε ότι αυτοί οι πίνακες αναπαράγουν ακριβώς τη δράση των $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$ πάνω στη σφαίρα Bloch. Για τον $\mathbf{M}_x(\pi)$,

$$\mathbf{M}_x(\pi) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \\ -z \end{bmatrix},$$

δηλαδή $(x, y, z) \rightarrow (x, -y, -z)$, ακριβώς η δράση του $\hat{X}$. Με τον ίδιο τρόπο,

$$\mathbf{M}_y(\pi) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \\ -z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_z(\pi) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ z \end{bmatrix},$$

που ταυτίζονται ακριβώς με τη δράση των $\hat{Y}$, $\hat{Z}$ αντίστοιχα.

Καταλήγουμε έτσι σε μία πολύ κοινή αντιστοιχία: κάθε ένας από τους τρεις τελεστές Pauli

$$\hat{R}_x(\pi) = \hat{X}$$

$$\hat{R}_y(\pi) = \hat{Y}$$

$$\hat{R}_z(\pi) = \hat{Z}$$

που δρα σε έναν διανυσματικό χώρο δύο μιγαδικών διαστάσεων αντιστοιχεί σε έναν συγκεκριμένο 3×3 πίνακα περιστροφής που δρα στον πραγματικό τρισδιάστατο χώρο της σφαίρας Bloch. Σε επόμενη υποε-
νότητα θα δούμε ότι η αντιστοιχία αυτή γενικεύεται: ο τελεστής $\hat{R}_n(\theta)$ αντιστοιχεί σε έναν 3×3 πίνακα
περιστροφής γύρω από τον τυχαίο άξονα $\mathbf{n}$ κατά γωνία θ . Ας ξεκινήσουμε όμως με την περίπτωση όπου το
 $\mathbf{n}$ ταυτίζεται με κάποιο από τα διανύσματα $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ή $\mathbf{z}$.

Αποτέλεσμα 3.4: Οι πίνακες $\mathbf{M}_x(\pi)$, $\mathbf{M}_y(\pi)$, $\mathbf{M}_z(\pi)$

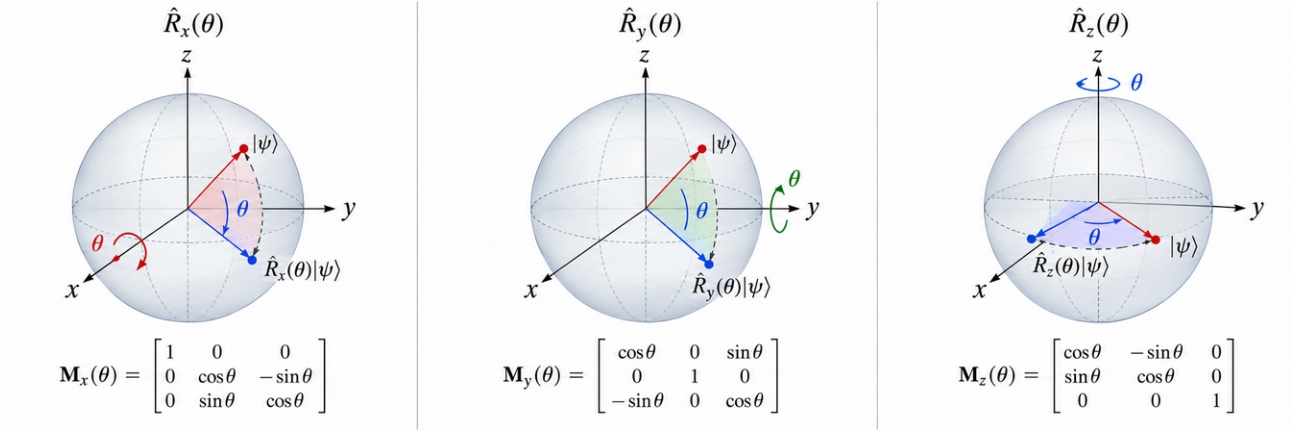
Οι περιστροφές της σφαίρας Bloch κατά γωνία π γύρω από τους άξονες x, y, z , που αντιστοιχούν στους
τελεστές $\hat{R}_x(\pi) = \hat{X}$, $\hat{R}_y(\pi) = \hat{Y}$, $\hat{R}_z(\pi) = \hat{Z}$, περιγράφονται από τους 3×3 πίνακες

$$\mathbf{M}_x(\pi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_y(\pi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_z(\pi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

δηλαδή ειδικές περιπτώσεις ($\theta = \pi$) των γνωστών πινάκων περιστροφής $\mathbf{M}_x(\theta)$, $\mathbf{M}_y(\theta)$, $\mathbf{M}_z(\theta)$ της
στερεάς γεωμετρίας.

3.6 Ο πίνακας $\mathbf{R}_x(\theta)$

Ο πίνακας $\mathbf{M}_x(\theta)$ περιγράφει πώς περιστρέφεται το σημείο (x, y, z) της σφαίρας Bloch, δηλαδή δρα πάνω σε
ένα πραγματικό διάνυσμα του τρισδιάστατου χώρου. Η πραγματική όμως κβαντική πύλη που εφαρμόζουμε
πάνω σε ένα qubit είναι ένας πίνακας 2×2 που δρα πάνω στο ίδιο το (μιγαδικό, δισδιάστατο) διάνυσμα-
κατάσταση $|\psi\rangle$. Ας βρούμε λοιπόν τον πίνακα $\mathbf{R}_x(\theta)$ που πραγματοποιεί αυτή την περιστροφή, και ας δούμε
πώς συνδέεται με τον $\mathbf{R}_x(\pi) = \mathbf{X}$ που ήδη γνωρίζουμε.



Σχήμα 3.9: Οι πίνακες περιστροφής $\mathbf{M}_x(\theta)$, $\mathbf{M}_y(\theta)$, $\mathbf{M}_z(\theta)$ γύρω από τους άξονες x, y, z , για γενική γωνία θ .

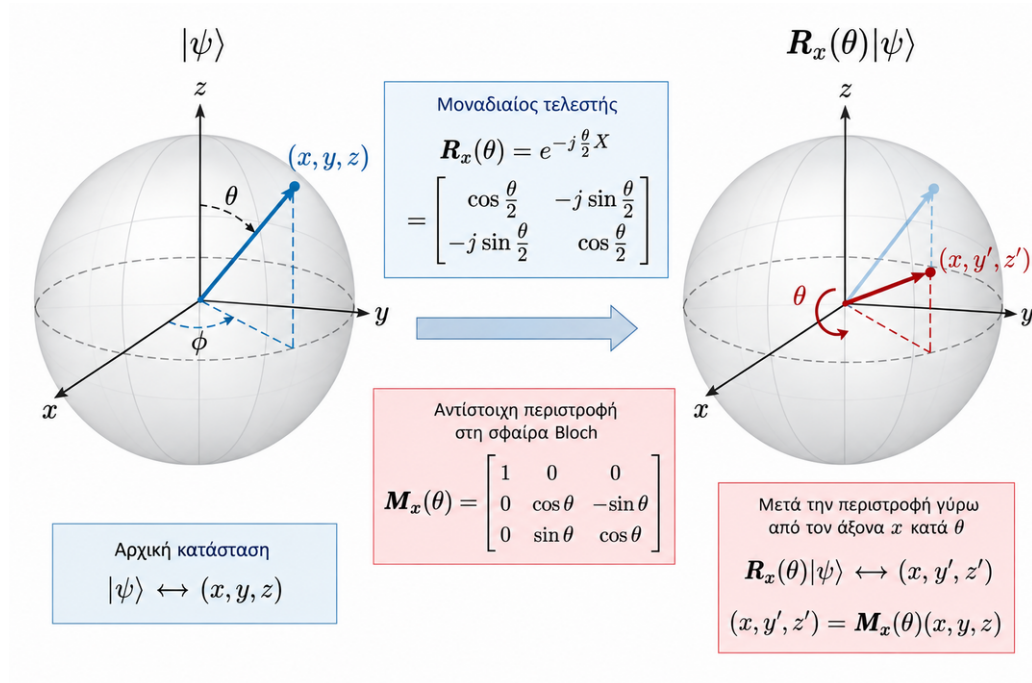
Θυμηθείτε πως στο παράδειγμα 1.18 δείξαμε ότι για κάθε πραγματικό α ,

$$e^{j\alpha X} = \cos \alpha \mathbf{I}_2 + j \sin \alpha X.$$

Θέτοντας $\alpha = -\theta/2$, αποφασίζουμε να ορίσουμε τον πίνακα $\mathbf{R}_x(\theta)$ ως εξής:

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{I}_2 - j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) X = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -j \sin(\theta/2) \\ -j \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}.$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι όταν σε μία κατάσταση $|\psi\rangle$ δρα ο τελεστής $\hat{R}_x(\theta)$ στον οποίο αντιστοιχεί ο παραπάνω πίνακας $\mathbf{R}_x(\theta)$ τότε στη σφαίρα Bloch πραγματοποιείται μία στροφή γύρω από τον άξονα x κατά γωνία θ , δηλαδή το σημείο (x, y, z) στο οποίο αντιστοιχεί η $|\psi\rangle$ πολλαπλασιάζεται με τον πίνακα $\mathbf{M}_x(\theta)$. Η ισοδυναμία αυτή που θέλουμε να δείξουμε παρουσιάζεται και στο σχήμα 3.10.



Σχήμα 3.10: Αντιστοιχία του πίνακα $\mathbf{M}_x$ και του $\mathbf{R}_x$.

Συμβολίζοντας για συντομία $c = \cos(\theta/2)$, $s = \sin(\theta/2)$, έχουμε

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} c & -js \\ -js & c \end{bmatrix}.$$

Καταρχήν ας δείξουμε ότι ο $\mathbf{R}_x(\theta)$ είναι μοναδιαίος στο παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 3.11: Ο πίνακας $\mathbf{R}_x(\theta)$ είναι μοναδιαίος

Παίρνοντας τον ανάστροφο-συζυγή του (αλλάζοντας δηλαδή το πρόσημο στα φανταστικά μέρη των στοιχείων του, αφού είναι ήδη συμμετρικός),

$$\mathbf{R}_x(\theta)^T = \begin{bmatrix} c & js \\ js & c \end{bmatrix},$$

οπότε

$$\mathbf{R}_x(\theta)\mathbf{R}_x(\theta)^T = \begin{bmatrix} c & -js \\ -js & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & js \\ js & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 + s^2 & jcs - jcs \\ -jcs + jcs & s^2 + c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2.$$

Ας δείξουμε τώρα ότι ο $\mathbf{R}_x(\theta)$ πραγματοποιεί ακριβώς την περιστροφή $\mathbf{M}_x(\theta)$ πάνω στη σφαίρα Bloch. Θεωρούμε την κατάσταση qubit ως διάνυσμα-στήλη,

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

με σημείο Bloch $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Θυμηθείτε ότι στην ενότητα 3.3 δείξαμε πως

$$x = \langle \psi | \hat{X} | \psi \rangle, \quad y = \langle \psi | \hat{Y} | \psi \rangle, \quad z = \langle \psi | \hat{Z} | \psi \rangle,$$

Ωστόσο θα μπορούσαμε απλά να επιλέξουμε την βάση $|0\rangle$ και $|1\rangle$ και να αναπαραστήσουμε τους τελεστές με πίνακες και τις καταστάσεις με δισδιάστατα διανύσματα, οπότε η δράση του τελεστή $\hat{X}|\psi\rangle$ περιγράφεται από το γινόμενο $\mathbf{X}|\psi\rangle$. Οπότε αντί για τους τελεστές στις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απευθείας τους πίνακες:

$$x = \langle \psi | \mathbf{X} | \psi \rangle, \quad y = \langle \psi | \mathbf{Y} | \psi \rangle, \quad z = \langle \psi | \mathbf{Z} | \psi \rangle,$$

Έστω $|\phi\rangle = \mathbf{R}_x(\theta)|\psi\rangle$ η κατάσταση στην έξοδο της πύλης, που απεικονίζεται στη σφαίρα Bloch με το σημείο $\mathbf{r}' = (x', y', z')$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα των πινάκων:

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

μπορούμε να δείξουμε:

$$\langle \phi | = (\mathbf{R}_x(\theta) |\psi\rangle)^T = \langle \psi | \mathbf{R}_x(\theta)^T,$$

οπότε

$$x' = \langle \phi | \mathbf{X} | \phi \rangle = \langle \psi | \mathbf{R}_x(\theta)^T \mathbf{X} \mathbf{R}_x(\theta) | \psi \rangle$$

Με τον ίδιο τρόπο:

$$y' = \langle \phi | \mathbf{Y} | \phi \rangle = \langle \psi | \mathbf{R}_x(\theta)^T \mathbf{Y} \mathbf{R}_x(\theta) | \psi \rangle$$

$$z' = \langle \phi | \mathbf{Z} | \phi \rangle = \langle \psi | \mathbf{R}_x(\theta)^T \mathbf{Z} \mathbf{R}_x(\theta) | \psi \rangle$$

Χρειαζόμαστε λοιπόν τους πίνακες $\mathbf{R}_x(\theta)^T \mathbf{X} \mathbf{R}_x(\theta)$, $\mathbf{R}_x(\theta)^T \mathbf{Y} \mathbf{R}_x(\theta)$ και $\mathbf{R}_x(\theta)^T \mathbf{Z} \mathbf{R}_x(\theta)$.

Για τον $\mathbf{R}_x(\theta)^T \mathbf{X} \mathbf{R}_x(\theta)$,

$$\mathbf{X} \mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -js \\ -js & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -js & c \\ c & -js \end{bmatrix},$$

και πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με $\mathbf{R}_x(\theta)^T$,

$$\mathbf{R}_x(\theta)^T \mathbf{X} \mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} c & js \\ js & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -js & c \\ c & -js \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -jsc + jsc & c^2 + s^2 \\ c^2 + s^2 & jsc - jsc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{X}.$$

Επομένως αν αντικαστήσουμε θα πάρουμε:

$$x' = \langle \psi | \mathbf{X} | \psi \rangle = x$$

δηλαδή η συνιστώσα πάνω στον άξονα περιστροφής μένει, όπως αναμενόταν, αμετάβλητη. Με τον ίδιο τρόπο, για τον $\mathbf{Y}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} \mathbf{R}_x(\theta) &= \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -js \\ -js & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s & -jc \\ jc & s \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R}_x(\theta)^T \mathbf{Y} \mathbf{R}_x(\theta) &= \begin{bmatrix} c & js \\ js & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s & -jc \\ jc & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2cs & -j(c^2 - s^2) \\ j(c^2 - s^2) & 2cs \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & -j \cos \theta \\ j \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τους τύπους για το διπλάσιο τόξο,

$$c^2 - s^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \cos \theta$$

$$2cs = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

Λεδομένου ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Z} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ο πίνακας $\mathbf{R}_x(\theta)^T \mathbf{Y} \mathbf{R}_x(\theta)$ γράφεται:

$$\mathbf{R}_x(\theta)^T \mathbf{Y} \mathbf{R}_x(\theta) = \cos \theta \mathbf{Y} - \sin \theta \mathbf{Z},$$

οπότε παίρνοντας τις μέσες τιμές:

$$y' = \langle \psi | (\cos \theta \mathbf{Y} - \sin \theta \mathbf{Z}) | \psi \rangle = y \cos \theta - z \sin \theta$$

Τέλος, για τον $\mathbf{Z}$, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο,

$$\mathbf{Z} \mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -js \\ -js & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -js \\ js & -c \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_x(\theta)^T \mathbf{Z} \mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} c & js \\ js & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -js \\ js & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 - s^2 & -2jcs \\ 2jcs & s^2 - c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -j \sin \theta \\ j \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} = \sin \theta \mathbf{Y} + \cos \theta \mathbf{Z},$$

δηλαδή $z' = y \sin \theta + z \cos \theta$.

Συγκεντρώνοντας τα τρία αποτελέσματα,

$$x' = x, \quad y' = y \cos \theta - z \sin \theta, \quad z' = y \sin \theta + z \cos \theta,$$

οπότε σε μορφή πίνακα:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

που είναι ακριβώς η δράση του πίνακα $\mathbf{M}_x(\theta)$ πάνω στο $\mathbf{r} = (x, y, z)$! Ο πίνακας $\mathbf{R}_x(\theta)$ πραγματοποιεί λοιπόν πράγματι, πάνω στο διάνυσμα-κατάσταση του qubit, την περιστροφή που περιγράφει ο $\mathbf{M}_x(\theta)$ πάνω στο σημείο της σφαίρας Bloch.

Παράδειγμα 3.12: Η ισοδυναμία $\mathbf{R}_x(\theta) \leftrightarrow \mathbf{M}_x(\theta)$ για $\theta = \pi/6$

Ας επαληθεύσουμε την ισοδυναμία που μόλις αποδείξαμε για τη συγκεκριμένη γωνία $\theta = \pi/6$, ξεκινώντας από την κατάσταση $|\psi\rangle = |0\rangle$, το οποίο αντιστοιχεί στο σημείο $\mathbf{r} = (0, 0, 1)$ (τον βόρειο πόλο) της

σφαίρας Bloch.

Θέτοντας $c = \cos(\pi/12)$, $s = \sin(\pi/12)$ (τη μισή γωνία), η πύλη $R_x(\pi/6)$ δίνει

$$|\phi\rangle = R_x\left(\frac{\pi}{6}\right) |0\rangle = \begin{bmatrix} c & -js \\ -js & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ -js \end{bmatrix} = c|0\rangle - js|1\rangle,$$

δηλαδή $a = c$ (πραγματικό) και $b = -js$ (καθαρά φανταστικό). Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις-συντόμευση $x = 2a \operatorname{Re}(b)$, $y = 2a \operatorname{Im}(b)$, $z = a^2 - |b|^2$ (ενότητα 3.1) βρίσκουμε το σημείο Bloch της $|\phi\rangle$,

$$x' = 2c \operatorname{Re}(-js) = 0,$$

$$y' = 2c \operatorname{Im}(-js) = -2cs = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$z' = c^2 - s^2 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

δηλαδή $\mathbf{r}' = (0, -1/2, \sqrt{3}/2)$.

Από την άλλη πλευρά, εφαρμόζοντας απευθείας τον $M_x(\pi/6)$ στο αρχικό σημείο $\mathbf{r} = (0, 0, 1)$ της $|0\rangle$,

$$M_x\left(\frac{\pi}{6}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ 0 & \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(\pi/6) \\ \cos(\pi/6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix},$$

ακριβώς το ίδιο σημείο $\mathbf{r}'$ που βρήκαμε παραπάνω δρώντας απευθείας πάνω στο $|\psi\rangle$ με τον $R_x(\pi/6)$: η ισοδυναμία επαληθεύεται.

Ας εμπλουτίσουμε τώρα τη βιβλιοθήκη μας `qulib.py` ώστε να μπορούμε να εφαρμόζουμε τέτοιες πύλες υπολογιστικά. Ορίζουμε πρώτα μία γενική κλάση `SingleQubitGate`, που αναπαριστά οποιαδήποτε πύλη ενός qubit: αρχικοποιείται με τον μοναδιαίο πίνακα 2×2 που την περιγράφει, και η μέθοδος `out` υπολογίζει την έξοδο ως `Qubit`, όταν της δίνουμε ως είσοδο ένα άλλο `Qubit`:

```
class SingleQubitGate:
    def __init__(self, U):
        self.U = np.array(U, dtype=complex)

    def out(self, qubit):
        new_state = self.U @ qubit.state
        return Qubit(new_state[0], new_state[1])

    # <matmulstart>
    def __matmul__(self, other):
        if isinstance(other, SingleQubitGate):
            return SingleQubitGate(self.U @ other.U)
        if isinstance(other, Qubit):
            return self.out(other)
        return NotImplemented
    # <matmulend>

    # <asrotationstart>
    def as_rotation(self):
        U = self.U
        det_U = U[0, 0] * U[1, 1] - U[0, 1] * U[1, 0]
        alpha = np.angle(det_U) / 2
        M = np.exp(-1j * alpha) * U
        m11, m12 = M[0, 0], M[0, 1]
        c = m11.real
        s = np.sqrt(m11.imag ** 2 + m12.real ** 2 + m12.imag ** 2)
        theta = 2 * np.arctan2(s, c)
```

```

    if s > 1e-12:
        n = np.array([-m12.imag, -m12.real, -m11.imag]) / s
    else:
        n = np.array([0.0, 0.0, 1.0])
    return n, theta, alpha
# <asrotationend>

# <eulerstart>
def euler_angles(self):
    U = self.U
    det_U = U[0, 0] * U[1, 1] - U[0, 1] * U[1, 0]
    alpha = np.angle(det_U) / 2
    M = np.exp(-1j * alpha) * U
    m11, m12 = M[0, 0], M[0, 1]
    gamma = 2 * np.arccos(np.clip(abs(m11), -1, 1))
    phi11, phi12 = np.angle(m11), np.angle(m12)
    beta = np.pi - phi11 - phi12
    delta = phi12 - phi11 - np.pi
    return alpha, beta, gamma, delta
# <eulerend>

# <eulernmstart>
def euler_angles_nm(self, n, m):
    n = np.array(n, dtype=float) / np.linalg.norm(n)
    m = np.array(m, dtype=float) / np.linalg.norm(m)
    if abs(n @ m) > 1e-10:
        raise ValueError("n and m must be perpendicular")
    # rotate n onto z: first -phi_n around z, then -theta_n around y
    theta_n = np.arccos(np.clip(n[2], -1, 1))
    phi_n = np.arctan2(n[1], n[0])
    m1 = M_y(-theta_n) @ M_z(-phi_n) @ m
    # m now lies on the xy plane: rotate it onto y around z
    phi_m = np.arctan2(m1[1], m1[0])
    V = (BlochRotationZ(np.pi / 2 - phi_m).U
         @ BlochRotationY(-theta_n).U
         @ BlochRotationZ(-phi_n).U)
    U_tilde = SingleQubitGate(V @ self.U @ V.conj().T)
    return U_tilde.euler_angles()
# <eulernmend>

# <abcstart>
def ABC(self):
    alpha, beta, gamma, delta = self.euler_angles()
    A = BlochRotationZ(beta).U @ BlochRotationY(gamma / 2).U
    B = BlochRotationY(-gamma / 2).U @ BlochRotationZ(-(beta + delta) / 2).U
    C = BlochRotationZ((delta - beta) / 2).U
    return A, B, C
# <abcend>

```

Οι πύλες $R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$, $R_z(\theta)$ (και, στην επόμενη υποενότητα, ο γενικός $R_n(\theta)$) είναι απλά ειδικές περιπτώσεις μίας `SingleQubitGate`, με τον κατάλληλο πίνακα. Ορίζουμε λοιπόν τις κλάσεις `BlochRotationX`, `BlochRotationY`, `BlochRotationZ`, που αρχικοποιούνται με μία γωνία θ και υλοποιούν ακριβώς τις πύλες αυτές:

```

class BlochRotationX(SingleQubitGate):
    def __init__(self, theta):
        c, s = np.cos(theta / 2), np.sin(theta / 2)
        U = np.array([
            [c, -1j * s],
            [-1j * s, c],

```

```

    ])
    super().__init__(U)

class BlochRotationY(SingleQubitGate):
    def __init__(self, theta):
        c, s = np.cos(theta / 2), np.sin(theta / 2)
        U = np.array([
            [c, -s],
            [s, c],
        ])
        super().__init__(U)

class BlochRotationZ(SingleQubitGate):
    def __init__(self, theta):
        c, s = np.cos(theta / 2), np.sin(theta / 2)
        U = np.array([
            [c - 1j * s, 0],
            [0, c + 1j * s],
        ])
        super().__init__(U)

```

Ένα script που επιβεβαιώνει αριθμητικά το παράδειγμα παραπάνω, χρησιμοποιώντας τη BlochRotationX και τη M_x της qulib.py, βρίσκεται στο αρχείο python/ex_Rx_Mx_pi6.py:

```

import numpy as np

from qulib import BlochRotationX, M_x, Qubit

theta = np.pi / 6

psi = Qubit(1, 0) # |0>, Bloch point (0, 0, 1)

phi = BlochRotationX(theta).out(psi)
print(f"R_x(pi/6)|0> = {phi.a:.3f} |0> + {phi.b:.3f} |1>")

x, y, z = phi.bloch()
print(f"Bloch point of R_x(pi/6)|0>: ({x:.3f}, {y:.3f}, {z:.3f})")

rotated_point = M_x(theta) @ np.array(psi.bloch())
print(f"M_x(pi/6) @ (0, 0, 1) = {np.round(rotated_point, 3)}")

```

Ας ελέγξουμε τέλος την ειδική περίπτωση $\theta = \pi$, όπου $\cos(\pi/2) = 0$ και $\sin(\pi/2) = 1$,

$$\mathbf{R}_x(\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{I}_2 - j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{X} = -j\mathbf{X}.$$

Το αποτέλεσμα αυτό δεν ταυτίζεται ακριβώς με τον ορισμό $\mathbf{R}_x(\pi) = \mathbf{X}$ που δώσαμε νωρίτερα (ενότητα 3.2), αλλά διαφέρει από αυτόν κατά έναν παράγοντα καθολικής φάσης $-j$. Όπως όμως είδαμε ήδη (ενότητα 3.1), μία καθολική φάση δεν επηρεάζει καμία φυσική πρόβλεψη, και πράγματι οι δύο πίνακες $-j\mathbf{X}$ και $\mathbf{X}$ δίνουν, όπως μόλις αποδείξαμε, την ίδια ακριβώς περιστροφή $\mathbf{M}_x(\pi)$ της σφαίρας Bloch. Οι δύο συμβολισμοί αντιστοιχούν επομένως στην ίδια φυσική πύλη, και διαφέρουν μόνο ως προς μία μη παρατηρήσιμη καθολική φάση.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο (κυκλική εναλλαγή των αξόνων) ορίζονται και οι πίνακες

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{I}_2 - j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{Y}, \quad \mathbf{R}_z(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{I}_2 - j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{Z},$$

οι οποίοι πραγματοποιούν, με τον ίδιο τρόπο, τις περιστροφές $\mathbf{M}_y(\theta)$ και $\mathbf{M}_z(\theta)$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα 3.13: Οι πίνακες $R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$, $R_z(\theta)$ για $\theta = \pi/2$

Ας υπολογίσουμε τους τρεις πίνακες για τη γωνία $\theta = \pi/2$ (περιστροφή κατά 90° , δηλαδή ούτε 0 ούτε π), όπου

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Αντικαθιστώντας στον ορισμό του $R_x(\theta)$,

$$R_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}I_2 - j\frac{1}{\sqrt{2}}X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix}.$$

Με τον ίδιο τρόπο, για τον $R_y(\theta)$,

$$R_y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}I_2 - j\frac{1}{\sqrt{2}}Y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

και για τον $R_z(\theta)$,

$$R_z\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}I_2 - j\frac{1}{\sqrt{2}}Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-j & 0 \\ 0 & 1+j \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήστε ότι, σε αντίθεση με την ειδική περίπτωση $\theta = \pi$ (όπου κάθε $R_i(\pi)$ ταυτίζεται, μέχρι καθολική φάση, με τον αντίστοιχο πίνακα Pauli X , Y ή Z), για $\theta = \pi/2$ κανένας από τους τρεις πίνακες δεν είναι πολλαπλάσιο κάποιου πίνακα Pauli. Πρόκειται πράγματι για μία «ενδιάμεση» περιστροφή, κατά το ένα τέταρτο του πλήρους γύρου.

Αποτέλεσμα 3.5: Οι πίνακες $R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$, $R_z(\theta)$

Ο πίνακας

$$R_x(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I_2 - j\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)X$$

είναι μοναδιαίος και πραγματοποιεί πάνω στο qubit ακριβώς την περιστροφή $M_x(\theta)$ της σφαίρας Bloch,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \cos \theta - z \sin \theta \\ y \sin \theta + z \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Για $\theta = \pi$ δίνει $R_x(\pi) = -jX$, το οποίο ταυτίζεται με τον X μέχρι μία μη παρατηρήσιμη καθολική φάση.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, οι πίνακες

$$R_y(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I_2 - j\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)Y, \quad R_z(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I_2 - j\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)Z$$

πραγματοποιούν πάνω στο qubit τις περιστροφές $M_y(\theta)$ και $M_z(\theta)$ αντίστοιχα,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \cos \theta + z \sin \theta \\ y \\ -x \sin \theta + z \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{για τον } R_y(\theta)),$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \\ z \end{bmatrix} \quad (\text{για τον } R_z(\theta)),$$

με $R_y(\pi) = -jY$ και $R_z(\pi) = -jZ$, ταυτιζόμενους αντίστοιχα με τους Y , Z μέχρι μία μη παρατηρήσιμη καθολική φάση.

3.7 Ο πίνακας $M_n(\theta)$ και ο τύπος του Rodrigues

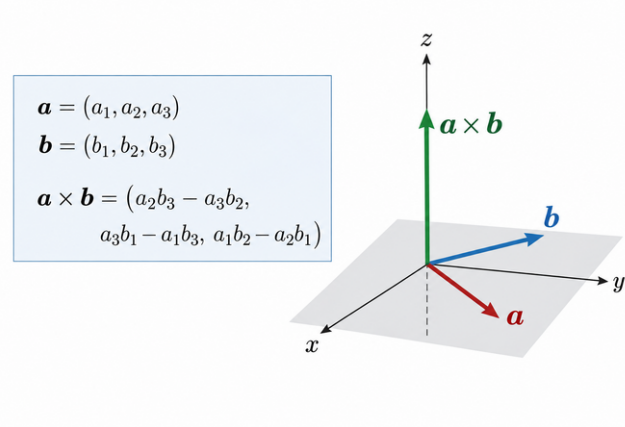
Ας γενικεύσουμε τώρα τον πίνακα $R_x(\theta)$ που είδαμε στην ενότητα 3.6 και ας ορίσουμε έναν πίνακα $R_n(\theta)$ που περιστρέφει το qubit κατά γωνία θ γύρω από έναν τυχαίο άξονα

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$$

Ας ξεκινήσουμε βρίσκοντας πρώτα τον αντίστοιχο 3×3 πίνακα $M_n(\theta)$ που περιστρέφει το σημείο $\mathbf{r} = (x, y, z)$ της σφαίρας Bloch. Θυμηθείτε το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, δύο διανυσμάτων $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{x} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{y} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{z} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1), \end{aligned}$$

ένα διάνυσμα κάθετο και στο $\mathbf{a}$ και στο $\mathbf{b}$ όπως δείχνει και το σχήμα 3.11. Όντως μπορούμε αν κάνουμε τις



Σχήμα 3.11: Το διάνυσμα $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

πράξεις να δείξουμε πως:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$$

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$$

Μπορούμε να αποδείξουμε αυτή την ιδιότητα ως παράδειγμα:

Παράδειγμα 3.14: Το διάνυσμα $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ είναι κάθετο στα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$

Ας αποδείξουμε πρώτα δύο γενικές ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου, για τυχαία διανύσματα $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, και όχι για κάποια συγκεκριμένη επιλογή τους.

Πρώτα, ότι το $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ είναι κάθετο και στο $\mathbf{a}$ και στο $\mathbf{b}$. Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ αντικαθιστώντας τον ορισμό,

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1).$$

Αναπτύσσοντας τις παρενθέσεις,

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1,$$

και παρατηρούμε ότι κάθε όρος εμφανίζεται ακριβώς δύο φορές, με αντίθετο πρόσημο (π.χ. το $a_1a_2b_3$ και το $-a_1a_2b_3$), οπότε το άθροισμα μηδενίζεται,

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0.$$

Με ακριβώς τον ίδιο τρόπο (εναλλάσσοντας απλώς τους ρόλους των $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ στην παραπάνω απόδειξη) δείχνουμε ότι

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0.$$

Άρα το $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ είναι πράγματι κάθετο και στο $\mathbf{a}$ και στο $\mathbf{b}$, για οποιαδήποτε διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

Παράδειγμα 3.15: Το μέτρο του $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (ιδιότητα του Lagrange)

Θα δείξουμε ότι

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2.$$

Αναπτύσσοντας το αριστερό μέλος και κάνοντας τις πράξεις,

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 - 2a_2 a_3 b_2 b_3. \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, αναπτύσσοντας το δεξί μέλος,

$$|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2,$$

και απαλείφοντας τους όρους $a_1^2 b_1^2, a_2^2 b_2^2, a_3^2 b_3^2$ που εμφανίζονται και στα δύο γινόμενα,

$$|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 - 2a_2 a_3 b_2 b_3.$$

Τα δύο μέλη ταυτίζονται, οπότε η ταυτότητα του Lagrange επαληθεύεται.

Παράδειγμα 3.16: Παράλληλα διανύσματα έχουν μηδενικό εξωτερικό γινόμενο

Ας υποθέσουμε ότι τα διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ είναι παράλληλα, δηλαδή $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$ για κάποιο πραγματικό λ . Τότε $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = \lambda |\mathbf{a}|^2$, ενώ $|\mathbf{b}| = |\lambda| |\mathbf{a}|$, οπότε

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = \lambda^2 |\mathbf{a}|^4 = |\mathbf{a}|^2 (\lambda^2 |\mathbf{a}|^2) = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2.$$

Από την ταυτότητα του Lagrange (παράδειγμα 3.15),

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = 0,$$

δηλαδή $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$: δύο παράλληλα διανύσματα έχουν πάντα μηδενικό εξωτερικό γινόμενο, κάτι που άλλωστε συμφωνεί και με τον ορισμό μέσω της ορίζουσας (ενότητα 3.7), αφού δύο παράλληλες γραμμές μηδενίζουν την ορίζουσα.

Παράδειγμα 3.17: Ο τύπος για το $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

Ας δείξουμε τον γνωστό τύπο

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

Συμβολίζουμε $\mathbf{d} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$, οπότε η πρώτη συνιστώσα του $\mathbf{d} \times \mathbf{c}$ είναι

$$(\mathbf{d} \times \mathbf{c})_1 = d_2 c_3 - d_3 c_2 = (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_3 - (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_2.$$

Αναπτύσσοντας και ομαδοποιώντας ως προς b_1 και a_1 ,

$$(\mathbf{d} \times \mathbf{c})_1 = b_1(a_3 c_3 + a_2 c_2) - a_1(b_3 c_3 + b_2 c_2).$$

Οι δύο παρενθέσεις σχεδόν συμπληρώνουν τα εσωτερικά γινόμενα $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$: τους λείπει μόνο ο όρος $a_1 c_1$, αντίστοιχα $b_1 c_1$,

$$a_3 c_3 + a_2 c_2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - a_1 c_1, \quad b_3 c_3 + b_2 c_2 = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) - b_1 c_1,$$

οπότε

$$(\mathbf{d} \times \mathbf{c})_1 = b_1 [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - a_1 c_1] - a_1 [(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) - b_1 c_1] = b_1(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - a_1(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}),$$

αφού οι όροι $-a_1 b_1 c_1$ και $+a_1 b_1 c_1$ αναιρούνται. Δηλαδή η πρώτη συνιστώσα του $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ ταυτίζεται με την πρώτη συνιστώσα του $\mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, εναλλάσσοντας κυκλικά τους δείκτες $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, δείχνουμε ότι ταυτίζονται και οι άλλες δύο συνιστώσες, οπότε

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

Το εξωτερικό γινόμενο είναι εν γένει ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο όταν έχουμε να κάνουμε με περιστροφές γύρω από τυχαίους άξονες. Χρησιμοποιώντας το, μπορούμε να υπολογίσουμε για κάθε διάνυσμα $\mathbf{r} = (x, y, z)$ στον τρισδιάστατο χώρο σε δύο συνιστώσες: μία συνιστώσα κάθε στο $\mathbf{n}$ και μία παράλληλη με το $\mathbf{n}$ τις οποίες συμβολίζουμε ως $\mathbf{r}_\perp$ και $\mathbf{r}_\parallel$ αντίστοιχα. Η παράλληλη συνιστώσα υπολογίζεται προβάλλοντας το διάνυσμα $\mathbf{r}$ πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{n}$. Όπως έχουμε συζητήσει και όταν αναλύαμε τους τελεστές προβολών, η προβολή αυτή γράφεται:

$$\mathbf{r}_\parallel = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}$$

Μπορούμε να δείξουμε στο παρακάτω παράδειγμα ότι η συνιστώσα $\mathbf{n}_\perp$ δίνεται από το παρακάτω εξωτερικό γινόμενο:

$$\mathbf{r}_\perp = (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{n}$$

Παράδειγμα 3.18: Η κάθετη συνιστώσα $\mathbf{r}_\perp$ δίνεται από την σχέση: $\mathbf{r}_\perp = (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{n}$

Ας χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα του παραδείγματος 3.17 θεωρώντας $\mathbf{a} = \mathbf{n}$, $\mathbf{b} = \mathbf{r}$ και $\mathbf{c} = \mathbf{n}$. Θα έχουμε:

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{n} = \mathbf{r}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_\parallel$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι το $\mathbf{r}$ γράφεται ως άθροισμα του $\mathbf{r}_\parallel$ και του $(\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{n}$. Επομένως το $(\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{n}$ πρέπει να περιέχει όλες τις συνιστώσες του διανύσματος που είναι κάθετες στο $\mathbf{n}$, δηλαδή:

$$\mathbf{r}_\perp = (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{n}$$

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{r}_\perp = (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{n}$ είναι κάθετο στο $\mathbf{n}$ και κάθετο και στο $\mathbf{n} \times \mathbf{r}$. Επίσης το $\mathbf{n} \times \mathbf{r}$ πρέπει να είναι κάθετο στο $\mathbf{n}$. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.12, μία περιστροφή γύρω από τον άξονα $\mathbf{n}$ αφήνει το $\mathbf{r}_\parallel$ αμετάβλητο, ενώ περιστρέφει το $\mathbf{r}_\perp$ κατά γωνία θ μέσα στο επίπεδο που είναι κάθετο στο $\mathbf{n}$, ακριβώς όπως στην ενότητα 3.5, όπου όμως το επίπεδο περιστροφής ήταν πάντα ένα από τα επίπεδα $y-z$, $z-x$ ή $x-y$. Το ζεύγος $(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{n} \times \mathbf{r})$ παίζει λοιπόν μέσα στο επίπεδο κάθετο στο $\mathbf{n}$ ακριβώς τον ρόλο που έπαιζε το ζεύγος (y, z) στην περιστροφή γύρω από τον άξονα x (ενότητα 3.5, Σχήμα 3.8): και τα δύο είναι κάθετα μεταξύ τους και ίσου μήκους, και όπως δείχνει το Σχήμα 3.12, η περιστροφή μετακινεί το $\mathbf{r}_\perp$ μέσα σε αυτό το επίπεδο προς την κατεύθυνση του $\mathbf{n} \times \mathbf{r}$, ακριβώς όπως εκεί το y μετακινούνταν προς το z . Ας δούμε αναλυτικά, με τον ίδιο τρόπο όπως και τότε, πώς προκύπτει μία ανάλογη σχέση που συνδέει την κάθετη συνιστώσα του διανύσματος $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ μετά την περιστροφή γύρω από το $\mathbf{n}$ κατά γωνία θ .

$$\mathbf{r}'_\perp = \mathbf{r}_\perp \cos \theta + (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \sin \theta$$

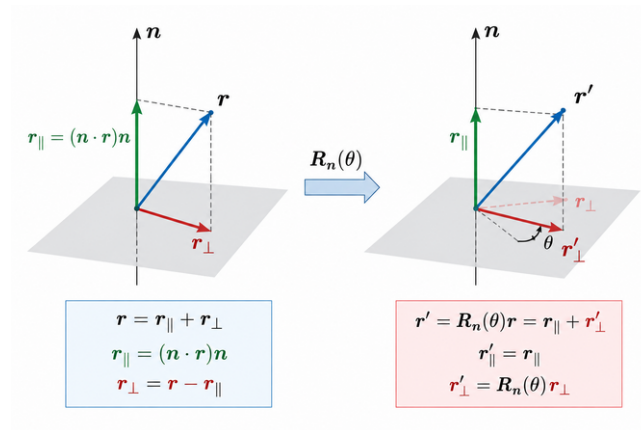
Ας δούμε πως προκύπτει αυτή η σχέση στο παράδειγμα 3.19.

Παράδειγμα 3.19: Πώς προκύπτει η σχέση $\mathbf{r}'_\perp = \mathbf{r}_\perp \cos \theta + (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \sin \theta$

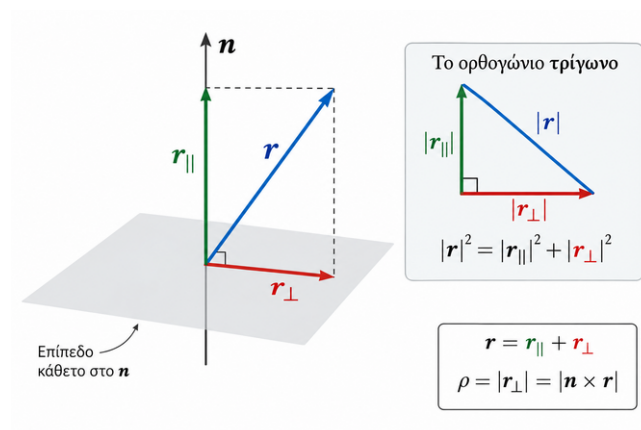
Αν $\mathbf{r}_\perp = \mathbf{0}$ (δηλαδή το $\mathbf{r}$ είναι ήδη παράλληλο στο $\mathbf{n}$), τότε από το προηγούμενο παράδειγμα $\mathbf{n} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$ επίσης, και η περιστροφή αφήνει, όπως είδαμε, το $\mathbf{r}_\perp$ αμετάβλητο, άρα $\mathbf{r}'_\perp = \mathbf{0}$, και η ζητούμενη σχέση ισχύει τετριμμένα ($\mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \cos \theta + \mathbf{0} \cdot \sin \theta$). Υποθέτουμε λοιπόν στη συνέχεια ότι $\mathbf{r}_\perp \neq \mathbf{0}$.

Θέτουμε $\rho = |\mathbf{r}_\perp|$ και ορίζουμε τα δύο μοναδιαία διανύσματα

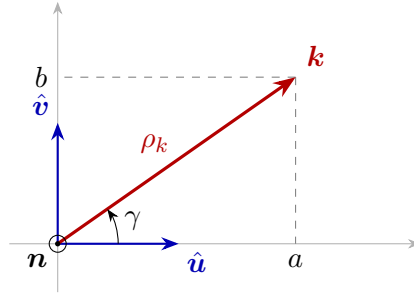
$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{r}_\perp}{\rho}, \quad \hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{r}}{\rho}$$



Σχήμα 3.12: Περιστροφή γύρω από το $\mathbf{n}$ στον χώρο.



Σχήμα 3.13: Οι συνιστώσες του $\mathbf{r}$ στο χώρο.



Σχήμα 3.14: Τα διανύσματα $\hat{u}$, $\hat{v}$ και $\hat{k}$.

Είναι προφανές ότι το $\hat{u}$ είναι μοναδιαίο. Από το παράδειγμα 3.15 θα έχουμε:

$$|\mathbf{n} \times \mathbf{r}|^2 = |\mathbf{r}|^2 |\mathbf{n}|^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})^2 = |\mathbf{r}|^2 - |\mathbf{r}_{\parallel}|^2 = |\mathbf{r}_{\perp}|^2$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει επειδή το $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_{\perp}$ και $\mathbf{r}_{\parallel}$ σχηματίζουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο όπως δείχνει το σχήμα 3.13. Τα $\hat{u}$, $\hat{v}$ είναι επιπλέον κάθετα μεταξύ τους (αφού $\mathbf{r}_{\perp} \perp \mathbf{n} \times \mathbf{r}$, όπως δείξαμε επίσης εκεί), άρα αποτελούν μία ορθοκανονική βάση για το επίπεδο κάθετο στο $\mathbf{n}$, ακριβώς σαν τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των y, z στην ενότητα 3.5, μόνο που τώρα το επίπεδο αυτό δεν είναι απαραίτητα ένα από τα «στάνταρ» επίπεδα $y-z$, $z-x$ ή $x-y$.

Εφόσον τα διανύσματα $\hat{u}$ και $\hat{v}$ είναι κάθετα μεταξύ τους και μοναδιαία, αποτελούν μία εναλλακτική βάση στην οποία μπορούμε να αναλύσουμε οποιοδήποτε διάνυσμα του επιπέδου $\mathbf{k}$,

$$\mathbf{k} = a\hat{u} + b\hat{v}$$

Αν θέσουμε $\rho_k = \sqrt{a^2 + b^2}$ και $\cos \gamma = a/\rho$ και $\sin \gamma = b/\rho$ τότε θα έχουμε την πολική μορφή:

$$\mathbf{k} = \rho_k (\cos \gamma \hat{u} + \sin \gamma \hat{v})$$

Η γωνία γ είναι η γωνία που σχηματίζει το $\mathbf{k}$ με το $\hat{u}$ όπως δείχνει και το Σχήμα 3.14. Στο σύστημα συντεταγμένων το $\mathbf{r}_{\perp}$ σχηματίζει γωνία $\gamma = 0$ με το $\hat{u}$. Όταν περιστρέφουμε το διάνυσμα γύρω από τον άξονα $\mathbf{n}$ κατά γωνία θ στην ουσία περιστρέφεται το $\mathbf{r}_{\perp}$ κατά γωνία θ και η νέα του θέση $\mathbf{r}'_{\perp}$ σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα των $\hat{u}$. Επομένως:

$$\mathbf{r}'_{\perp} = \rho (\cos \theta \hat{u} + \sin \theta \hat{v})$$

Αντικαθιστώντας τέλος $\rho \hat{u} = \mathbf{r}_{\perp}$ και $\rho \hat{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}$ από τους ορισμούς τους,

$$\mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp} \cos \theta + (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \sin \theta,$$

ακριβώς η ζητούμενη σχέση.

Σε συνέχεια του παραδείγματος 3.19 θα έχουμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{r}'$ μετά την περιστροφή θα είναι:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\perp} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + [\mathbf{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}] \cos \theta + (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \sin \theta,$$

δηλαδή

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \theta + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})(1 - \cos \theta) + (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \sin \theta.$$

Η σχέση αυτή είναι ο γνωστός τύπος του Rodrigues για την περιστροφή ενός διανύσματος κατά γωνία θ γύρω από έναν άξονα $\mathbf{n}$. Ας τον τύπο του Rodrigues και σε μορφή πίνακα, ώστε να έχουμε ρητά τον πίνακα $\mathbf{M}_{\mathbf{n}}(\theta)$ που υποσχέθηκε ο τίτλος της ενότητας. Το εσωτερικό γινόμενο $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}$ γράφεται ως $\mathbf{n}(\mathbf{n}^T \mathbf{r}) = (\mathbf{n}\mathbf{n}^T)\mathbf{r}$, όπου ο πίνακας $\mathbf{n}\mathbf{n}^T$ έχει στοιχεία $n_i n_j$. Το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{n} \times \mathbf{r}$ γράφεται με τη σειρά του ως $\mathbf{K}\mathbf{r}$,

όπου

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix}$$

είναι ο αντισυμμετρικός πίνακας που αντιστοιχεί στο εξωτερικό γινόμενο με το $\mathbf{n}$. Επαληθεύστε, αντικαθιστώντας, ότι το $\mathbf{K}\mathbf{r}$ δίνει πράγματι τις τρεις συνιστώσες του $\mathbf{n} \times \mathbf{r}$ που γράψαμε στην αρχή της ενότητας. Αντικαθιστώντας τα δύο αυτά στον τύπο του Rodrigues,

$$\mathbf{r}' = [\cos \theta \mathbf{I}_3 + (1 - \cos \theta) \mathbf{n}\mathbf{n}^T + \sin \theta \mathbf{K}] \mathbf{r},$$

δηλαδή

$$\mathbf{M}_n(\theta) = \cos \theta \mathbf{I}_3 + (1 - \cos \theta) \mathbf{n}\mathbf{n}^T + \sin \theta \mathbf{K}.$$

Αποτέλεσμα 3.6: Ο τύπος του Rodrigues και ο πίνακας $\mathbf{M}_n(\theta)$

Η περιστροφή ενός διανύσματος $\mathbf{r}$ κατά γωνία θ γύρω από έναν άξονα $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ ($|\mathbf{n}| = 1$) δίνεται από τον τύπο του Rodrigues,

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \theta + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})(1 - \cos \theta) + (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \sin \theta,$$

δηλαδή από τον 3×3 πίνακα περιστροφής

$$\mathbf{M}_n(\theta) = \cos \theta \mathbf{I}_3 + (1 - \cos \theta) \mathbf{n}\mathbf{n}^T + \sin \theta \mathbf{K} = \begin{bmatrix} n_x^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta & n_x n_y(1 - \cos \theta) - n_z \sin \theta & n_x n_z(1 - \cos \theta) + n_y \sin \theta \\ n_y n_x(1 - \cos \theta) + n_z \sin \theta & n_y^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta & n_y n_z(1 - \cos \theta) - n_x \sin \theta \\ n_z n_x(1 - \cos \theta) - n_y \sin \theta & n_z n_y(1 - \cos \theta) + n_x \sin \theta & n_z^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 3.20: Ο πίνακας $\mathbf{M}_n(\theta)$ για $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ και $\theta = \pi/6$

Ας εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα 3.6 για έναν άξονα που δεν ταυτίζεται με κανέναν από τους μοναδιαίους άξονες x, y, z , τον

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

(τον ίδιο άξονα που είδαμε και στο παράδειγμα 3.8), και για γωνία $\theta = \pi/6$, όπου $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $\sin(\pi/6) = 1/2$.

Αφού $n_x = n_y = n_z = 1/\sqrt{3}$, ο πίνακας $\mathbf{n}\mathbf{n}^T$ έχει όλα τα στοιχεία του ίσα με $1/3$, ενώ ο αντισυμμετρικός πίνακας $\mathbf{K}$ γίνεται

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αντικαθιστώντας στον τύπο $\mathbf{M}_n(\theta) = \cos \theta \mathbf{I}_3 + (1 - \cos \theta) \mathbf{n}\mathbf{n}^T + \sin \theta \mathbf{K}$,

$$\mathbf{M}_n\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{I}_3 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Κάθε διαγώνιο στοιχείο είναι $\sqrt{3}/2 + (2 - \sqrt{3})/6 = (1 + \sqrt{3})/3$, ενώ κάθε εκτός διαγωνίου στοιχείο είναι είτε $(2 - \sqrt{3})/6 + \sqrt{3}/6 = 1/3$ είτε $(2 - \sqrt{3})/6 - \sqrt{3}/6 = (1 - \sqrt{3})/3$, ανάλογα με το πρόσημο του αντίστοιχου στοιχείου του $\mathbf{K}$. Καταλήγουμε στον πίνακα

$$\mathbf{M}_n\left(\frac{\pi}{6}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}.$$

Ας δούμε τέλος τη δράση του πάνω σε ένα συγκεκριμένο σημείο, το $\mathbf{r} = (1, 0, 0)$ (τον πόλο του $|+x\rangle$). Το αποτέλεσμα είναι ακριβώς η πρώτη στήλη του πίνακα,

$$M_n\left(\frac{\pi}{6}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}.$$

Ας εμπλουτίσουμε τη βιβλιοθήκη μας `qulib.py` με μία συνάρτηση `rot3D_n` που υλοποιεί τον γενικό πίνακα $M_n(\theta)$ για *οποιοδήποτε* άξονα $\mathbf{n}$ (όχι μόνο τους x, y, z) και *οποιαδήποτε* γωνία θ , κανονικοποιώντας πρώτα το $\mathbf{n}$ ώστε να δουλεύει ακόμα κι αν της δώσουμε ένα μη μοναδιαίο διάνυσμα:

```
def rot3D_n(n, theta):
    n = np.array(n, dtype=float)
    norm = np.linalg.norm(n)
    if norm == 0:
        raise ValueError("rotation axis cannot be the zero vector")
    n = n / norm
    nx, ny, nz = n
    c, s = np.cos(theta), np.sin(theta)
    K = np.array([
        [0, -nz, ny],
        [nz, 0, -nx],
        [-ny, nx, 0],
    ])
    return c * np.eye(3) + (1 - c) * np.outer(n, n) + s * K
```

Ένα script που επιβεβαιώνει αριθμητικά το παραπάνω παράδειγμα βρίσκεται στο αρχείο

`python/ex_rot3D_n_pi6.py`.

Δίνουμε μάλιστα στη `rot3D_n` το μη κανονικοποιημένο $(1, 1, 1)$ αντί για το $\mathbf{n} = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$, ώστε να δούμε και την κανονικοποίηση σε δράση:

```
import numpy as np

from qulib import rot3D_n

n = np.array([1, 1, 1]) # unnormalized on purpose: rot3D_n normalizes it
theta = np.pi / 6

M = rot3D_n(n, theta)
print("M_n(pi/6) =")
print(np.round(M, 3))

r = np.array([1, 0, 0])
print(f"M_n(pi/6) @ (1, 0, 0) = {np.round(M @ r, 3)}")
```

3.8 Η περιστροφή στη σφαίρα Bloch: ο πίνακας $R_n(\theta)$

Στην προηγούμενη υποενότητα 3.7, βρήκαμε τον πίνακα 3×3 πίνακα $M_n(\theta)$ που περιγράφει την περιστροφή γύρω από έναν οποιοδήποτε άξονα που περιγράφεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n}$. Στην ενότητα αυτή θα βρούμε τον 2×2 πίνακα $R_n(\theta)$ που πραγματοποιεί την περιστροφή στην κατάσταση του qubit ώστε να δείξουμε αργότερα ότι υπάρχει μία ισοδυναμία μεταξύ τους: μία περιστροφή στην σφαίρα Bloch με τον πίνακα $M_n(\theta)$ αντιστοιχεί σε μία περιστροφή στην κατάσταση του qubit που περιγράφεται από τον πίνακα $R_n(\theta)$. Πιο συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι αν η κατάσταση $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ περιγράφεται από το σημείο (x, y, z) στην σφαίρα Bloch, τότε εάν περιστρέψουμε το $\mathbf{r} = (x, y, z)$ γύρω από τον άξονα $\mathbf{n}$ κατά γωνία θ και καταλήξουμε στο σημείο $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ τότε η αντίστοιχη αρχική κατάσταση $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$

μετασχηματίζεται σε $|\phi\rangle = a'|0\rangle + b'|1\rangle$ όπου:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathbf{M}_n(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \mathbf{R}_n(\theta) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Για αρχή ας ορίσουμε όμως τον πίνακα $\mathbf{R}_n(\theta)$. Θυμηθείτε ότι στην ενότητα 3.3, ορίσαμε τον πίνακα:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_n(\pi) = n_x \mathbf{X} + n_y \mathbf{Y} + n_z \mathbf{Z},$$

που είναι Ερμιτιανός, $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}$, και ικανοποιεί $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_2$. Ορίζουμε, ακριβώς όπως και για τον $\mathbf{R}_x(\theta)$,

$$\mathbf{R}_n(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{I}_2 - j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{A}.$$

Συμβολίζοντας $c = \cos(\theta/2)$, $s = \sin(\theta/2)$, έχουμε $\mathbf{R}_n(\theta) = c\mathbf{I}_2 - js\mathbf{A}$. Αρχικά δείχνουμε έναν ενδιαφέρον τρόπο να γράψουμε τον πίνακα $\mathbf{R}_n(\theta)$ ως εκθετικό ενός του πίνακα $\mathbf{A}$.

Παράδειγμα 3.21: Ο πίνακας $\mathbf{R}_n(\theta)$ ως εκθετικό ενός πίνακα

Ας δείξουμε ότι ο ορισμός

$$\mathbf{R}_n(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{I}_2 - j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{A}$$

μπορεί να γραφτεί εξίσου, και πολύ πιο συνοπτικά, ως το εκθετικό ενός πίνακα,

$$\mathbf{R}_n(\theta) = \exp\left(-j\frac{\theta}{2}\mathbf{A}\right),$$

Θυμηθείτε (ενότητα 2.3) ότι το εκθετικό ενός πίνακα ορίζεται μέσω της σειράς Taylor,

$$\exp\left(-j\frac{\theta}{2}\mathbf{A}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-j\frac{\theta}{2}\right)^k \mathbf{A}^k.$$

Το κλειδί είναι η ιδιότητα $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_2$ (ενότητα 3.3), που σημαίνει ότι όλες οι άρτιες δυνάμεις του $\mathbf{A}$ ισούνται με $\mathbf{I}_2$ και όλες οι περιττές με τον $\mathbf{A}$ το ίδιο,

$$\mathbf{A}^{2m} = \mathbf{I}_2, \quad \mathbf{A}^{2m+1} = \mathbf{A}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Χωρίζοντας λοιπόν το άθροισμα σε άρτιους και περιττούς όρους,

$$\exp\left(-j\frac{\theta}{2}\mathbf{A}\right) = \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \left(-j\frac{\theta}{2}\right)^{2m} \right] \mathbf{I}_2 + \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \left(-j\frac{\theta}{2}\right)^{2m+1} \right] \mathbf{A}.$$

Για τους άρτιους όρους, χρησιμοποιώντας $(-j)^{2m} = [(-j)^2]^m = (-1)^m$,

$$\left(-j\frac{\theta}{2}\right)^{2m} = (-1)^m \left(\frac{\theta}{2}\right)^{2m},$$

οπότε το πρώτο άθροισμα γίνεται ακριβώς η σειρά Taylor του συνημίτονου,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{2m} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Για τους περιττούς όρους, γράφοντας $(-j\theta/2)^{2m+1} = (-j\theta/2)^{2m} \cdot (-j\theta/2) = -j(-1)^m(\theta/2)^{2m+1}$, το δεύτερο άθροισμα γίνεται

$$-j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{2m+1} = -j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

δηλαδή ακριβώς η σειρά Taylor του ημιτόνου, πολλαπλασιασμένη με $-j$. Συνδυάζοντας τα δύο αποτελέσματα,

$$\exp\left(-j\frac{\theta}{2}\mathbf{A}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{I}_2 - j\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{A} = \mathbf{R}_n(\theta),$$

ακριβώς όπως θέλαμε να δείξουμε.

Παράδειγμα 3.22: Ο πίνακας $\mathbf{R}_n(\theta)$ είναι μοναδιαίος

Για να δείξουμε ότι ο πίνακας $\mathbf{R}_n(\theta)$ είναι μοναδιαίος, χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Έχουμε:

$$\mathbf{R}_n(\theta)^T = c\mathbf{I}_2 + js\mathbf{A}$$

οπότε χρησιμοποιώντας $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_2$,

$$\mathbf{R}_n(\theta)\mathbf{R}_n(\theta)^T = (c\mathbf{I}_2 - js\mathbf{A})(c\mathbf{I}_2 + js\mathbf{A}) = c^2\mathbf{I}_2 + jcs\mathbf{A} - jsc\mathbf{A} - j^2s^2\mathbf{A}^2 = (c^2 + s^2)\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_2.$$

Θα χρειαστούμε τώρα δύο βοηθητικές ταυτότητες για τον $\mathbf{A}$. Χρησιμοποιώντας το πινακάκι πολλαπλασιασμού των Pauli,

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = (n_x\mathbf{X} + n_y\mathbf{Y} + n_z\mathbf{Z})\mathbf{X} = n_x\mathbf{I}_2 - jn_y\mathbf{Z} + jn_z\mathbf{Y},$$

και με τον ίδιο τρόπο,

$$\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{X}(n_x\mathbf{X} + n_y\mathbf{Y} + n_z\mathbf{Z}) = n_x\mathbf{I}_2 + jn_y\mathbf{Z} - jn_z\mathbf{Y}.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη, βρίσκουμε τον μεταθέτη

$$[\mathbf{A}, \mathbf{X}] = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{A} = 2j(n_z\mathbf{Y} - n_y\mathbf{Z}).$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα το $\mathbf{A}\mathbf{X}$ που βρήκαμε παραπάνω εκ νέου με $\mathbf{A}$ από δεξιά, και χρησιμοποιώντας ξανά το πινακάκι πολλαπλασιασμού (οι όροι με τον $\mathbf{I}_2$ αναιρούνται μεταξύ τους), καταλήγουμε, μετά από απλοποιήσεις ανάλογες με αυτές της ενότητας 3.3, στην

$$\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{A} = (n_x^2 - n_y^2 - n_z^2)\mathbf{X} + 2n_xn_y\mathbf{Y} + 2n_xn_z\mathbf{Z} = 2n_x\mathbf{A} - \mathbf{X},$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε $n_x^2 - n_y^2 - n_z^2 = 2n_x^2 - 1$ (αφού το $\mathbf{n}$ είναι μοναδιαίο).

Είμαστε πλέον έτοιμοι. Για μία κατάσταση $|\psi\rangle$ με σημείο Bloch $\mathbf{r} = (x, y, z)$ και $|\phi\rangle = \mathbf{R}_n(\theta)|\psi\rangle$,

$$x' = \langle\phi|\mathbf{X}|\phi\rangle = \langle\psi|\mathbf{R}_n(\theta)^T\mathbf{X}\mathbf{R}_n(\theta)|\psi\rangle.$$

Αναπτύσσουμε

$$\mathbf{R}_n(\theta)^T\mathbf{X}\mathbf{R}_n(\theta) = (c\mathbf{I}_2 + js\mathbf{A})\mathbf{X}(c\mathbf{I}_2 - js\mathbf{A}) = c^2\mathbf{X} - jcs\mathbf{X}\mathbf{A} + jsc\mathbf{A}\mathbf{X} - j^2s^2\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{A}.$$

Ο δεύτερος και ο τρίτος όρος συνδυάζονται στον μεταθέτη, $jsc\mathbf{A}\mathbf{X} - jcs\mathbf{X}\mathbf{A} = jsc[\mathbf{A}, \mathbf{X}]$, οπότε αντικαθιστώντας τις δύο ταυτότητες που βρήκαμε παραπάνω,

$$\mathbf{R}_n(\theta)^T\mathbf{X}\mathbf{R}_n(\theta) = c^2\mathbf{X} + jsc \cdot 2j(n_z\mathbf{Y} - n_y\mathbf{Z}) + s^2(2n_x\mathbf{A} - \mathbf{X}).$$

Χρησιμοποιώντας $j \cdot 2j = -2$ και ομαδοποιώντας τους όρους,

$$\mathbf{R}_n(\theta)^T\mathbf{X}\mathbf{R}_n(\theta) = (c^2 - s^2)\mathbf{X} + 2n_xs^2\mathbf{A} + 2sc(n_y\mathbf{Z} - n_z\mathbf{Y}),$$

και χρησιμοποιώντας τις διπλές γωνίες $c^2 - s^2 = \cos\theta$, $2sc = \sin\theta$, $2s^2 = 1 - \cos\theta$,

$$\mathbf{R}_n(\theta)^T\mathbf{X}\mathbf{R}_n(\theta) = \cos\theta\mathbf{X} + n_x(1 - \cos\theta)\mathbf{A} + \sin\theta(n_y\mathbf{Z} - n_z\mathbf{Y}).$$

Παίρνοντας τη μέση τιμή στην $|\psi\rangle$, και χρησιμοποιώντας $\langle\psi|\mathbf{A}|\psi\rangle = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$ (ενότητα 3.3) μαζί με $\langle\psi|\mathbf{Y}|\psi\rangle = y$, $\langle\psi|\mathbf{Z}|\psi\rangle = z$,

$$x' = x \cos\theta + n_x(1 - \cos\theta)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) + \sin\theta(n_yz - n_zy).$$

Ο τελευταίος όρος είναι ακριβώς η x -συνιστώσα του $\mathbf{n} \times \mathbf{r}$, δηλαδή

$$x' = x \cos \theta + n_x(1 - \cos \theta)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) + \sin \theta (\mathbf{n} \times \mathbf{r})_x.$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο (κυκλική εναλλαγή των δεικτών $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$) προκύπτουν

$$y' = y \cos \theta + n_y(1 - \cos \theta)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) + \sin \theta (\mathbf{n} \times \mathbf{r})_y,$$

$$z' = z \cos \theta + n_z(1 - \cos \theta)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) + \sin \theta (\mathbf{n} \times \mathbf{r})_z.$$

Σε διανυσματική μορφή,

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \theta + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})(1 - \cos \theta) + (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \sin \theta,$$

ακριβώς ο τύπος του Rodrigues που βρήκαμε παραπάνω! Ο πίνακας $\mathbf{R}_n(\theta)$ πραγματοποιεί λοιπόν πάνω στο qubit ακριβώς την περιστροφή που περιγράφει ο $\mathbf{M}_n(\theta)$ πάνω στο σημείο της σφαίρας Bloch.

Τέλος, θέτοντας $\theta = \pi$,

$$\mathbf{R}_n(\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{I}_2 - j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{A} = -j \mathbf{A},$$

που ταυτίζεται με τον $\mathbf{A} = n_x \mathbf{X} + n_y \mathbf{Y} + n_z \mathbf{Z}$ μέχρι μία μη παρατηρήσιμη καθολική φάση $-j$, ακριβώς όπως συνέβη και με τον $\mathbf{R}_x(\pi)$.

Παράδειγμα 3.23: Ο πίνακας $\mathbf{R}_n(\theta)$ για $\theta = \pi/3$ και $\mathbf{n} = \frac{1}{5}(3, 4, 0)$

Ας υπολογίσουμε τον πίνακα $\mathbf{R}_n(\theta)$ για μία γωνία θ και έναν άξονα $\mathbf{n}$ που δεν εμπίπτουν σε καμία από τις ειδικές περιπτώσεις που έχουμε ήδη συναντήσει: ούτε $\theta \in \{0, \pi/2, \pi\}$, ούτε $\mathbf{n}$ έναν από τους τρεις κύριους άξονες. Διαλέγουμε $\theta = \pi/3$ (δηλαδή 60°) και

$$\mathbf{n} = \frac{1}{5}(3, 4, 0) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right).$$

Επαληθεύουμε πρώτα ότι το $\mathbf{n}$ είναι πράγματι μοναδιαίο,

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 0^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1.$$

Για $\theta = \pi/3$ έχουμε $\theta/2 = \pi/6$, οπότε

$$c = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad s = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Ο πίνακας $\mathbf{A} = n_x \mathbf{X} + n_y \mathbf{Y} + n_z \mathbf{Z}$ είναι (ενότητα 3.4)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} n_z & n_x - j n_y \\ n_x + j n_y & -n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} - j \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} + j \frac{4}{5} & 0 \end{bmatrix},$$

αφού $n_z = 0$. Αντικαθιστώντας στον ορισμό $\mathbf{R}_n(\theta) = c \mathbf{I}_2 - j s \mathbf{A}$, χρειαζόμαστε τα δύο εκτός διαγωνίου στοιχεία $-j s A_{12}$ και $-j s A_{21}$,

$$\begin{aligned} -j \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} - j \frac{4}{5} \right) &= -\frac{3j}{10} + \frac{4j^2}{10} = -\frac{4}{10} - \frac{3j}{10} = -\frac{4+3j}{10}, \\ -j \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} + j \frac{4}{5} \right) &= -\frac{3j}{10} - \frac{4j^2}{10} = \frac{4}{10} - \frac{3j}{10} = \frac{4-3j}{10}. \end{aligned}$$

Άρα, τελικά,

$$\mathbf{R}_n\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{4+3j}{10} \\ \frac{4-3j}{10} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Ας επιβεβαιώσουμε ότι ο πίνακας είναι όντως μοναδιαίος, ελέγχοντας ότι η πρώτη του στήλη έχει μοναδιαίο μήκος,

$$\left| \frac{\sqrt{3}}{2} \right|^2 + \left| \frac{4-3j}{10} \right|^2 = \frac{3}{4} + \frac{16+9}{100} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1,$$

ακριβώς όπως αναμενόταν από τη γενική σχέση $c^2 + s^2(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = c^2 + s^2 = 1$. Παρατηρήστε επίσης ότι, επειδή $n_z = 0$, τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα είναι πραγματικά (ίσα με c), ενώ τα εκτός διαγωνίου στοιχεία είναι γνήσια μιγαδικά, σε αντίθεση, για παράδειγμα, με τον $R_x(\theta)$ όπου το αντίθετο συμβαίνει (ενότητα 3.6).

Παράδειγμα 3.24: Δράση του $R_n(\pi/3)$ πάνω σε ένα qubit

Ας δούμε τώρα πώς δρα συγκεκριμένα ο πίνακας $R_n(\pi/3)$ του παραδείγματος 3.23 πάνω σε ένα qubit. Θεωρούμε ως αρχική κατάσταση την

$$|\psi\rangle = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

μία κατάσταση υπέρθεσης, διαφορετική τόσο από το $|0\rangle$ όσο και από το $|1\rangle$, με σημείο Bloch $\mathbf{r} = (1, 0, 0)$.

Εφαρμόζοντας τον πίνακα $R_n(\pi/3)$ που βρήκαμε παραπάνω στην $|\psi\rangle$,

$$|\phi\rangle = R_n\left(\frac{\pi}{3}\right)|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4+3j}{10} \\ \frac{4-3j}{10} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{10\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 5\sqrt{3} - 4 - 3j \\ 5\sqrt{3} + 4 - 3j \end{bmatrix},$$

δηλαδή η νέα κατάσταση $|\phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ έχει

$$a = \frac{5\sqrt{3} - 4 - 3j}{10\sqrt{2}}, \quad b = \frac{5\sqrt{3} + 4 - 3j}{10\sqrt{2}}.$$

Ας υπολογίσουμε τώρα το σημείο Bloch (x, y, z) της $|\phi\rangle$, χρησιμοποιώντας τις γενικές σχέσεις $x = 2\operatorname{Re}(a^*b)$, $y = -2\operatorname{Im}(ab^*)$, $z = |a|^2 - |b|^2$ (ενότητα 3.1). Εδώ δεν μπορούμε πλέον να χρησιμοποιήσουμε τις απλούστερες σχέσεις-συντόμευση $x = 2a\operatorname{Re}(b)$ κτλ., αφού το a δεν είναι πραγματικό. Θέτοντας $u = 5\sqrt{3}$ για συντομία,

$$a^*b = \frac{(u-4+3j)(u+4-3j)}{200} = \frac{u^2 + (3j-4)(4-3j)}{200} = \frac{75+24j-7}{200} = \frac{68+24j}{200} = \frac{17+6j}{50},$$

$$ab^* = \frac{(u-4-3j)(u+4+3j)}{200} = \frac{u^2 - (4+3j)^2}{200} = \frac{75 - (7+24j)}{200} = \frac{68-24j}{200} = \frac{17-6j}{50},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $(3j-4)(4-3j) = 12j-9j^2-16+12j = 24j-7$ και $(4+3j)^2 = 16+24j-9 = 7+24j$. Άρα

$$x = 2\operatorname{Re}(a^*b) = \frac{2 \cdot 17}{50} = \frac{17}{25}, \quad y = -2\operatorname{Im}(ab^*) = -2 \cdot \left(-\frac{6}{50}\right) = \frac{6}{25}.$$

Για το z , χρησιμοποιώντας $|a|^2 = \frac{(u-4)^2+9}{200}$ και $|b|^2 = \frac{(u+4)^2+9}{200}$,

$$z = |a|^2 - |b|^2 = \frac{(u-4)^2 - (u+4)^2}{200} = \frac{-16u}{200} = -\frac{2u}{25} = -\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο σημείο Bloch

$$(x, y, z) = \left(\frac{17}{25}, \frac{6}{25}, -\frac{2\sqrt{3}}{5} \right).$$

Ας επιβεβαιώσουμε πρώτα ότι είναι πράγματι πάνω στη σφαίρα Bloch,

$$\left(\frac{17}{25}\right)^2 + \left(\frac{6}{25}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2 = \frac{289}{625} + \frac{36}{625} + \frac{300}{625} = \frac{625}{625} = 1,$$

όπως θα έπρεπε αφού ο $\mathbf{R}_n(\pi/3)$ είναι μοναδιαίος.

Παράδειγμα 3.25: Ο πίνακας $M_n(\pi/3)$ και η ισοδυναμία $R_n(\theta) \leftrightarrow M_n(\theta)$

Ας επιβεβαιώσουμε το σημείο Bloch που βρήκαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, εφαρμόζοντας αυτή τη φορά απευθείας τον πίνακα $M_n(\pi/3)$ (αποτέλεσμα 3.6) στο αρχικό σημείο $\mathbf{r} = (1, 0, 0)$ της $|\psi\rangle = |+\rangle$, για τον ίδιο άξονα $\mathbf{n} = (3/5, 4/5, 0)$ και γωνία $\theta = \pi/3$, όπου $\cos(\pi/3) = 1/2$, $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

Αφού $n_x = 3/5$, $n_y = 4/5$, $n_z = 0$, ο πίνακας $\mathbf{n}\mathbf{n}^T$ έχει στοιχεία

$$\mathbf{n}\mathbf{n}^T = \begin{bmatrix} 9/25 & 12/25 & 0 \\ 12/25 & 16/25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ενώ ο αντισυμμετρικός πίνακας $\mathbf{K}$ γίνεται

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & -3/5 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αντικαθιστώντας στον τύπο $M_n(\theta) = \cos \theta \mathbf{I}_3 + (1 - \cos \theta) \mathbf{n}\mathbf{n}^T + \sin \theta \mathbf{K}$,

$$M_n\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \mathbf{I}_3 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 9/25 & 12/25 & 0 \\ 12/25 & 16/25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & -3/5 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{25} & \frac{6}{25} & \frac{2\sqrt{3}}{5} \\ \frac{6}{25} & \frac{41}{50} & -\frac{3\sqrt{3}}{10} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{5} & \frac{3\sqrt{3}}{10} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Εφαρμόζοντάς τον στο αρχικό σημείο $\mathbf{r} = (1, 0, 0)$, δηλαδή παίρνοντας απλώς την πρώτη στήλη του πίνακα,

$$M_n\left(\frac{\pi}{3}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{25} \\ \frac{6}{25} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{5} \end{bmatrix},$$

ακριβώς το ίδιο σημείο $(17/25, 6/25, -2\sqrt{3}/5)$ που βρήκαμε στο προηγούμενο παράδειγμα δρώντας απευθείας πάνω στην $|\psi\rangle$ με τον $\mathbf{R}_n(\pi/3)$. Έτσι η ισοδυναμία $\mathbf{R}_n(\theta) \leftrightarrow M_n(\theta)$ επαληθεύεται.

Ένα script που επιβεβαιώνει αριθμητικά τα δύο τελευταία παραδείγματα, τυπώνοντας και τα δύο αποτελέσματα, βρίσκεται στο αρχείο `python/ex_Rn_Mn_pi3.py`:

```
import numpy as np

from qulib import Qubit, SingleQubitGate, rot3D_n

X = np.array([[0, 1], [1, 0]])
Y = np.array([[0, -1j], [1j, 0]])
Z = np.array([[1, 0], [0, -1]])

n = np.array([3, 4, 0]) / 5
theta = np.pi / 3

c, s = np.cos(theta / 2), np.sin(theta / 2)
R_n = c * np.eye(2) - 1j * s * (n[0] * X + n[1] * Y + n[2] * Z)
```

```

psi = Qubit(1, 1) # |+x>, Bloch point (1, 0, 0)
phi = SingleQubitGate(R_n).out(psi)

x1, y1, z1 = phi.bloch()
print(f"Bloch point of R_n(pi/3)|psi>: ({x1:.3f}, {y1:.3f}, {z1:.3f})")

M_n = rot3D_n(n, theta)
x2, y2, z2 = M_n @ np.array(psi.bloch())
print(f"Bloch point of M_n(pi/3) @ (1, 0, 0): ({x2:.3f}, {y2:.3f}, {z2:.3f})")

```

Αποτέλεσμα 3.7: Ο γενικός πίνακας $R_n(\theta)$ και ο τύπος του Rodrigues

Ο πίνακας

$$R_n(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I_2 - j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (n_x X + n_y Y + n_z Z)$$

είναι μοναδιαίος και πραγματοποιεί πάνω στο qubit ακριβώς την περιστροφή κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα $\mathbf{n}$ (τύπος του Rodrigues),

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \theta + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})(1 - \cos \theta) + (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \sin \theta.$$

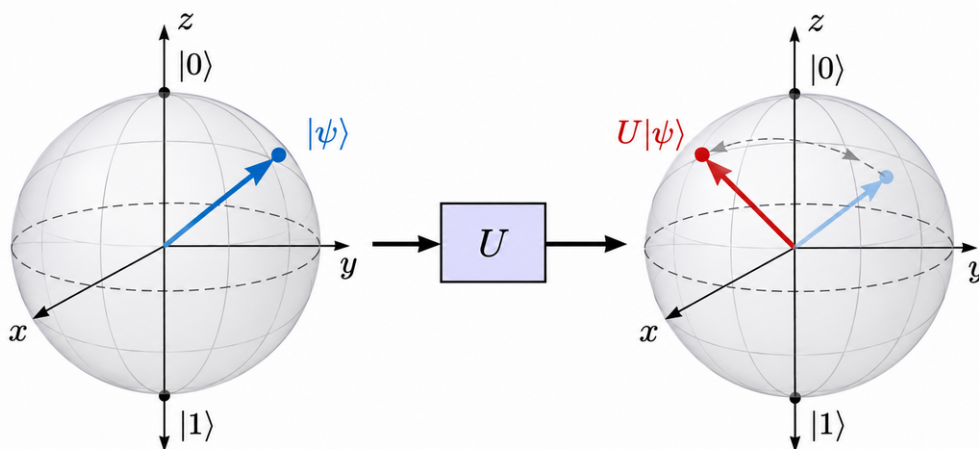
Θέτοντας $\mathbf{n} = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ ξαναβρίσκουμε τους $R_x(\theta), R_y(\theta), R_z(\theta)$, ενώ για $\theta = \pi$ ξαναβρίσκουμε τον $R_n(\pi)$ (μέχρι καθολική φάση).

3.9 Κάθε μοναδιαίος τελεστής 1 qubit είναι περιστροφή επί μία φάση

Είδαμε στην προηγούμενη υποενότητα ότι κάθε πίνακας περιστροφής $R_n(\theta)$ είναι μοναδιαίος. Θα αποδείξουμε μία ακόμα πιο ισχυρή (και ίσως μη αναμενόμενη) ιδιότητα: Κάθε δυνατή κβαντική πύλη ενός qubit, δηλαδή κάθε μοναδιαίος 2×2 πίνακας U , ταυτίζεται με κάποιον πίνακα περιστροφής $R_n(\theta)$ επί έναν παράγοντα καθολικής φάσης,

$$U = e^{j\alpha} R_n(\theta),$$

για κατάλληλα πραγματικά α, θ και μοναδιαίο άξονα $\mathbf{n}$. Εφόσον μία καθολική φάση δεν επηρεάζει καμία φυσική πρόβλεψη, όπως είδαμε στην ενότητα 3.1, το αποτέλεσμα αυτό σημαίνει ότι κάθε κβαντική πύλη ενός qubit είναι, ουσιαστικά, μία περιστροφή της σφαίρας Bloch: δεν υπάρχει καμία άλλη δυνατή δράση πάνω σε ένα qubit.



Σχήμα 3.15: Ισοδυναμία περιστροφών στη σφαίρα Bloch και τους μοναδιαίους τελεστές qubit.

Θα ξεκινήσουμε με μία ιδιότητα που ισχύει για την ορίζουσα του γινομένου δύο πινάκων $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$ την οποία δείχνουμε παρακάτω στην περίπτωση των πινάκων 2×2 .

Παράδειγμα 3.26: Η ορίζουσα γινομένου πινάκων ισούται με το γινόμενο των ορίζουσών

Ας δείξουμε ότι για δύο τυχαίους 2×2 πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix},$$

ισχύει $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Το γινόμενο AB είναι

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix},$$

οπότε η ορίζουσά του, εξ ορισμού, είναι

$$\det(AB) = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}).$$

Αναπτύσσοντας τα δύο γινόμενα,

$$\begin{aligned} \det(AB) &= a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} + a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} \\ &\quad - a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} - a_{12}a_{22}b_{21}b_{22}. \end{aligned}$$

Οι όροι $a_{11}a_{21}b_{11}b_{12}$ και $a_{12}a_{22}b_{21}b_{22}$ εμφανίζονται και στα δύο αναπτύγματα, με αντίθετο πρόσημο, και αναιρούνται, αφήνοντας

$$\det(AB) = a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21}.$$

Ομαδοποιώντας τους όρους ανά δύο,

$$\det(AB) = a_{11}a_{22}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) - a_{12}a_{21}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}),$$

δηλαδή ακριβώς

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Ας ξεκινήσουμε δείχνοντας ότι η ορίζουσα ενός μοναδιαίου πίνακα έχει πάντα μέτρο 1. Έστω U ένας τυχαίος μοναδιαίος 2×2 πίνακας, δηλαδή $U^T U = I_2$. Παίρνοντας ορίζουσες και στα δύο μέλη, και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ που μόλις αποδείξαμε (παράδειγμα 3.26),

$$\det(U^T) \det(U) = \det(I_2) = 1.$$

Στο παρακάτω παράδειγμα, δείχνουμε ότι $\det(U^T) = (\det(U))^*$, δηλαδή ο ανάστροφος-συζυγής έχει πάντα τη μιγαδική συζυγή ορίζουσα και ειδικά στην περίπτωση ενός μοναδιαίου πίνακα θα έχουμε $|\det(U)| = 1$.

Παράδειγμα 3.27: Η ορίζουσα του U^T σε όρους των στοιχείων του U

Ας δείξουμε ρητά, μέσω των στοιχείων του πίνακα, ότι $\det(U^T) = (\det(U))^*$ για έναν τυχαίο 2×2 πίνακα

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}.$$

Η ορίζουσά του είναι, εξ ορισμού,

$$\det(U) = u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}.$$

Ο ανάστροφος-συζυγής προκύπτει αντιμεταθέτοντας γραμμές με στήλες και παίρνοντας μιγαδικά συζυγή (εξίσωση (1.8)),

$$U^T = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{21}^* \\ u_{12}^* & u_{22}^* \end{bmatrix},$$

οπότε η δική του ορίζουσα είναι

$$\det(U^T) = u_{11}^* u_{22}^* - u_{21}^* u_{12}^* = (u_{11}u_{22})^* - (u_{12}u_{21})^* = (u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21})^* = (\det(U))^*,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι το μιγαδικό συζυγές ενός γινομένου (ή μίας διαφοράς) ισούται με το γινόμενο (ή τη διαφορά) των μιγαδικών συζυγών.

Αν επιπλέον ο U είναι μοναδιαίος, $U^T U = I_2$, τότε παίρνοντας ορίζουσες και στα δύο μέλη,

$$\det(U^T) \det(U) = \det(I_2) = 1 \implies (\det(U))^* \det(U) = |\det(U)|^2 = 1,$$

δηλαδή η ορίζουσα κάθε μοναδιαίου πίνακα έχει πάντα μέτρο 1, ακριβώς το αποτέλεσμα που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω.

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\det(U) = e^{j2\alpha}$$

για κάποιο πραγματικό α (ο παράγοντας 2 στον εκθέτη επιλέχθηκε απλώς για ευκολία, όπως θα φανεί αμέσως παρακάτω).

Ας θεωρήσουμε τώρα τον πίνακα:

$$M = e^{-j\alpha} U.$$

Ο M είναι κι αυτός μοναδιαίος, αφού ο ανάστροφος-συζυγής ενός αριθμού $e^{-j\alpha}$ είναι το μιγαδικό συζυγές του, $e^{j\alpha}$, οπότε

$$M^T M = (e^{-j\alpha} U)^T (e^{-j\alpha} U) = e^{j\alpha} e^{-j\alpha} U^T U = U^T U = I_2.$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας $\det(cA) = c^2 \det(A)$ για έναν 2×2 πίνακα A και σταθερά c (κάθε μία από τις δύο στήλες συνεισφέρει έναν παράγοντα c),

$$\det(M) = \det(e^{-j\alpha} U) = e^{-j2\alpha} \det(U) = e^{-j2\alpha} e^{j2\alpha} = 1.$$

Καταλήξαμε λοιπόν σε έναν πίνακα M που είναι μοναδιαίος και έχει ορίζουσα ακριβώς 1.

Ας βρούμε τώρα τη γενική μορφή ενός τέτοιου πίνακα. Γράφουμε

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς και $\det(M) = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = 1$. Όπως πιθανότατα γνωρίζετε ήδη από τη Γραμμική Άλγεβρα, ο αντίστροφος ενός 2×2 πίνακα με ορίζουσα 1 δίνεται από

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix}.$$

Αν δεν το γνωρίζετε, δείτε το παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 3.28: Ο αντίστροφος ενός 2×2 πίνακα με ορίζουσα 1

Ας επαληθεύσουμε ότι, για έναν τυχαίο 2×2 πίνακα $M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$ με $\det(M) = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = 1$, ο πίνακας

$$N := \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix}$$

είναι πράγματι ο αντίστροφος του M , δηλαδή ότι $MN = NM = I_2$. Πολλαπλασιάζουμε πρώτα το MN ,

$$MN = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} & -m_{11}m_{12} + m_{12}m_{11} \\ m_{21}m_{22} - m_{22}m_{21} & -m_{21}m_{12} + m_{22}m_{11} \end{bmatrix},$$

και παρατηρώντας ότι τα εκτός διαγωνίου στοιχεία μηδενίζονται αυτόματα, ενώ τα διαγώνια είναι και τα δύο ίσα με $\det(M)$,

$$MN = \begin{bmatrix} m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} & 0 \\ 0 & m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} \end{bmatrix}.$$

Αφού $\det(\mathbf{M}) = 1$,

$$\mathbf{M}\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2.$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, πολλαπλασιάζοντας με την αντίστροφη σειρά,

$$\mathbf{N}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{22}m_{11} - m_{12}m_{21} & 0 \\ 0 & m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2.$$

Αφού $\mathbf{M}\mathbf{N} = \mathbf{N}\mathbf{M} = \mathbf{I}_2$, ο $\mathbf{N}$ είναι πράγματι ο αντίστροφος του $\mathbf{M}$, δηλαδή

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{N} = \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix},$$

ακριβώς όπως θέλαμε να δείξουμε.

Όμως ο $\mathbf{M}$ είναι μοναδιαίος, δηλαδή ο αντίστροφός του ταυτίζεται με τον ανάστροφο-συζυγή του $\mathbf{M}^T$,

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} m_{11}^* & m_{21}^* \\ m_{12}^* & m_{22}^* \end{bmatrix}.$$

Εξισώνοντας τα δύο αυτά αποτελέσματα στοιχείο προς στοιχείο βρίσκουμε $m_{22} = m_{11}^*$, $-m_{12} = m_{21}^*$, $-m_{21} = m_{12}^*$ και $m_{11} = m_{22}^*$, όπου η τρίτη σχέση είναι απλώς η μιγαδική συζυγής της δεύτερης, και η τέταρτη της πρώτης. Θέτοντας λοιπόν $m_{21} = -m_{12}^*$ και $m_{22} = m_{11}^*$, κάθε μοναδιαίος πίνακας με ορίζουσα 1 έχει τη μορφή

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ -m_{12}^* & m_{11}^* \end{bmatrix},$$

με τη συνθήκη $\det(\mathbf{M}) = m_{11}m_{11}^* - m_{12}(-m_{12}^*) = |m_{11}|^2 + |m_{12}|^2 = 1$.

Στο παρακάτω παράδειγμα δείχνουμε ότι ο πίνακας $\mathbf{R}_n(\theta)$ έχει ακριβώς την μορφή που θεωρήσαμε για τον πίνακα $\mathbf{M}$ και επομένως έχει και ορίζουσα ίση με 1. Αυτό το δείχνουμε με την μορφή παραδείγματος στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.29: Ο πίνακας $\mathbf{R}_n(\theta)$ έχει ορίζουσα 1

Ας συγκρίνουμε τώρα αυτή τη μορφή με τον πίνακα $\mathbf{R}_n(\theta)$. Χρησιμοποιώντας τους πίνακες Pauli όπως τους είδαμε στην ενότητα 1.30 και δεδομένου ότι:

$$\mathbf{R}_n(\theta) = c\mathbf{I}_2 - js\mathbf{A}$$

όπου, όπως και πριν, $c = \cos(\theta/2)$, $s = \sin(\theta/2)$, ενώ:

$$\mathbf{A} = n_x\mathbf{X} + n_y\mathbf{Y} + n_z\mathbf{Z}$$

θα έχουμε:

$$\mathbf{R}_n(\theta) = \begin{bmatrix} c - jsn_z & -sn_y - jsn_x \\ sn_y - jsn_x & c + jsn_z \end{bmatrix},$$

Η παραπάνω σχέση γενικεύει για τυχαίο θ τον πίνακα του $\hat{R}_n(\pi)$ που βρήκαμε στην ενότητα 3.4. Ο πίνακας αυτός έχει ακριβώς τη μορφή του πίνακα $\mathbf{M}$ που συζητήσαμε παραπάνω:

$$m_{11} = c - jsn_z,$$

$$m_{12} = -sn_y - jsn_x$$

$$m_{21} = sn_y - jsn_x = -m_{12}^*$$

$$m_{22} = c + jsn_z = m_{11}^*$$

Μπορούμε να δείξουμε και το αντίστροφο: ότι κάθε πίνακας $\mathbf{M}$ με m_{11}, m_{12} με $|m_{11}|^2 + |m_{12}|^2 = 1$ προκύπτουν κατάλληλα $\theta, \mathbf{n}$ έτσι ώστε να γράφεται ως στροφή $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}(\theta) = \mathbf{M}$. Αυτό το δείχνουμε στο παράδειγμα 3.30.

Παράδειγμα 3.30: Κάθε πίνακας που έχει την μορφή του $\mathbf{M}$ γράφεται ως $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}(\theta) = \mathbf{M}$

Συγκρίνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη στις παραπάνω σχέσεις, θέλουμε

$$c = \operatorname{Re}(m_{11}), \quad sn_z = -\operatorname{Im}(m_{11}), \quad sn_y = -\operatorname{Re}(m_{12}), \quad sn_x = -\operatorname{Im}(m_{12}).$$

Ορίζουμε

$$s = \sqrt{\operatorname{Im}(m_{11})^2 + \operatorname{Re}(m_{12})^2 + \operatorname{Im}(m_{12})^2} \geq 0$$

Αφού

$$|m_{11}|^2 + |m_{12}|^2 = \operatorname{Re}(m_{11})^2 + \operatorname{Im}(m_{11})^2 + \operatorname{Re}(m_{12})^2 + \operatorname{Im}(m_{12})^2 = 1$$

έχουμε

$$s^2 = 1 - \operatorname{Re}(m_{11})^2$$

δηλαδή

$$\operatorname{Re}(m_{11})^2 + s^2 = 1$$

και επομένως

$$c^2 + s^2 = 1$$

Η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι μπορούμε να θέσουμε για κάποιο θ ,

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = c = \operatorname{Re}(m_{11}), \quad \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = s.$$

Δεδομένου ότι $0 \leq s \leq 1$, υπάρχει πάντα ένα $\theta \in [0, 2\pi)$ με $\theta/2 \in [0, \pi]$ τέτοιο ώστε να πληρούνται οι παραπάνω σχέσεις αφού στο διάστημα $[0, \pi]$ τότε το ημίτονο είναι θετικό. Αν επιπλέον $s \neq 0$, ορίζουμε το διάνυσμα

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{\operatorname{Im}(m_{12})}{s}, -\frac{\operatorname{Re}(m_{12})}{s}, -\frac{\operatorname{Im}(m_{11})}{s} \right),$$

που είναι πράγματι μοναδιαίο, αφού

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{\operatorname{Im}(m_{12})^2 + \operatorname{Re}(m_{12})^2 + \operatorname{Im}(m_{11})^2}{s^2} = \frac{s^2}{s^2} = 1.$$

Με αυτή την επιλογή των θ και $\mathbf{n}$, ο πίνακας $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}(\theta)$ ταυτίζεται ακριβώς με τον $\mathbf{M}$.

Αν $s = 0$, τότε $\operatorname{Im}(m_{11}) = \operatorname{Re}(m_{12}) = \operatorname{Im}(m_{12}) = 0$ και $\operatorname{Re}(m_{11}) = \pm 1$, μία εκφυλισμένη περίπτωση όπου $\mathbf{M} = \pm \mathbf{I}_2$. Όμως θέτοντας $\theta = 0$ ή $\theta = 2\pi$ στον ορισμό του $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}(\theta)$ βρίσκουμε $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}(0) = \mathbf{I}_2$ και $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}(2\pi) = -\mathbf{I}_2$ για οποιονδήποτε άξονα $\mathbf{n}$, οπότε το ζητούμενο ισχύει και εδώ, με τον άξονα $\mathbf{n}$ αυθαίρετο: μία περιστροφή κατά 0 ή κατά 2π δεν εξαρτάται άλλωστε πραγματικά από τον άξονα γύρω από τον οποίο γίνεται.

Σε κάθε περίπτωση βρήκαμε λοιπόν $\theta, \mathbf{n}$ τέτοια ώστε $\mathbf{M} = \mathbf{R}_{\mathbf{n}}(\theta)$, δηλαδή

$$\mathbf{U} = e^{j\alpha} \mathbf{M} = e^{j\alpha} \mathbf{R}_{\mathbf{n}}(\theta).$$

Αποτέλεσμα 3.8: Κάθε πύλη ενός qubit είναι περιστροφή της σφαίρας Bloch

Κάθε μοναδιαίος 2×2 πίνακας $\mathbf{U}$, δηλαδή κάθε δυνατή κβαντική πύλη ενός qubit, γράφεται στη μορφή

$$\mathbf{U} = e^{j\alpha} \mathbf{R}_{\mathbf{n}}(\theta)$$

για κάποια πραγματικά α, θ και μοναδιαίο άξονα $\mathbf{n}$. Αφού η καθολική φάση $e^{j\alpha}$ δεν επηρεάζει καμία

φυσική πρόβλεψη, κάθε κβαντική πύλη ενός qubit είναι ουσιαστικά μία περιστροφή της σφαίρας Bloch γύρω από κάποιον άξονα $\mathbf{n}$ και κατά κάποια γωνία θ .

Ας δούμε τώρα πώς εφαρμόζεται στην πράξη η διαδικασία που μόλις περιγράψαμε, υπολογίζοντας τον άξονα $\mathbf{n}$ (και τη γωνία θ και την καθολική φάση α) για δύο συγκεκριμένες πύλες.

Παράδειγμα 3.31: Ο άξονας $\mathbf{n}$ για την πύλη X

Ας εφαρμόσουμε τη διαδικασία στην πύλη

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζουμε πρώτα την ορίζουσα,

$$\det(\mathbf{X}) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 = e^{j\pi},$$

οπότε $2\alpha = \pi$, δηλαδή διαλέγουμε $\alpha = \pi/2$. Αφαιρούμε την καθολική φάση,

$$\mathbf{M} = e^{-j\pi/2} \mathbf{X} = -j \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ -j & 0 \end{bmatrix},$$

δηλαδή $m_{11} = 0$, $m_{12} = -j$. Επαληθεύστε ότι $|m_{11}|^2 + |m_{12}|^2 = 1$, όπως πρέπει, και ότι όντως ο $\mathbf{M}$ έχει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ -m_{12}^* & m_{11}^* \end{bmatrix}$$

που περιμέναμε.

Έχουμε $\text{Re}(m_{11}) = 0$, $\text{Im}(m_{11}) = 0$, $\text{Re}(m_{12}) = 0$, $\text{Im}(m_{12}) = -1$, οπότε

$$c = \text{Re}(m_{11}) = 0, \quad s = \sqrt{\text{Im}(m_{11})^2 + \text{Re}(m_{12})^2 + \text{Im}(m_{12})^2} = \sqrt{0 + 0 + 1} = 1.$$

Άρα $\cos(\theta/2) = 0$, $\sin(\theta/2) = 1$, δηλαδή $\theta = \pi$, και ο άξονας είναι

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{\text{Im}(m_{12})}{s}, -\frac{\text{Re}(m_{12})}{s}, -\frac{\text{Im}(m_{11})}{s} \right) = (1, 0, 0).$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο

$$\mathbf{X} = e^{j\pi/2} \mathbf{R}_x(\pi) = j \mathbf{R}_x(\pi),$$

δηλαδή η πύλη $\mathbf{X}$ είναι, όπως αναμενόταν, η περιστροφή κατά π γύρω από τον άξονα x , μέχρι ακριβώς την καθολική φάση j που είχαμε ήδη συναντήσει στην ενότητα 3.6, όπου βρήκαμε $\mathbf{R}_x(\pi) = -j \mathbf{X}$.

Παράδειγμα 3.32: Ο άξονας $\mathbf{n}$ για την πύλη Hadamard

Ας εφαρμόσουμε τώρα την ίδια διαδικασία στην πύλη Hadamard,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Η ορίζουσά της είναι

$$\det(\mathbf{H}) = \frac{1}{2} [1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1] = \frac{1}{2} (-2) = -1 = e^{j\pi},$$

δηλαδή ακριβώς η ίδια τιμή όπως και για την $\mathbf{X}$, οπότε διαλέγουμε ξανά $\alpha = \pi/2$. Αφαιρούμε την καθολική φάση,

$$\mathbf{M} = e^{-j\pi/2} \mathbf{H} = -j \mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -j & -j \\ -j & j \end{bmatrix},$$

δηλαδή $m_{11} = -j/\sqrt{2}$, $m_{12} = -j/\sqrt{2}$ (επαληθεύστε ξανά ότι $|m_{11}|^2 + |m_{12}|^2 = 1/2 + 1/2 = 1$, και ότι $-m_{12}^* = -j/\sqrt{2} = m_{21}$, $m_{11}^* = j/\sqrt{2} = m_{22}$, όπως πρέπει).

Έχουμε τώρα $\text{Re}(m_{11}) = 0$, $\text{Im}(m_{11}) = -1/\sqrt{2}$, $\text{Re}(m_{12}) = 0$, $\text{Im}(m_{12}) = -1/\sqrt{2}$, οπότε

$$c = \text{Re}(m_{11}) = 0, \quad s = \sqrt{\text{Im}(m_{11})^2 + \text{Re}(m_{12})^2 + \text{Im}(m_{12})^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}} = 1.$$

Άρα ξανά $\theta = \pi$, ενώ ο άξονας είναι τώρα

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{\text{Im}(m_{12})}{s}, -\frac{\text{Re}(m_{12})}{s}, -\frac{\text{Im}(m_{11})}{s} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο

$$\mathbf{H} = e^{j\pi/2} \mathbf{R}_{\mathbf{n}}(\pi) = j \mathbf{R}_{\mathbf{n}}(\pi), \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1),$$

ακριβώς τον ίδιο άξονα, τον άξονα που διχοτομεί τα x και z , που είχαμε ήδη βρει με διαφορετικό τρόπο στο παράδειγμα 3.9. Εδώ όμως η γενική διαδικασία μάς έδωσε επιπλέον, χωρίς κανέναν επιπλέον κόπο, και την ακριβή καθολική φάση j που συνδέει την πύλη $\mathbf{H}$ με τον πίνακα περιστροφής $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}(\pi)$.

Παράδειγμα 3.33: Ο άξονας $\mathbf{n}$ για τον πίνακα $\mathbf{R}_z(-\pi/4)\mathbf{R}_x(\pi/4)$

Ας εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία στον μοναδιαίο πίνακα $\mathbf{U} = \mathbf{R}_z(-\pi/4)\mathbf{R}_x(\pi/4)$. Συμβολίζοντας $c_0 = \cos(\pi/8)$, $s_0 = \sin(\pi/8)$ για συντομία, και χρησιμοποιώντας τους πίνακες

$$\mathbf{R}_z\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \begin{bmatrix} e^{j\pi/8} & 0 \\ 0 & e^{-j\pi/8} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{bmatrix} c_0 & -js_0 \\ -js_0 & c_0 \end{bmatrix},$$

πολλαπλασιάζουμε και χρησιμοποιούμε $e^{\pm j\pi/8} = c_0 \pm js_0$,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} e^{j\pi/8}c_0 & -je^{j\pi/8}s_0 \\ -je^{-j\pi/8}s_0 & e^{-j\pi/8}c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0^2 + jc_0s_0 & s_0^2 - jc_0s_0 \\ -s_0^2 - jc_0s_0 & c_0^2 - jc_0s_0 \end{bmatrix}.$$

Αφού οι $\mathbf{R}_z(-\pi/4)$, $\mathbf{R}_x(\pi/4)$ έχουν ορίζουσα 1, το ίδιο ισχύει και για το γινόμενό τους $\mathbf{U}$, δηλαδή $\alpha = 0$ και $\mathbf{M} = \mathbf{U}$ απευθείας, οπότε

$$m_{11} = c_0^2 + jc_0s_0, \quad m_{12} = s_0^2 - jc_0s_0.$$

Έχουμε λοιπόν $\text{Re}(m_{11}) = c_0^2$, $\text{Im}(m_{11}) = c_0s_0$, $\text{Re}(m_{12}) = s_0^2$, $\text{Im}(m_{12}) = -c_0s_0$, οπότε

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \text{Re}(m_{11}) = c_0^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right),$$

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\text{Im}(m_{11})^2 + \text{Re}(m_{12})^2 + \text{Im}(m_{12})^2} = \sqrt{2c_0^2s_0^2 + s_0^4} = s_0\sqrt{1 + c_0^2},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $2c_0^2 + s_0^2 = c_0^2 + 1$ (αφού $c_0^2 + s_0^2 = 1$). Ο άξονας είναι

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{\text{Im}(m_{12})}{\sin(\theta/2)}, -\frac{\text{Re}(m_{12})}{\sin(\theta/2)}, -\frac{\text{Im}(m_{11})}{\sin(\theta/2)} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + c_0^2}} (c_0, -s_0, -c_0).$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}_{\mathbf{n}}(\theta),$$

όπου η γωνία θ υπολογίζεται από την σχέση:

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

ενώ το διάνυσμα $\mathbf{n}$ δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{n} = \frac{\gamma}{|\gamma|}$$

και

$$\gamma = (\cos(\pi/8), -\sin(\pi/8), -\cos(\pi/8))$$

Ας προσθέσουμε στη βιβλιοθήκη μας μία μέθοδο `as_rotation` που υλοποιεί ακριβώς τη διαδικασία των τριών τελευταίων παραδειγμάτων, υπολογίζοντας το $\mathbf{n}$, το θ και το α της σχέσης $U = e^{j\alpha} R_n(\theta)$ για έναν τυχαίο μοναδιαίο πίνακα U . Η μέθοδος αυτή ανήκει φυσιολογικά στην κλάση `SingleQubitGate` και όχι στην `Qubit`: το U είναι μία *πύλη* (τελεστής), όχι μία *κατάσταση* qubit, οπότε είναι το U που «είναι» μία περιστροφή, όχι το qubit πάνω στο οποίο δρα.

```
def as_rotation(self):
    U = self.U
    det_U = U[0, 0] * U[1, 1] - U[0, 1] * U[1, 0]
    alpha = np.angle(det_U) / 2
    M = np.exp(-1j * alpha) * U
    m11, m12 = M[0, 0], M[0, 1]
    c = m11.real
    s = np.sqrt(m11.imag ** 2 + m12.real ** 2 + m12.imag ** 2)
    theta = 2 * np.arctan2(s, c)
    if s > 1e-12:
        n = np.array([-m12.imag, -m12.real, -m11.imag]) / s
    else:
        n = np.array([0.0, 0.0, 1.0])
    return n, theta, alpha
```

Ένα script που επιβεβαιώνει αριθμητικά τα παραδείγματα 3.31, 3.32 και 3.33, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο `as_rotation`, βρίσκεται στο αρχείο `python/ex_as_rotation.py`:

```
import numpy as np

from qulib import SingleQubitGate, BlochRotationX, BlochRotationZ

np.set_printoptions(precision=4, suppress=True)

# Example 3.23: the X gate
X = np.array([[0, 1], [1, 0]], dtype=complex)
n, theta, alpha = SingleQubitGate(X).as_rotation()
print(f"X:  n = {n}, theta = {theta:.4f}, alpha = {alpha:.4f}")
print("    expected: n = (1, 0, 0), theta = pi, alpha = pi/2")

# Example 3.24: the Hadamard gate
H = np.array([[1, 1], [1, -1]], dtype=complex) / np.sqrt(2)
n, theta, alpha = SingleQubitGate(H).as_rotation()
print(f"H:  n = {n}, theta = {theta:.4f}, alpha = {alpha:.4f}")
print("    expected: n = (1/sqrt(2), 0, 1/sqrt(2)), theta = pi, alpha = pi/2")

# Example 3.25: the matrix R_z(-pi/4) R_x(pi/4)
U = BlochRotationZ(-np.pi / 4).U @ BlochRotationX(np.pi / 4).U
n, theta, alpha = SingleQubitGate(U).as_rotation()
c0, s0 = np.cos(np.pi / 8), np.sin(np.pi / 8)
n_expected = np.array([c0, -s0, -c0]) / np.sqrt(1 + c0 ** 2)
theta_expected = 2 * np.arccos(c0 ** 2)
print(f"RzRx: n = {n}, theta = {theta:.4f}, alpha = {alpha:.4f}")
print("    expected: n = {n_expected}, theta = {theta_expected:.4f}, alpha = 0")
```

Εμβάθυνση 3.1: Η σχέση των $SU(2)$ και $SO(3)$

Ένα σύνολο πινάκων που είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό (το γινόμενο δύο στοιχείων του παραμένει στο σύνολο), περιέχει τον ταυτοτικό πίνακα, και περιέχει τον αντίστροφο κάθε στοιχείου του, ονομάζεται *ομάδα*. Δύο τέτοιες ομάδες κρύβονται πίσω από όσα είδαμε στις δύο προηγούμενες ενότητες.

Η ομάδα $SU(2)$ («ειδική μοναδιαία ομάδα», από το Special Unitary) αποτελείται από όλους τους 2×2 μοναδιαίους πίνακες με ορίζουσα ίση με 1. Οι πίνακες περιστροφής $\mathbf{R}_n(\theta)$ που μελετήσαμε ανήκουν ακριβώς σε αυτή την ομάδα: είναι ήδη μοναδιαίοι, όπως δείξαμε παραπάνω, ενώ για την ορίζουσα θυμηθείτε (παραδείγμα 3.6) ότι ο $\mathbf{A} = n_x \mathbf{X} + n_y \mathbf{Y} + n_z \mathbf{Z}$ έχει ιδιοδιανύσματα $|\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle$ με ιδιοτιμές 1, -1 αντίστοιχα. Αφού $\mathbf{R}_n(\theta) = c\mathbf{I}_2 - js\mathbf{A}$ με $c = \cos(\theta/2)$, $s = \sin(\theta/2)$, τα ίδια $|\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle$ είναι ιδιοδιανύσματα και του $\mathbf{R}_n(\theta)$,

$$\mathbf{R}_n(\theta) |\chi_1\rangle = (c - js) |\chi_1\rangle = e^{-j\theta/2} |\chi_1\rangle, \quad \mathbf{R}_n(\theta) |\chi_2\rangle = (c + js) |\chi_2\rangle = e^{j\theta/2} |\chi_2\rangle,$$

με ιδιοτιμές $e^{\pm j\theta/2}$. Η ορίζουσα ενός πίνακα ισούται με το γινόμενο των ιδιοτιμών του, άρα

$$\det \mathbf{R}_n(\theta) = e^{-j\theta/2} \cdot e^{j\theta/2} = 1,$$

όπως ακριβώς απαιτεί ο ορισμός του $SU(2)$. Είδαμε αναλυτικά στην προηγούμενη ενότητα (ενότητα 3.9) ότι, αντίστροφα, κάθε στοιχείο του $SU(2)$ είναι της μορφής $\pm \mathbf{R}_n(\theta)$ για κατάλληλα $\mathbf{n}, \theta$. Η οικογένεια που μελετήσαμε καλύπτει δηλαδή, ουσιαστικά, ολόκληρη την ομάδα.

Η ομάδα $SO(3)$ («ειδική ορθογώνια ομάδα») αποτελείται από όλους τους 3×3 πραγματικούς πίνακες $\mathbf{M}$ με $\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \mathbf{I}_3$ και $\det \mathbf{M} = 1$, δηλαδή ακριβώς όλες τις περιστροφές του συνηθισμένου τρισδιάστατου χώρου (χωρίς ανακλάσεις, που θα είχαν ορίζουσα -1). Κάθε τέτοια περιστροφή περιγράφεται από κάποιον άξονα $\mathbf{n}$ και κάποια γωνία θ (θεώρημα περιστροφής του Euler). Πρόκειται δηλαδή ακριβώς για τους πίνακες $\mathbf{M}_n(\theta)$ που κατασκευάσαμε.

Ο λόγος που εμφανίζονται μαζί οι δύο αυτές ομάδες είναι ότι κάθε $\mathbf{R}_n(\theta) \in SU(2)$ αντιστοιχεί ακριβώς στην περιστροφή $\mathbf{M}_n(\theta) \in SO(3)$. Αυτό ακριβώς αποδείξαμε, βήμα-βήμα, στην ενότητα 3.8. Η αντιστοιχία αυτή είναι επιπλέον συμβατή με τη σύνθεση πυλών: αν εφαρμόσουμε πρώτα την πύλη V και μετά την U πάνω σε ένα qubit, το αντίστοιχο σημείο Bloch περιστρέφεται πρώτα κατά $\mathbf{M}(V)$ και μετά κατά $\mathbf{M}(U)$, δηλαδή συνολικά κατά το γινόμενο $\mathbf{M}(U)\mathbf{M}(V)$, ακριβώς όσο χρειάζεται ώστε η σύνθετη πύλη UV να αντιστοιχεί στην περιστροφή $\mathbf{M}(U)\mathbf{M}(V)$. Μία τέτοια αντιστοιχία ανάμεσα σε δύο ομάδες, που «σέβεται» τον πολλαπλασιασμό με αυτόν τον τρόπο, ονομάζεται *ομομορφισμός ομάδων*.

Εδώ όμως βρίσκεται η λεπτομέρεια που αξίζει προσοχή: ο ομομορφισμός αυτός δεν είναι ένα προς ένα: δύο διαφορετικά στοιχεία του $SU(2)$ μπορούν να αντιστοιχούν στην ίδια περιστροφή του $SO(3)$. Ας το δούμε συγκεκριμένα, αυξάνοντας τη γωνία κατά 2π . Αφού $\cos(\phi + \pi) = -\cos \phi$ και $\sin(\phi + \pi) = -\sin \phi$ για κάθε γωνία ϕ , θέτοντας $\phi = \theta/2$,

$$\mathbf{R}_n(\theta + 2\pi) = \cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) \mathbf{I}_2 - j \sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) \mathbf{A} = -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{I}_2 + j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{A} = -\mathbf{R}_n(\theta).$$

Δηλαδή μία περιστροφή του qubit κατά $\theta + 2\pi$ δίνει τον αντίθετο πίνακα από την περιστροφή κατά θ . Στην ειδική περίπτωση $\theta = 0$ αυτό δίνει $\mathbf{R}_n(2\pi) = -\mathbf{I}_2$, έναν πίνακα διαφορετικό από τον ταυτοτικό $\mathbf{I}_2 = \mathbf{R}_n(0)$. Αντίθετα, ο τύπος του Rodrigues δίνει, για $\theta = 2\pi$ (όπου $\cos 2\pi = 1$, $\sin 2\pi = 0$), $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ για κάθε $\mathbf{r}$, δηλαδή $\mathbf{M}_n(2\pi) = \mathbf{M}_n(0) = \mathbf{I}_3$: μία πλήρης στροφή κατά 2π επαναφέρει κάθε σημείο του χώρου στη θέση του, όποιος κι αν είναι ο άξονας. Τα δύο διαφορετικά στοιχεία $\mathbf{I}_2$ και $-\mathbf{I}_2$ του $SU(2)$ αντιστοιχούν λοιπόν στο ίδιο στοιχείο $\mathbf{I}_3$ του $SO(3)$.

Αυτό δεν είναι σύμπτωση για τη συγκεκριμένη γωνία $\theta = 0$. Για σταθερό άξονα $\mathbf{n}$, η περιστροφή $\mathbf{M}_n(\theta)$ επαναλαμβάνεται ακριβώς κάθε 2π και είναι διαφορετική για κάθε θ μέσα σε μία περίοδο $[0, 2\pi)$ (μετακινεί κάθε σημείο κάθετο στο $\mathbf{n}$ σε διαφορετική θέση πάνω σε έναν κύκλο), άρα $\mathbf{M}_n(\theta_1) = \mathbf{M}_n(\theta_2)$ ακριβώς όταν $\theta_1 - \theta_2$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π , οπότε, όπως δείξαμε παραπάνω, $\mathbf{R}_n(\theta_1) = \pm \mathbf{R}_n(\theta_2)$. Κάθε περιστροφή $\mathbf{M} \in SO(3)$ έχει λοιπόν ακριβώς δύο «τετραγωνικές ρίζες» $\pm \mathbf{U} \in SU(2)$

που αντιστοιχούν σε αυτήν, ποτέ μία, ποτέ παραπάνω από δύο. Λέμε ότι η $SU(2)$ είναι μία διπλή επικάλυψη (double cover) της $SO(3)$: ο πυρήνας του ομομορφισμού είναι το σύνολο $\{I_2, -I_2\}$, και η $SO(3)$ ταυτίζεται με το πηλίκιο $SU(2)/\{I_2, -I_2\}$.

Η $SU(2)$ και η $SO(3)$ δεν είναι λοιπόν ισομόρφες, δεν ταυτίζονται δηλαδή ως ομάδες με την αυστηρή έννοια ενός ένα προς ένα ομομορφισμού, αλλά συνδέονται με αυτή την πολύ συγκεκριμένη, «δύο προς ένα» σχέση. Το φαινόμενο αυτό είναι άλλωστε ένα από τα πιο γνωστά χαρακτηριστικά των σωματιδίων σπιν-1/2 όπως το ηλεκτρόνιο: μία πλήρης περιστροφή κατά 360° γύρω από οποιονδήποτε άξονα δεν επαναφέρει την κατάσταση του σωματιδίου στον εαυτό της, παρά μόνο μέχρι ένα πρόσημο -1 : χρειάζεται περιστροφή κατά 720° για να επιστρέψουμε ακριβώς στην αρχική κατάσταση. Το πρόσημο αυτό δεν είναι παρατηρήσιμο μόνο του (είναι απλώς μία καθολική φάση), γίνεται όμως παρατηρήσιμο σε πειράματα συμβολής, όπου η κατάσταση αυτή συγκρίνεται με την κατάσταση ενός σωματιδίου που δεν περιστράφηκε καθόλου.

3.10 Μοναδιαίοι τελεστές και περιστροφές στο z και y

Υπάρχει και μία δεύτερη, εξίσου χρήσιμη μορφή για τον γενικό μοναδιαίο πίνακα U : αντί για μία περιστροφή γύρω από έναν τυχαίο άξονα n , μπορούμε πάντα να γράψουμε U ως το γινόμενο τριών διαδοχικών περιστροφών γύρω μόνο από τους άξονες z, y, z . Αυτή η αναπαράσταση ονομάζεται *αναπαράσταση Euler* επί μία καθολική φάση.

$$U = e^{j\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta),$$

για κατάλληλες πραγματικές γωνίες $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Ας δούμε γιατί, υπολογίζοντας ρητά τον πίνακα στο δεξί μέλος.

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς της ενότητας 3.6

$$R_z(\theta) = \cos(\theta/2) I_2 - j \sin(\theta/2) Z$$

$$R_y(\theta) = \cos(\theta/2) I_2 - j \sin(\theta/2) Y$$

μαζί με τους πίνακες Pauli Y, Z των οποίων τη μορφή είδαμε στην ενότητα 1.30, βρίσκουμε άμεσα τις εκφράσεις τους ως πίνακες,

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} e^{-j\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{j\theta/2} \end{bmatrix}, \quad R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix},$$

όπου στον πρώτο πίνακα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι:

$$\cos(\theta/2) + j \sin(\theta/2) = e^{j\theta/2}$$

$$\cos(\theta/2) - j \sin(\theta/2) = e^{-j\theta/2}$$

Πολλαπλασιάζουμε πρώτα τους δύο τελευταίους πίνακες,

$$R_y(\gamma) R_z(\delta) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma/2) & -\sin(\gamma/2) \\ \sin(\gamma/2) & \cos(\gamma/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{j\delta/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma/2) e^{-j\delta/2} & -\sin(\gamma/2) e^{j\delta/2} \\ \sin(\gamma/2) e^{-j\delta/2} & \cos(\gamma/2) e^{j\delta/2} \end{bmatrix},$$

και πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με τον διαγώνιο πίνακα $R_z(\beta)$,

$$R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta) = \begin{bmatrix} e^{j(\beta+\delta)/2} \cos(\gamma/2) & -e^{-j(\beta-\delta)/2} \sin(\gamma/2) \\ e^{j(\beta-\delta)/2} \sin(\gamma/2) & e^{j(\beta+\delta)/2} \cos(\gamma/2) \end{bmatrix}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τέλος με την καθολική φάση $e^{j\alpha}$,

$$U = e^{j\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta) = \begin{bmatrix} e^{j(\alpha-\beta/2-\delta/2)} \cos(\gamma/2) & -e^{j(\alpha-\beta/2+\delta/2)} \sin(\gamma/2) \\ e^{j(\alpha+\beta/2-\delta/2)} \sin(\gamma/2) & e^{j(\alpha+\beta/2+\delta/2)} \cos(\gamma/2) \end{bmatrix}.$$

Μένει να δείξουμε ότι *κάθε* μοναδιαίος πίνακας U μπορεί πράγματι να γραφτεί σε αυτή τη μορφή, δηλαδή ότι οι γωνίες $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ υπάρχουν πάντα. Γνωρίζουμε ήδη (ενότητα 3.9) ότι $U = e^{j\alpha} M$ με

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ -m_{12}^* & m_{11}^* \end{bmatrix}$$

με

$$|m_{11}|^2 + |m_{12}|^2 = 1$$

για κάποιο πραγματικό α . Συγκρίνοντας με τον παραπάνω πίνακα για $\alpha = 0$, θέλουμε

$$m_{11} = e^{-j(\beta+\delta)/2} \cos(\gamma/2), \quad m_{12} = -e^{-j(\beta-\delta)/2} \sin(\gamma/2).$$

Επιλέγουμε να θέσουμε

$$\gamma/2 = \arccos(|m_{11}|)$$

όπου με $\arccos(c)$ εννοούμε το αντίστροφο τόξο ημιτόνου, δηλαδή την γωνία ϕ , με $0 \leq \phi \leq \pi$ τέτοια ώστε $\cos \phi = c$. Στην περίπτωση μας και αφού $|m_{11}| \leq 1$ θα πρέπει

$$0 \leq \gamma/2 \leq \pi/2$$

γιατί μόνο τότε το συνημίτονο της γωνίας $\gamma/2$ είναι θετικό ή μηδέν. Οπότε θα έχουμε και $\sin(\gamma/2) \geq 0$, άρα:

$$\sin(\gamma/2) = \sqrt{1 - |m_{11}|^2} = |m_{12}|$$

εφόσον $|m_{11}|^2 + |m_{12}|^2 = 1$. Αν $m_{11}, m_{12} \neq 0$, γράφουμε

$$m_{11} = |m_{11}| e^{j\phi_{11}} = e^{-j(\beta+\delta)/2} \cos(\gamma/2)$$

$$m_{12} = |m_{12}| e^{j\phi_{12}} = -e^{-j(\beta-\delta)/2} \sin(\gamma/2)$$

οπότε οι παραπάνω σχέσεις δίνουν:

$$-\frac{\beta + \delta}{2} = \phi_{11}, \quad -\frac{\beta - \delta}{2} = \phi_{12} - \pi,$$

Πρόκειται για ένα γραμμικό σύστημα με μοναδική λύση

$$\beta = \pi - \phi_{11} - \phi_{12}$$

$$\delta = \phi_{12} - \phi_{11} - \pi$$

Στις εκφυλισμένες περιπτώσεις $m_{11} = 0$ ή $m_{12} = 0$, δηλαδή $\gamma \in \{\pi, 0\}$, μία από τις δύο γωνίες β, δ μένει αόριστη, ακριβώς όπως ο άξονας n έμενε αόριστος όταν $s = 0$ στην ενότητα 3.9. Σε κάθε περίπτωση, λοιπόν, οι γωνίες $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ υπάρχουν πάντα.

Αποτέλεσμα 3.9: Αναπαράσταση Euler (ZYZ)

Κάθε μοναδιαίος 2×2 πίνακας U γράφεται ισοδύναμα στη μορφή (αναπαράσταση Euler)

$$U = e^{j\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta) = \begin{bmatrix} e^{j(\alpha-\beta/2-\delta/2)} \cos(\gamma/2) & -e^{j(\alpha-\beta/2+\delta/2)} \sin(\gamma/2) \\ e^{j(\alpha+\beta/2-\delta/2)} \sin(\gamma/2) & e^{j(\alpha+\beta/2+\delta/2)} \cos(\gamma/2) \end{bmatrix},$$

για κατάλληλες πραγματικές γωνίες $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, δηλαδή κάθε κβαντική πύλη ενός qubit μπορεί να υλοποιηθεί ως το διαδοχικό γινόμενο τριών περιστροφών γύρω μόνο από τους άξονες z, y, z , επί μία καθολική φάση.

Οι γωνίες αυτές υπολογίζονται από τα στοιχεία της πρώτης γραμμής m_{11}, m_{12} του πίνακα $M = e^{-j\alpha} U$ ως εξής:

$$\alpha = \frac{1}{2} \arg(\det U), \quad \gamma = 2 \arccos |m_{11}|,$$

$$\beta = \pi - \phi_{11} - \phi_{12}, \quad \delta = \phi_{12} - \phi_{11} - \pi,$$

όπου $\phi_{11} = \arg(m_{11})$ και $\phi_{12} = \arg(m_{12})$, με εξαίρεση τις εκφυλισμένες περιπτώσεις $m_{11} = 0$ ή $m_{12} = 0$ (δηλαδή $\gamma \in \{\pi, 0\}$), όπου μία από τις δύο γωνίες β, δ μένει αόριστη.

Παράδειγμα 3.34: Οι γωνίες Euler $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ για την πύλη Hadamard

Ας εφαρμόσουμε τη διαδικασία της αναπαράστασης Euler στην πύλη Hadamard. Θυμηθείτε (παράδειγμα 3.32) ότι $\alpha = \pi/2$ και

$$m_{11} = m_{12} = -\frac{j}{\sqrt{2}}.$$

Γράφοντας $m_{11} = |m_{11}|e^{j\phi_{11}}$ με $|m_{11}| = 1/\sqrt{2}$ και $\phi_{11} = -\pi/2$ (αφού $-j = e^{-j\pi/2}$), και ομοίως $m_{12} = |m_{12}|e^{j\phi_{12}}$ με $|m_{12}| = 1/\sqrt{2}$, $\phi_{12} = -\pi/2$, υπολογίζουμε πρώτα

$$\frac{\gamma}{2} = \arccos(|m_{11}|) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2}$$

(επαληθεύστε ότι πράγματι $\sin(\gamma/2) = 1/\sqrt{2} = |m_{12}|$, όπως πρέπει). Στη συνέχεια,

$$\beta = \pi - \phi_{11} - \phi_{12} = \pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi,$$

$$\delta = \phi_{12} - \phi_{11} - \pi = \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \pi = -\pi.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στις γωνίες

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = 2\pi, \quad \gamma = \frac{\pi}{2}, \quad \delta = -\pi.$$

Ας επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα αντικαθιστώντας στον πίνακα της αναπαράστασης Euler. Το στοιχείο $(1, 1)$ είναι

$$e^{j(\alpha-\beta/2-\delta/2)} \cos(\gamma/2) = e^{j(\pi/2-\pi+\pi/2)} \cos(\pi/4) = e^{j0} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ακριβώς το H_{11} , ενώ το στοιχείο $(2, 2)$ είναι

$$e^{j(\alpha+\beta/2+\delta/2)} \cos(\gamma/2) = e^{j(\pi/2+\pi-\pi/2)} \cos(\pi/4) = e^{j\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

ακριβώς το H_{22} . Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο επαληθεύονται και τα δύο εναπομείναντα στοιχεία εκτός διαγωνίου, δίνοντας ακριβώς

$$\mathbf{H} = e^{j\pi/2} \mathbf{R}_z(2\pi) \mathbf{R}_y(\pi/2) \mathbf{R}_z(-\pi).$$

Παρατηρήστε ότι $\beta = 2\pi$ αντιστοιχεί σε μία πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα z . Όπως είδαμε παραπάνω (ενότητα 3.9), $\mathbf{R}_n(2\pi) = -\mathbf{I}_2$ για οποιονδήποτε άξονα $\mathbf{n}$, μία ακόμα εκδήλωση του γεγονότος ότι μία πλήρης περιστροφή κατά 2π ενός qubit δεν επαναφέρει τον πίνακα στον ταυτοτικό, αλλά μόνο μέχρι πρόσημο, το οποίο εδώ απορροφάται σωστά από τις υπόλοιπες γωνίες γ, δ .

Ας προσθέσουμε και αυτή τη διαδικασία στη βιβλιοθήκη μας, ως μία μέθοδο `euler_angles` της `SingleQubitGate` που υπολογίζει τις $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ακριβώς όπως παραπάνω:

```
def euler_angles(self):
    U = self.U
    det_U = U[0, 0] * U[1, 1] - U[0, 1] * U[1, 0]
    alpha = np.angle(det_U) / 2
    M = np.exp(-1j * alpha) * U
    m11, m12 = M[0, 0], M[0, 1]
    gamma = 2 * np.arccos(np.clip(abs(m11), -1, 1))
```

```

    phil1, phil2 = np.angle(m11), np.angle(m12)
    beta = np.pi - phil1 - phil2
    delta = phil2 - phil1 - np.pi
    return alpha, beta, gamma, delta

```

Ένα script που επιβεβαιώνει αριθμητικά το παράδειγμα 3.34, βρίσκεται στο αρχείο `python/ex_euler_Hadamard.py`:

```

import numpy as np

from qulib import SingleQubitGate, BlochRotationY, BlochRotationZ

np.set_printoptions(precision=4, suppress=True)

# Example 3.26: the Euler angles of the Hadamard gate
H = np.array([[1, 1], [1, -1]], dtype=complex) / np.sqrt(2)
alpha, beta, gamma, delta = SingleQubitGate(H).euler_angles()
print(f"alpha = {alpha:.4f}, beta = {beta:.4f}, gamma = {gamma:.4f}, delta = {delta:.4f}")
print(f"expected: alpha = pi/2, beta = 2*pi, gamma = pi/2, delta = -pi")

# check that they really do reconstruct H
U = np.exp(1j * alpha) * BlochRotationZ(beta).U @ BlochRotationY(gamma).U @ BlochRotationZ(
    delta).U
print(f"e^(j alpha) R_z(beta) R_y(gamma) R_z(delta) =\n{U}")
print(f"matches H: {np.allclose(U, H)}")

```

Οι άξονες z, y στην αναπαράσταση Euler δεν έχουν στην πραγματικότητα τίποτα το ιδιαίτερο: το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει για οποιοδήποτε ζεύγος κάθετων αξόνων.

3.11 Αναπαράσταση Euler για οποιαδήποτε κάθετα διανύσματα

Ας δείξουμε ότι για οποιαδήποτε δύο κάθετα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{n}, \mathbf{m}$ (δηλαδή $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0$), κάθε μοναδιαίος πίνακας U γράφεται εξίσου καλά στη μορφή

$$U = e^{j\alpha} R_{\mathbf{n}}(\beta) R_{\mathbf{m}}(\gamma) R_{\mathbf{n}}(\delta),$$

για κατάλληλες πραγματικές γωνίες $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ στην ουσία δηλαδή οι άξονες z, y ήταν απλώς μία βολική επιλογή. Η ιδέα είναι να «στρέψουμε» το πρόβλημα, από τα $\mathbf{n}, \mathbf{m}$, πίσω στο ήδη γνωστό μας πλαίσιο των z, y , να εφαρμόσουμε εκεί το αποτέλεσμα που ήδη αποδείξαμε, και μετά να στρέψουμε το αποτέλεσμα πίσω.

Θα χρειαστούμε πρώτα ένα βοηθητικό αποτέλεσμα: αν ένας μοναδιαίος πίνακας V υλοποιεί στην κατάσταση $|\psi\rangle$ ενός qubit μία περιστροφή.

$$|\phi\rangle = V |\psi\rangle$$

Στην ουσία το V είναι ένας 2×2 πίνακας $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ σαν αυτούς που είδαμε και προηγούμενα. Έστω επίσης ότι στη σφαίρα Bloch αυτή η περιστροφή περιγράφεται από τον 3×3 πίνακα $N = M_{\mathbf{a}}(\theta)$. Έτσι εάν $|\phi\rangle = a' |0\rangle + b' |1\rangle$ και (x', y', z') το σημείο που αντιστοιχεί στο $|\phi\rangle$ στη σφαίρα Bloch ενώ (x, y, z) το σημείο που αντιστοιχεί στο $|\psi\rangle$ θα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Τότε ισχύει:

$$V R_x(\theta) V^T = R_{N\mathbf{x}}(\theta),$$

$$V R_y(\theta) V^T = R_{N\mathbf{y}}(\theta),$$

$$V R_z(\theta) V^T = R_{N\mathbf{z}}(\theta),$$

όπου $\mathbf{x} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{y} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{z} = (0, 0, 1)$ είναι τα τρία μοναδιαία διανύσματα των αξόνων. Ας αποδείξουμε την πρώτη σχέση κάνοντας ρητά τις πράξεις, οι άλλες δύο αποδεικνύονται με ακριβώς τον ίδιο τρόπο, αντικαθιστώντας απλώς τον $\mathbf{X}$ με τον $\mathbf{Y}$ ή τον $\mathbf{Z}$.

Θυμηθείτε (ενότητα 3.6) ότι

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{I}_2 - j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{X}.$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με $\mathbf{V}$ και από δεξιά με $\mathbf{V}^T$, και χρησιμοποιώντας ότι $\mathbf{V} \mathbf{I}_2 \mathbf{V}^T = \mathbf{V} \mathbf{V}^T = \mathbf{I}_2$ (ο $\mathbf{V}$ είναι μοναδιαίος),

$$\mathbf{V} \mathbf{R}_x(\theta) \mathbf{V}^T = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{I}_2 - j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (\mathbf{V} \mathbf{X} \mathbf{V}^T).$$

Μένει λοιπόν μόνο να υπολογίσουμε το $\mathbf{V} \mathbf{X} \mathbf{V}^T$.

Θυμηθείτε από το παράδειγμα 3.6, ότι ο $\mathbf{X}$, ως ειδική περίπτωση $\mathbf{n} = \mathbf{x}$ του $\hat{R}_n(\pi)$, έχει ιδιοτιμές ± 1 με ιδιοδιανύσματα ακριβώς τις καταστάσεις qubit $|\psi_1\rangle$ και $|\psi_2\rangle$ που αντιστοιχούν στα σημεία $\mathbf{x} = (1, 0, 0)$ και $-\mathbf{x} = (-1, 0, 0)$ αντίστοιχα. Επομένως διαγωνιοποιώντας τον πίνακα $\mathbf{X}$ θα έχουμε:

$$\mathbf{X} = |\psi_1\rangle \langle \psi_1| - |\psi_2\rangle \langle \psi_2|$$

Αντικαθιστώντας:

$$\mathbf{V} \mathbf{X} \mathbf{V}^T = \mathbf{V} (|\psi_1\rangle \langle \psi_1| - |\psi_2\rangle \langle \psi_2|) \mathbf{V}^T = \mathbf{V} |\psi_1\rangle \langle \psi_1| \mathbf{V}^T - \mathbf{V} |\psi_2\rangle \langle \psi_2| \mathbf{V}^T$$

Το $\mathbf{V} |\psi_1\rangle$ στην σφαίρα Bloch αναπαρίσταται από ένα σημείο $\mathbf{r}_1$ που προκύπτει από την περιστροφή του $\mathbf{x} = (1, 0, 0)$ κατά την περιστροφή $\mathbf{N}$ που υλοποιεί ο $\mathbf{V}$. Έστω λοιπόν ότι

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{N} \mathbf{x}$$

Αντίστοιχα το $\mathbf{V} |\psi_2\rangle$ περιγράφεται από την περιστροφή του $-\mathbf{x} = (-1, 0, 0)$ κατά την ίδια $\mathbf{N}$, και περιγράφεται από το σημείο $\mathbf{r}_2$,

$$\mathbf{r}_2 = -\mathbf{N} \mathbf{x} = -\mathbf{r}_1$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$ αντιστοιχούν στις καταστάσεις ϕ_1 και ϕ_2 αντίστοιχα. Τότε χρησιμοποιώντας ότι

$$\langle \psi_i | \mathbf{V}^T = (\mathbf{V} |\psi_i\rangle)^T$$

βρίσκουμε ότι:

$$\mathbf{V} \mathbf{X} \mathbf{V}^T = |\phi_1\rangle \langle \phi_1| - |\phi_2\rangle \langle \phi_2|$$

Ας θυμηθούμε όμως τώρα το παράδειγμα 3.6: Ο πίνακας $\mathbf{R}_a(\pi)$ έχει ιδιοτιμές καταστάσεις $|\omega_1\rangle$ και $|\omega_2\rangle$ που πάνω στην σφαίρα Bloch αντιστοιχούν στο σημείο $\mathbf{a}$, με ιδιοτιμή 1 και στο σημείο $-\mathbf{a}$ με ιδιοτιμή -1, αντίστοιχα. Σε διαγώνια μορφή:

$$\mathbf{R}_a(\pi) = |\omega_1\rangle \langle \omega_1| - |\omega_2\rangle \langle \omega_2|$$

Αν θέσουμε $\mathbf{a} = \mathbf{N} \mathbf{x}$ τότε το $|\omega_1\rangle$ και το $|\phi_1\rangle$ αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο $\mathbf{r}_1 = \mathbf{N} \mathbf{x} = \mathbf{a}$ και το ίδιο ισχύει για το $|\omega_2\rangle$ και το $|\phi_2\rangle$ που αντιστοιχούν στο σημείο $\mathbf{r}_2 = -\mathbf{N} \mathbf{x} = -\mathbf{a}$. Σε αυτή την περίπτωση επομένως, $|\omega_1\rangle = |\phi_1\rangle$ και $|\omega_2\rangle = |\phi_2\rangle$, οπότε:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \mathbf{X} \mathbf{V}^T &= |\phi_1\rangle \langle \phi_1| - |\phi_2\rangle \langle \phi_2| = |\omega_1\rangle \langle \omega_1| - |\omega_2\rangle \langle \omega_2| = \mathbf{R}_a(\pi) \\ &= \cos \frac{\pi}{2} \mathbf{I}_2 - j \sin \frac{\pi}{2} \mathbf{A} = -j \mathbf{A} \end{aligned}$$

όπου

$$\mathbf{A} = n_x \mathbf{X} + n_y \mathbf{Y} + n_z \mathbf{Z}$$

Οπότε τελικά θα έχουμε:

$$\mathbf{V} \mathbf{R}_x(\theta) \mathbf{V}^T = \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{I}_2 - j \sin \frac{\theta}{2} (\mathbf{V} \mathbf{X} \mathbf{V}^T) = \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{I}_2 - j \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{A} = \mathbf{R}_a(\theta)$$

όπου $\mathbf{a} = \mathbf{N}\mathbf{x}$, δηλαδή ακριβώς τη ζητούμενη σχέση.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, αντικαθιστώντας παντού στα παραπάνω βήματα το $\mathbf{X}$ με το $\mathbf{Y}$ και το $\mathbf{x} = (1, 0, 0)$ με το $\mathbf{y} = (0, 1, 0)$, αποδεικνύεται και η δεύτερη σχέση,

$$\mathbf{V}\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{V}^T = \mathbf{R}_{Ny}(\theta).$$

Ομοίως, αντικαθιστώντας το $\mathbf{X}$ με το $\mathbf{Z}$ και το $\mathbf{x}$ με το $\mathbf{z} = (0, 0, 1)$, προκύπτει και η τρίτη σχέση,

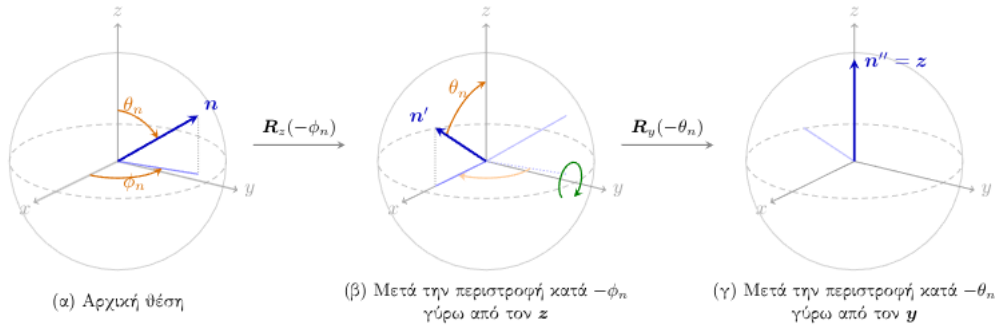
$$\mathbf{V}\mathbf{R}_z(\theta)\mathbf{V}^T = \mathbf{R}_{Nz}(\theta).$$

Αποδείξαμε λοιπόν και τις τρεις σχέσεις που θέλαμε.

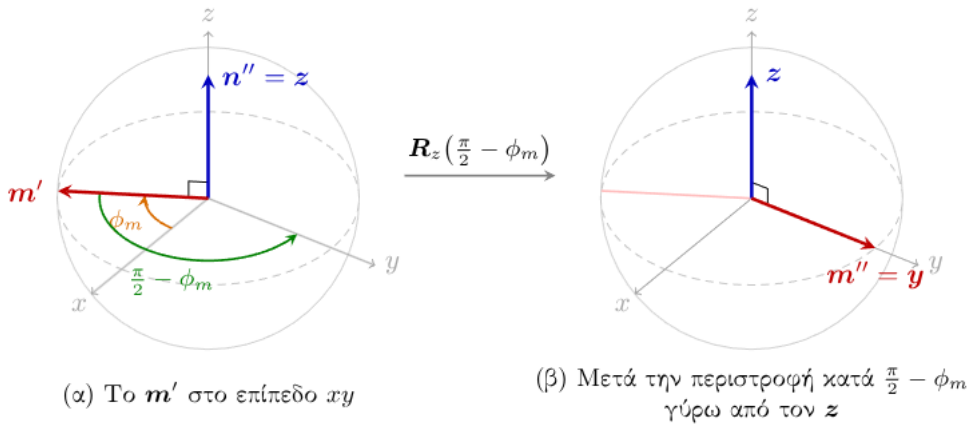
Παρατηρήστε ότι η απόδειξη αυτή δεν χρησιμοποίησε πουθενά κάτι ειδικό για τους άξονες $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, πέρα από τη γενική ιδιοανάλυση του παραδείγματος 3.6, η οποία ισχύει για οποιοδήποτε μοναδιαίο διάνυσμα, όχι μόνο για τους τρεις κύριους άξονες. Η ίδια ακριβώς απόδειξη δείχνει λοιπόν, για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{k}$,

$$\mathbf{V}\mathbf{R}_k(\theta)\mathbf{V}^T = \mathbf{R}_{Nk}(\theta).$$

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε τη ζητούμενη σχέση. Έστω $\mathbf{n}, \mathbf{m}$ τα δύο δοσμένα κάθετα μοναδιαία διανύσματα. Αν το $\mathbf{n}$ σχηματίζει μία γωνία θ_n με τον άξονα των $\mathbf{z}$ και η προβολή του μία γωνία ϕ_n με τον άξονα των $\mathbf{x}$ τότε μπορούμε να περιστρέψουμε το διάνυσμα κατά μία γωνία $-\phi_n$ ως προς τον άξονα των $\mathbf{z}$ ώστε η προβολή του να συμπίσει με τον άξονα των $\mathbf{x}$ και μετά να κάνουμε μία περιστροφή ως προς τον άξονα των $\mathbf{y}$ ώστε να συμπίσει πλήρως με τον άξονα των $\mathbf{z}$ όπως δείχνει και το σχήμα 3.16. Το διάνυσμα $\mathbf{m}$ θα πρέπει να είναι στο επίπεδο xy εφόσον είναι κάθετο στο $\mathbf{n}$ που τώρα έχει συμπίσει με το $\mathbf{z}$. Αν ϕ_m η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα των $\mathbf{x}$ τότε στρέφοντας το κατά $\pi/2 - \phi_m$ γύρω από τον άξονα $\mathbf{z}$ το $\mathbf{m}$ θα συμπίσει με τον άξονα των $\mathbf{y}$ όπως δείχνει και το σχήμα 3.17. Άρα λοιπόν πάντα υπάρχει ένας μο-



Σχήμα 3.16: Περιστροφή ώστε το $\mathbf{n}$ να πέσει στον άξονα των $\mathbf{z}$.



Σχήμα 3.17: Περιστροφή ώστε το $\mathbf{m}$ να πέσει στον άξονα των $\mathbf{y}$.

ναδιαίος πίνακας V που όταν εφαρμόζεται πάνω στην κατάσταση του qubit να υλοποιεί το σύνολο αυτών των τριών περιστροφών: εφόσον κάθε περιστροφή στην σφαίρα Bloch μεταφράζεται σε ένα μοναδιαίο πίνακα, το γινόμενο V που προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τους επιμέρους πίνακες πάλι θα είναι μοναδιαίος. Εφαρμόζοντας το βοηθητικό αποτέλεσμα σε αυτόν τον V , με $k = n$ και $k = m$ αντίστοιχα,

$$V R_n(\theta) V^T = R_z(\theta), \quad V R_m(\theta) V^T = R_y(\theta).$$

Πολλαπλασιάζοντας κάθε μία από τις δύο παραπάνω σχέσεις από αριστερά με V^T και από δεξιά με V , και χρησιμοποιώντας $V^T V = I_2$, τις αντιστρέφουμε στη μορφή που θα μας χρειαστεί,

$$R_n(\theta) = V^T R_z(\theta) V, \quad R_m(\theta) = V^T R_y(\theta) V.$$

Έστω τώρα ένας τυχαίος μοναδιαίος πίνακας U . Ας τον στρέψουμε στο πλαίσιο των z, y , ορίζοντας $\tilde{U} = V U V^T$, κι αυτός μοναδιαίος, αφού ο V είναι μοναδιαίος. Ο $\tilde{U}$ γράφεται λοιπόν (ενότητα 3.9) στην ήδη γνωστή μορφή

$$\tilde{U} = V U V^T = e^{j\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta),$$

για κατάλληλα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Λύνοντας ως προς U (πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με V^T και από δεξιά με V , δηλαδή στρέφοντας το αποτέλεσμα πίσω στο πλαίσιο των n, m),

$$U = V^T \tilde{U} V = e^{j\alpha} (V^T R_z(\beta) V) (V^T R_y(\gamma) V) (V^T R_z(\delta) V),$$

και αντικαθιστώντας τις δύο σχέσεις που βρήκαμε παραπάνω,

$$U = e^{j\alpha} R_n(\beta) R_m(\gamma) R_n(\delta).$$

Αφού ο U ήταν τυχαίος, αποδείξαμε ότι κάθε μοναδιαίος πίνακας γράφεται με αυτόν τον τρόπο, χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε ζεύγος κάθετων αξόνων n, m αντί για τους z, y .

Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει στην πραγματικότητα σε ακόμα μεγαλύτερη γενικότητα: η καθετότητα $n \cdot m = 0$ δεν είναι απαραίτητη, παρά μόνο μία βολική ειδική περίπτωση. Δεν θα αποδείξουμε εδώ αυτή τη γενικότερη μορφή, καθώς απαιτεί πιο εκτεταμένη συζήτηση.

Αποτέλεσμα 3.10: Αναπαράσταση με δύο τυχαίους μη παράλληλους άξονες

Για οποιαδήποτε δύο μη παράλληλα μοναδιαία διανύσματα n, m (δηλαδή $n \neq \pm m$), κάθε μοναδιαίος πίνακας U γράφεται στη μορφή

$$U = e^{j\alpha} R_n(\beta) R_m(\gamma) R_n(\delta),$$

για κατάλληλες πραγματικές γωνίες $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Παράδειγμα 3.35: Αναπαράσταση Euler της πύλης Hadamard για δύο κάθετα διανύσματα εκτός των κύριων αξόνων

Ας εφαρμόσουμε την παραπάνω κατασκευή σε ένα συγκεκριμένο ζεύγος κάθετων μοναδιαίων διανυσμάτων που δεν ταυτίζονται με κανέναν από τους άξονες x, y, z :

$$n = \frac{1}{3}(1, 2, 2), \quad m = \frac{1}{3}(-2, 2, -1).$$

Πράγματι, $|n|^2 = \frac{1}{9}(1 + 4 + 4) = 1$, $|m|^2 = \frac{1}{9}(4 + 4 + 1) = 1$ και $n \cdot m = \frac{1}{9}(-2 + 4 - 2) = 0$, άρα τα n, m είναι μοναδιαία και κάθετα μεταξύ τους, ενώ κανένα από τα δύο δεν ταυτίζεται με κάποιον άξονα.

Χρειαζόμαστε, όπως στην απόδειξη, έναν μοναδιαίο πίνακα V που να υλοποιεί μία περιστροφή N του χώρου με $Nn = z$, $Nm = y$. Μπορεί κανείς να επαληθεύσει ότι αυτόν τον ρόλο τον παίζει η περιστροφή κατά γωνία $\pi/3$ γύρω από τον άξονα $p = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)$, δηλαδή

$$V = R_p\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Υπολογίζοντας το γινόμενο $\tilde{U} = \mathbf{V}\mathbf{H}\mathbf{V}^T$ (με τη βοήθεια του γενικού τύπου του $\mathbf{R}_k(\theta)$ από την ενότητα 3.8) προκύπτει

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & j\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -j\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Εφαρμόζουμε τώρα στον $\tilde{U}$ την ίδια διαδικασία εξαγωγής γωνιών Euler που περιγράφεται στο αποτέλεσμα 3.9. Αφού $\det \tilde{U} = -1$,

$$\alpha = \frac{1}{2} \arg(\det \tilde{U}) = \frac{\pi}{2}.$$

Ο πίνακας $\mathbf{M} = e^{-j\alpha}\tilde{U}$ έχει στοιχεία πρώτης γραμμής $m_{11} = -j\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $m_{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, οπότε

$$\frac{\gamma}{2} = \arccos|m_{11}| = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Γράφοντας $m_{11} = |m_{11}|e^{j\phi_{11}}$ με $\phi_{11} = -\pi/2$ και $m_{12} = |m_{12}|e^{j\phi_{12}}$ με $\phi_{12} = 0$, βρίσκουμε

$$\beta = \pi - \phi_{11} - \phi_{12} = \frac{3\pi}{2}, \quad \delta = \phi_{12} - \phi_{11} - \pi = -\frac{\pi}{2}.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στην αναπαράσταση

$$\mathbf{H} = e^{j\pi/2} \mathbf{R}_n\left(\frac{3\pi}{2}\right) \mathbf{R}_m\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{R}_n\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

την οποία μπορούμε να επαληθεύσουμε αντικαθιστώντας τα $\mathbf{n}, \mathbf{m}$ στον γενικό τύπο του $\mathbf{R}_k(\theta)$: το γινόμενο των τριών πινάκων, επί τη φάση $e^{j\pi/2} = j$, δίνει πράγματι ακριβώς τον $\mathbf{H}$. Όπως και στο παράδειγμα 3.34, η γωνία $\beta = 3\pi/2$ δεν έχει αναχθεί στο διάστημα $[0, 2\pi)$ με τον "συντομότερο" τρόπο· αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα, αφού κάθε ισοδύναμη επιλογή γωνιών δίνει το ίδιο $\mathbf{H}$.

Ας προσθέσουμε και αυτή τη διαδικασία στη βιβλιοθήκη μας, ως μία μέθοδο `euler_angles_nm` της `SingleQubitGate`. Η μέθοδος κατασκευάζει τον $\mathbf{V}$ ακριβώς όπως στην απόδειξη, με τις τρεις διαδοχικές περιστροφές (κατά $-\phi_n$ γύρω από τον z , κατά $-\theta_n$ γύρω από τον y και κατά $\pi/2 - \phi_m$ γύρω από τον z), υπολογίζει τον $\tilde{U} = \mathbf{V}\mathbf{U}\mathbf{V}^T$ και εφαρμόζει σε αυτόν τη μέθοδο `euler_angles`:

```
def euler_angles_nm(self, n, m):
    n = np.array(n, dtype=float) / np.linalg.norm(n)
    m = np.array(m, dtype=float) / np.linalg.norm(m)
    if abs(n @ m) > 1e-10:
        raise ValueError("n and m must be perpendicular")
    # rotate n onto z: first -phi_n around z, then -theta_n around y
    theta_n = np.arccos(np.clip(n[2], -1, 1))
    phi_n = np.arctan2(n[1], n[0])
    m1 = M_y(-theta_n) @ M_z(-phi_n) @ m
    # m now lies on the xy plane: rotate it onto y around z
    phi_m = np.arctan2(m1[1], m1[0])
    V = (BlochRotationZ(np.pi / 2 - phi_m).U
         @ BlochRotationY(-theta_n).U
         @ BlochRotationZ(-phi_n).U)
    U_tilde = SingleQubitGate(V @ self.U @ V.conj().T)
    return U_tilde.euler_angles()
```

Ένα script που επιβεβαιώνει αριθμητικά το παράδειγμα 3.35, βρίσκεται στο αρχείο `python/ex_euler_general_Hadamard.py`:

```
import numpy as np
```

```

from qulib import GateH, BlochRotationN

np.set_printoptions(precision=4, suppress=True)

# Example: the Euler representation of the Hadamard gate around n, m
n = np.array([1, 2, 2]) / 3
m = np.array([-2, 2, -1]) / 3
print(f"|n| = {np.linalg.norm(n):.4f}, |m| = {np.linalg.norm(m):.4f}, n.m = {n @ m:.4f}")

H = GateH()

# the rotation V = R_p(pi/3), p = (1,-1,-1)/sqrt(3), of the example
V = BlochRotationN([1, -1, -1], np.pi / 3).U
U_tilde = V @ H.U @ V.conj().T
print(f"U_tilde = V H V^dagger =\n{U_tilde}")

alpha, beta, gamma, delta = H.euler_angles_nm(n, m)
print(f"alpha = {alpha:.4f}, beta = {beta:.4f}, gamma = {gamma:.4f}, delta = {delta:.4f}")
print(f"expected: alpha = pi/2, beta = 3*pi/2, gamma = pi/2, delta = -pi/2")

# check that they really do reconstruct H
U = (np.exp(1j * alpha) * BlochRotationN(n, beta).U
      @ BlochRotationN(m, gamma).U @ BlochRotationN(n, delta).U)
print(f"e^(j alpha) R_n(beta) R_m(gamma) R_n(delta) =\n{U}")
print(f"matches H: {np.allclose(U, H.U)}")

```

3.12 Η αναπαράσταση $U = e^{j\alpha}AXBXC$

Θα δείξουμε τώρα μία ακόμα χρήσιμη ιδιότητα κάθε μοναδιαίου πίνακα U ενός qubit: υπάρχουν πάντα μοναδιαίοι πίνακες A, B, C , με

$$ABC = I_2,$$

και μία πραγματική σταθερά α , τέτοιοι ώστε

$$U = e^{j\alpha}AXBXC,$$

όπου X είναι ο ήδη γνωστός πίνακας Pauli. Το αποτέλεσμα αυτό δεν είναι απλώς μία ακόμα αναπαράσταση του U : θα το χρησιμοποιήσουμε παρακάτω για να κατασκευάσουμε ένα κύκλωμα που υλοποιεί την ελεγχόμενη εκδοχή μίας οποιασδήποτε πύλης ενός qubit, δηλαδή μία πύλη που εφαρμόζει το U σε ένα qubit μόνο όταν ένα δεύτερο (ελέγχου) qubit βρίσκεται στην κατάσταση $|1\rangle$, χρησιμοποιώντας μόνο τις πύλες A, B, C και δύο αντίγραφα της γνωστής ελεγχόμενης πύλης CNOT που υλοποιεί το X . Επομένως αν το qubit ελέγχου είναι μηδέν δηλαδή $|0\rangle$ τότε η πύλη CNOT αφήνει το αρχικό qubit να περάσει ως έχει. Επομένως αν το πρώτο qubit είναι στην κατάσταση αυτή, το qubit εξόδου θα είναι

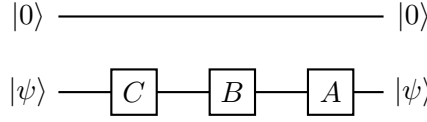
$$|\phi\rangle = ABC|\psi\rangle = I_2|\psi\rangle = |\psi\rangle$$

Δηλαδή σε αυτή την περίπτωση η έξοδος ισούται με την είσοδο. Όταν το qubit ελέγχου είναι $|1\rangle$ τότε όμως οι ελεγχόμενες πύλες υλοποιούν το X οπότε:

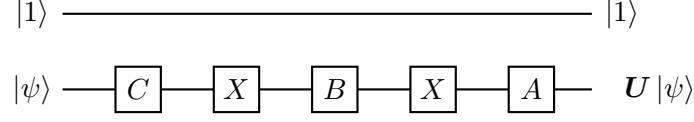
$$|\phi\rangle = AXBXC|\psi\rangle = U|\psi\rangle$$

Οπότε σε αυτήν την περίπτωση η έξοδος ισούται με $U|\psi\rangle$.

Ας απεικονίσουμε τις δύο αυτές ειδικές περιπτώσεις. Όταν το qubit-ελέγχου είναι $|0\rangle$, καμία ελεγχόμενη πύλη δεν ενεργοποιείται, οπότε το κύκλωμα απλοποιείται στις τρεις (μη ελεγχόμενες) πύλες C, B, A πάνω στο qubit-στόχο, ενώ το qubit-ελέγχου παραμένει ανεπηρέαστο:



Όταν το qubit-ελέγχου είναι $|1\rangle$, οι ελεγχόμενες πύλες γίνονται απλές (μη ελεγχόμενες) πύλες X πάνω στο qubit-στόχο, αφού το qubit-ελέγχου έχει πλέον μία σταθερή, γνωστή τιμή και δεν χρειάζεται πια τον συμβολισμό μίας ελεγχόμενης πύλης:



Θα δούμε πως αυτή η λογική είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την υλοποίηση κβαντικών κυκλωμάτων στο επόμενο κεφάλαιο. Οι πίνακες A, B, C θα προκύψουν φυσιολογικά από τους πίνακες περιστροφής R_y, R_z της προηγούμενης ενότητας, μέσω της αναπαράστασης Euler $U = e^{j\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta)$ (ενότητα 3.9) που ήδη γνωρίζουμε. Πριν προχωρήσουμε στην κατασκευή, θα χρειαστούμε δύο βοηθητικές ιδιότητες.

Ας δείξουμε πρώτα ότι δύο διαδοχικές περιστροφές γύρω από τον ίδιο άξονα n ισοδυναμούν με μία περιστροφή γύρω από το ίδιο n , κατά το άθροισμα των γωνιών, δηλαδή:

$$R_n(\theta_1)R_n(\theta_2) = R_n(\theta_1 + \theta_2).$$

Το αποδεικνύουμε στο παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 3.36: $R_n(\theta_1)R_n(\theta_2) = R_n(\theta_1 + \theta_2)$

Συμβολίζοντας με:

$$c_i = \cos(\theta_i/2)$$

$$s_i = \sin(\theta_i/2)$$

όπου $i = 1, 2$, θα έχουμε:

$$R_n(\theta_1) = c_1 I_2 - j s_1 A$$

$$R_n(\theta_2) = c_2 I_2 - j s_2 A$$

Χρησιμοποιώντας $A^2 = I_2$ που είδαμε στην ενότητα 3.3 μπορούμε να δούμε ότι:

$$R_n(\theta_1)R_n(\theta_2) = (c_1 I_2 - j s_1 A)(c_2 I_2 - j s_2 A) = (c_1 c_2 - s_1 s_2) I_2 - j(s_1 c_2 + c_1 s_2) A.$$

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες αθροίσματος γωνιών,

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

βρίσκουμε ότι:

$$c_1 c_2 - s_1 s_2 = \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$$

$$s_1 c_2 + c_1 s_2 = \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right),$$

καταλήγουμε ακριβώς στο $R_n(\theta_1 + \theta_2)$.

Θα χρειαστούμε επίσης μία δεύτερη ιδιότητα: ο X , όταν εφαρμόζεται πριν και μετά μία περιστροφή γύρω από τους άξονες των y, z αντιστρέφει το πρόσημο της γωνίας περιστροφής, δηλαδή:

$$X R_y(\theta) X = R_y(-\theta)$$

$$X R_z(\theta) X = R_z(-\theta)$$

Το δείχνουμε και αυτό με την μορφή παραδείγματος:

Παράδειγμα 3.37: $XR_y(\theta)X = R_y(-\theta)$, $XR_z(\theta)X = R_z(-\theta)$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες πολλαπλασιασμού των πινάκων Pauli,

$$XY = jZ$$

$$ZX = jY$$

Οπότε προκύπτει:

$$XYX = (jZ)X = j(ZX) = j(jY) = -Y.$$

Με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες

$$XZ = -jY$$

$$YX = -jZ$$

θα έχουμε:

$$XZX = (-jY)X = -j(YX) = -j(-jZ) = -Z.$$

Άρα, χρησιμοποιώντας $X^2 = I_2$,

$$XR_y(\theta)X = X [\cos(\theta/2)I_2 - j \sin(\theta/2)Y] X = \cos(\theta/2)I_2 + j \sin(\theta/2)Y = R_y(-\theta),$$

και ομοίως $XR_z(\theta)X = R_z(-\theta)$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη από αριστερά (ή δεξιά) με X και χρησιμοποιώντας $X^2 = I_2$, οι παραπάνω σχέσεις γράφονται εξίσου χρήσιμα ως

$$XR_y(\theta) = R_y(-\theta)X,$$

$$XR_z(\theta) = R_z(-\theta)X.$$

Είμαστε πλέον έτοιμοι να ορίσουμε τους πίνακες A, B, C , χρησιμοποιώντας τις γωνίες β, γ, δ της αναπαράστασης Euler του U :

$$U = e^{j\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta)$$

Επιλέγουμε τους πίνακες ως εξής:

$$A = R_z(\beta) R_y\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$B = R_y\left(-\frac{\gamma}{2}\right) R_z\left(-\frac{\beta + \delta}{2}\right)$$

$$C = R_z\left(\frac{\delta - \beta}{2}\right)$$

Οι A, B, C είναι μοναδιαίοι, ως γινόμενα μοναδιαίων πινάκων R_y, R_z . Θα δείξουμε ότι αυτή η επιλογή των πινάκων πληρεί τις σχέσεις που θέλουμε,

$$ABC = I_2$$

$$e^{j\alpha} AXBXC = U$$

Ας δείξουμε πρώτα ότι $ABC = I_2$. Αντικαθιστώντας και χρησιμοποιώντας δύο φορές τη σύνθεση περιστροφών γύρω από τον ίδιο άξονα,

$$ABC = R_z(\beta) R_y\left(\frac{\gamma}{2}\right) R_y\left(-\frac{\gamma}{2}\right) R_z\left(-\frac{\beta + \delta}{2}\right) R_z\left(\frac{\delta - \beta}{2}\right) = R_z(\beta) R_y(0) R_z\left(-\frac{\beta + \delta}{2} + \frac{\delta - \beta}{2}\right).$$

Το άθροισμα των δύο τελευταίων γωνιών είναι

$$-\frac{\beta + \delta}{2} + \frac{\delta - \beta}{2} = -\beta,$$

ενώ $\mathbf{R}_y(0) = \mathbf{I}_2$, οπότε

$$\mathbf{ABC} = \mathbf{R}_z(\beta) \mathbf{R}_z(-\beta) = \mathbf{R}_z(0) = \mathbf{I}_2,$$

ακριβώς όπως θέλαμε.

Ας δείξουμε τώρα ότι $\mathbf{AXBXC} = \mathbf{M} = \mathbf{R}_z(\beta) \mathbf{R}_y(\gamma) \mathbf{R}_z(\delta)$, δηλαδή ακριβώς τον πίνακα $\mathbf{M} = e^{-j\alpha} \mathbf{U}$ της αναπαράστασης Euler (ενότητα 3.9). Αντικαθιστώντας τον $\mathbf{B}$ και χρησιμοποιώντας πρώτα $\mathbf{X} \mathbf{R}_y(-\gamma/2) = \mathbf{R}_y(\gamma/2) \mathbf{X}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{AXBXC} &= \mathbf{R}_z(\beta) \mathbf{R}_y\left(\frac{\gamma}{2}\right) \underbrace{\mathbf{X} \mathbf{R}_y\left(-\frac{\gamma}{2}\right)}_{=\mathbf{R}_y(\gamma/2)\mathbf{X}} \mathbf{R}_z\left(-\frac{\beta+\delta}{2}\right) \mathbf{XC} \\ &= \mathbf{R}_z(\beta) \mathbf{R}_y\left(\frac{\gamma}{2}\right) \mathbf{R}_y\left(\frac{\gamma}{2}\right) \mathbf{X} \mathbf{R}_z\left(-\frac{\beta+\delta}{2}\right) \mathbf{XC}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη σύνθεση περιστροφών γύρω από τον ίδιο άξονα, $\mathbf{R}_y(\gamma/2) \mathbf{R}_y(\gamma/2) = \mathbf{R}_y(\gamma)$, και στη συνέχεια $\mathbf{X} \mathbf{R}_z(-(\beta+\delta)/2) \mathbf{X} = \mathbf{R}_z((\beta+\delta)/2)$,

$$\mathbf{AXBXC} = \mathbf{R}_z(\beta) \mathbf{R}_y(\gamma) \mathbf{R}_z\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right) \mathbf{C} = \mathbf{R}_z(\beta) \mathbf{R}_y(\gamma) \mathbf{R}_z\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right) \mathbf{R}_z\left(\frac{\delta-\beta}{2}\right).$$

Χρησιμοποιώντας ξανά τη σύνθεση περιστροφών γύρω από τον ίδιο άξονα στους δύο τελευταίους παράγοντες, με άθροισμα γωνιών

$$\frac{\beta+\delta}{2} + \frac{\delta-\beta}{2} = \delta,$$

$$\mathbf{AXBXC} = \mathbf{R}_z(\beta) \mathbf{R}_y(\gamma) \mathbf{R}_z(\delta) = \mathbf{M}.$$

Αφού $\mathbf{U} = e^{j\alpha} \mathbf{M}$, καταλήγουμε ακριβώς στο ζητούμενο,

$$\mathbf{U} = e^{j\alpha} \mathbf{AXBXC}.$$

Παράδειγμα 3.38: Οι πίνακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ για την πύλη Hadamard

Ας βρούμε τους πίνακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ για την ίδια την πύλη Hadamard, χρησιμοποιώντας τις γωνίες Euler που υπολογίσαμε στο παράδειγμα 3.34,

$$\beta = 2\pi, \quad \gamma = \frac{\pi}{2}, \quad \delta = -\pi.$$

Για τον $\mathbf{A} = \mathbf{R}_z(\beta) \mathbf{R}_y(\gamma/2) = \mathbf{R}_z(2\pi) \mathbf{R}_y(\pi/4)$, θυμηθείτε ότι

$$\mathbf{R}_z(2\pi) = \begin{bmatrix} e^{-j\pi} & 0 \\ 0 & e^{j\pi} \end{bmatrix} = -\mathbf{I}_2$$

(η ίδια πλήρης περιστροφή κατά 2π που εμφανίστηκε ήδη στο παράδειγμα 3.34), οπότε

$$\mathbf{A} = -\mathbf{R}_y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\begin{bmatrix} \cos(\pi/8) & -\sin(\pi/8) \\ \sin(\pi/8) & \cos(\pi/8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\pi/8) & \sin(\pi/8) \\ -\sin(\pi/8) & -\cos(\pi/8) \end{bmatrix}.$$

Για τον $\mathbf{B} = \mathbf{R}_y(-\gamma/2) \mathbf{R}_z(-(\beta+\delta)/2)$, εφόσον $\beta+\delta = 2\pi - \pi = \pi$, έχουμε $-(\beta+\delta)/2 = -\pi/2$, οπότε

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{R}_y\left(-\frac{\pi}{4}\right) \mathbf{R}_z\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\pi/8) & \sin(\pi/8) \\ -\sin(\pi/8) & \cos(\pi/8) \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1+j & 0 \\ 0 & 1-j \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos(\pi/8)(1+j) & \sin(\pi/8)(1-j) \\ -\sin(\pi/8)(1+j) & \cos(\pi/8)(1-j) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Για τον $\mathbf{C} = \mathbf{R}_z((\delta-\beta)/2)$, εφόσον $\delta-\beta = -\pi - 2\pi = -3\pi$, έχουμε $(\delta-\beta)/2 = -3\pi/2 = \pi/2 - 2\pi$, οπότε χρησιμοποιώντας ξανά την ίδια ιδιότητα $\mathbf{R}_z(\theta - 2\pi) = -\mathbf{R}_z(\theta)$,

$$\mathbf{C} = \mathbf{R}_z\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\mathbf{R}_z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-j & 0 \\ 0 & 1+j \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} j-1 & 0 \\ 0 & -1-j \end{bmatrix}.$$

Αντί να επαληθεύσουμε το $ABC = I_2$ πολλαπλασιάζοντας απευθείας τα παραπάνω στοιχεία, κάτι που θα οδηγούσε σε επίπονη άλγεβρα με τα $\cos(\pi/8)$, $\sin(\pi/8)$, ως εκμεταλλευτούμε τη σύνθεση περιστροφών γύρω από τον ίδιο άξονα που είδαμε παραπάνω. Γράφοντας $A = -R_y(\pi/4)$ και $C = -R_z(\pi/2)$, τα δύο πρόσημα απαλείφονται στο γινόμενο ABC ,

$$ABC = \left[-R_y\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \left[R_y\left(-\frac{\pi}{4}\right) R_z\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \left[-R_z\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = R_y\left(\frac{\pi}{4}\right) R_y\left(-\frac{\pi}{4}\right) R_z\left(-\frac{\pi}{2}\right) R_z\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Εφαρμόζοντας τη σύνθεση περιστροφών γύρω από τον ίδιο άξονα σε κάθε ζεύγος παραγόντων,

$$ABC = R_y(0) R_z(0) = I_2 \cdot I_2 = I_2,$$

όπως αναμενόταν από το γενικό αποτέλεσμα που αποδείξαμε παραπάνω.

Ας προσθέσουμε και τον υπολογισμό των A, B, C στη βιβλιοθήκη μας, ως μία ακόμα μέθοδο ABC της `SingleQubitGate`, που χρησιμοποιεί εσωτερικά την `euler_angles` για να βρει πρώτα τις γωνίες β, γ, δ :

```
def ABC(self):
    alpha, beta, gamma, delta = self.euler_angles()
    A = BlochRotationZ(beta).U @ BlochRotationY(gamma / 2).U
    B = BlochRotationY(-gamma / 2).U @ BlochRotationZ(-(beta + delta) / 2).U
    C = BlochRotationZ((delta - beta) / 2).U
    return A, B, C
```

Ένα script που επιβεβαιώνει αριθμητικά το παράδειγμα 3.38, βρίσκεται στο αρχείο `python/ex_ABC_Hadamard.py`:

```
import numpy as np

from qulib import SingleQubitGate

np.set_printoptions(precision=4, suppress=True)

# Example 3.27: the matrices A, B, C for the Hadamard gate
H = np.array([[1, 1], [1, -1]], dtype=complex) / np.sqrt(2)
alpha, beta, gamma, delta = SingleQubitGate(H).euler_angles()
A, B, C = SingleQubitGate(H).ABC()

print(f"A =\n{A}")
print(f"B =\n{B}")
print(f"C =\n{C}")

# A B C should equal the identity
print(f"A @ B @ C =\n{A @ B @ C}")

# e^(j alpha) A X B X C should reconstruct H
X = np.array([[0, 1], [1, 0]], dtype=complex)
U = np.exp(1j * alpha) * A @ X @ B @ X @ C
print(f"e^(j alpha) A X B X C =\n{U}")
print(f"matches H: {np.allclose(U, H)}")
```

Αποτέλεσμα 3.11: Η αναπαράσταση $U = e^{j\alpha} A X B X C$

Για κάθε μοναδιαίο 2×2 πίνακα U (δηλαδή κάθε πύλη ενός qubit), με αναπαράσταση Euler $U = e^{j\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta)$, οι μοναδιαίοι πίνακες

$$A = R_z(\beta) R_y\left(\frac{\gamma}{2}\right), \quad B = R_y\left(-\frac{\gamma}{2}\right) R_z\left(-\frac{\beta + \delta}{2}\right), \quad C = R_z\left(\frac{\delta - \beta}{2}\right)$$

$$ABC = I_2, \quad U = e^{j\alpha} AXBXC.$$

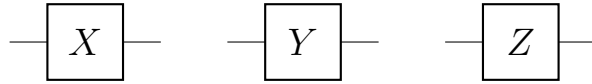
3.13 Βασικές κβαντικές πύλες ενός qubit

Πριν προχωρήσουμε στην κατασκευή κυκλωμάτων, ας συγκεντρώσουμε τους πίνακες και τα κυκλωματικά σύμβολα των βασικών κβαντικών πυλών ενός qubit που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια. Σε ένα κβαντικό κύκλωμα κάθε πύλη που δρά πάνω σε ένα μόνο qubit, παριστάνεται με ένα κουτί με το αντίστοιχο γράμμα, με ένα καλώδιο να μπαίνει από αριστερά και ένα να βγαίνει από δεξιά, που αντιπροσωπεύουν τη ροή της κατάστασης του qubit στον χρόνο.

Οι πύλες Pauli X, Y, Z αντιστοιχούν, όπως είδαμε ήδη (ενότητα 3.2), σε περιστροφές κατά π γύρω από τους ομώνυμους άξονες της σφαίρας Bloch,

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

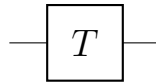
με κυκλωματικά σύμβολα



Η πύλη T , γνωστή και ως πύλη $\pi/8$, δίνεται από

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{j\pi/4} \end{bmatrix},$$

με κυκλωματικό σύμβολο

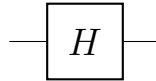


Παρατηρήστε ότι $T = e^{j\pi/8} R_z(\pi/4)$ (ενότητα 3.9), δηλαδή η T είναι μία περιστροφή κατά $\pi/4$ γύρω από τον άξονα z επί μία καθολική φάση $e^{j\pi/8}$. Από εδώ προέρχεται και το εναλλακτικό της όνομα.

Η πύλη Hadamard, που είδαμε στο παράδειγμα 3.9, ότι αντιστοιχεί σε περιστροφή κατά π γύρω από τον άξονα $(1, 0, 1)/\sqrt{2}$, δίνεται από

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

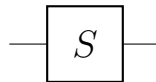
με κυκλωματικό σύμβολο



Η πύλη φάσης S δίνεται από

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix},$$

με κυκλωματικό σύμβολο



Παρατηρήστε ότι $S = e^{j\pi/4} R_z(\pi/2)$, δηλαδή η S είναι μία περιστροφή κατά $\pi/2$ γύρω από τον άξονα z επί μία καθολική φάση, και ότι $T^2 = S$.

Παράδειγμα 3.39: Η πύλη Hadamard εναλλάσσει τους πίνακες Pauli X, Z

Δηλαδή:

$$\mathbf{H}\mathbf{X}\mathbf{H} = \mathbf{Z}, \quad \mathbf{H}\mathbf{Y}\mathbf{H} = -\mathbf{Y}, \quad \mathbf{H}\mathbf{Z}\mathbf{H} = \mathbf{X}.$$

Ας υπολογίσουμε τα γινόμενα $\mathbf{H}\mathbf{X}\mathbf{H}$, $\mathbf{H}\mathbf{Y}\mathbf{H}$ και $\mathbf{H}\mathbf{Z}\mathbf{H}$. Πολλαπλασιάζουμε πρώτα $\mathbf{H}\mathbf{X}$,

$$\mathbf{H}\mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

και στη συνέχεια

$$\mathbf{H}\mathbf{X}\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{Z}.$$

Με τον ίδιο τρόπο, για τον $\mathbf{Z}$,

$$\mathbf{H}\mathbf{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}\mathbf{Z}\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{X}.$$

Τέλος, για τον $\mathbf{Y}$,

$$\mathbf{H}\mathbf{Y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} j & -j \\ -j & -j \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}\mathbf{Y}\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} j & -j \\ -j & -j \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2j \\ -2j & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{bmatrix} = -\mathbf{Y}.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στις σχέσεις

$$\mathbf{H}\mathbf{X}\mathbf{H} = \mathbf{Z}, \quad \mathbf{H}\mathbf{Y}\mathbf{H} = -\mathbf{Y}, \quad \mathbf{H}\mathbf{Z}\mathbf{H} = \mathbf{X}.$$

Το αποτέλεσμα αυτό δεν είναι καθόλου τυχαίο: όπως είδαμε (παράδειγμα 3.32), η $\mathbf{H}$ είναι, μέχρι μία καθολική φάση, μία περιστροφή κατά π γύρω από τον άξονα $(1, 0, 1)/\sqrt{2}$ που διχοτομεί τους άξονες x, z , και μία τέτοια περιστροφή αντιμετωπίζει ακριβώς τους άξονες x, z και αντιστρέφει το πρόσημο του y , ακριβώς όπως δείξαμε παραπάνω για τους αντίστοιχους πίνακες Pauli.

Παράδειγμα 3.40: Ο πίνακας $\mathbf{H}\mathbf{T}\mathbf{H}$ ως περιστροφή γύρω από τον άξονα x

Ας θεωρήσουμε τώρα τον πίνακα

$$\mathbf{H}\mathbf{T}\mathbf{H}$$

όπου

$$\mathbf{T} = e^{j\pi/8} \mathbf{R}_z(\pi/4)$$

Θέλουμε να γράψουμε τον $\mathbf{H}\mathbf{T}\mathbf{H}$ ως περιστροφή στον άξονα των x .

Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι:

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \cos(\theta/2) \mathbf{I}_2 - j \sin(\theta/2) \mathbf{Z}$$

οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\mathbf{T}\mathbf{H} &= e^{j\pi/8} \mathbf{H} \left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \mathbf{I}_2 - j \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \mathbf{Z} \right] \mathbf{H} \\ &= e^{j\pi/8} \left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \mathbf{H}\mathbf{H} - j \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \mathbf{H}\mathbf{Z}\mathbf{H} \right]. \end{aligned}$$

Αφού $\mathbf{H}^2 = \mathbf{I}_2$ (άμεσα από τον πίνακα $\mathbf{H}$) και από το παράδειγμα 3.39 έχουμε δείξει ότι

$$\mathbf{H}\mathbf{Z}\mathbf{H} = \mathbf{X}$$

$$HTH = e^{j\pi/8} \left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) I_2 - j \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) X \right] = e^{j\pi/8} R_x\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

όπου στο τελευταίο βήμα εφαρμόσαμε ακριβώς τον ορισμό του $R_x(\theta)$.

$$R_x(\theta) = \cos(\theta/2)I_2 - j \sin(\theta/2)Z$$

για $\theta = \pi/4$. Παρατηρήστε ότι ο HTH δεν ισούται ακριβώς με τον $R_x(\pi/4)$, αλλά μόνο μέχρι την ίδια καθολική φάση $e^{j\pi/8}$ που εμφανίζεται ήδη στον ορισμό της T , κάτι αναμενόμενο, αφού η σύζευξη με τη μοναδιαία H διατηρεί κάθε καθολική φάση αμετάβλητη.

Ας προσθέσουμε και τις έξι αυτές βασικές πύλες στη βιβλιοθήκη μας, ως έξι νέες υποκλάσεις της `SingleQubitGate`, καθεμία με τον δικό της σταθερό πίνακα, χωρίς κανένα όρισμα, αφού (σε αντίθεση με τις `BlochRotationX,Y,Z`) οι πύλες αυτές δεν εξαρτώνται από καμία γωνία θ :

```
class GateX(SingleQubitGate):
    def __init__(self):
        U = np.array([
            [0, 1],
            [1, 0],
        ])
        super().__init__(U)

class GateY(SingleQubitGate):
    def __init__(self):
        U = np.array([
            [0, -1j],
            [1j, 0],
        ])
        super().__init__(U)

class GateZ(SingleQubitGate):
    def __init__(self):
        U = np.array([
            [1, 0],
            [0, -1],
        ])
        super().__init__(U)

class GateT(SingleQubitGate):
    def __init__(self):
        U = np.array([
            [1, 0],
            [0, np.exp(1j * np.pi / 4)],
        ])
        super().__init__(U)

class GateH(SingleQubitGate):
    def __init__(self):
        U = np.array([
            [1, 1],
            [1, -1],
        ]) / np.sqrt(2)
        super().__init__(U)
```

```
class GateS(SingleQubitGate):
    def __init__(self):
        U = np.array([
            [1, 0],
            [0, 1j],
        ])
        super().__init__(U)
```

Ένα script που επιβεβαιώνει αριθμητικά τα παραδείγματα 3.39 και 3.40, βρίσκεται στο αρχείο `python/ex_HXH_HTH.py`:

```
import numpy as np

from qulib import GateH, GateT, GateX, GateY, GateZ, BlochRotationX

np.set_printoptions(precision=4, suppress=True)

H, X, Y, Z, T = GateH(), GateX(), GateY(), GateZ(), GateT()

# Example 3.28: the Hadamard gate swaps the Pauli matrices X, Z
print(f"H X H =\n{(H @ X @ H).U}")
print(f"Z =\n{Z.U}")
print(f"H Y H =\n{(H @ Y @ H).U}")
print(f"-Y =\n{-Y.U}")
print(f"H Z H =\n{(H @ Z @ H).U}")
print(f"X =\n{X.U}")

# Example 3.29: the matrix H T H as a rotation around the x axis
HTH = H @ T @ H
Rx_quarter = BlochRotationX(np.pi / 4)
print(f"H T H =\n{HTH.U}")
print(f"e^(j pi/8) R_x(pi/4) =\n{np.exp(1j * np.pi / 8) * Rx_quarter.U}")
print(f"matches: {np.allclose(HTH.U, np.exp(1j * np.pi / 8) * Rx_quarter.U)}")
```

3.14 Δύο εναλλακτικά διανύσματα n και m για να εκφράσουν όλες τις πύλες

Στην ενότητα 3.10 δείξαμε ότι με την βοήθεια δύο οποιοδήποτε κάθετων μοναδιαίων διανυσμάτων n, m κάθε μοναδιαίος πίνακας U γράφεται στη μορφή

$$U = e^{j\alpha} R_n(\beta) R_m(\gamma) R_n(\delta),$$

για κατάλληλες πραγματικές γωνίες $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε μία περίπτωση διανυσμάτων n, m των οποίων οι περιστροφές θα μας βοηθήσουν να υλοποιήσουμε όλες τις υπόλοιπες πύλες 1 qubit.

Θυμηθείτε το παράδειγμα 3.33: ο μοναδιαίος πίνακας

$$V = R_z(-\pi/4) R_x(\pi/4)$$

ισούται με $R_n(\theta)$, όπου

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2(\pi/8)}} \left(\cos \frac{\pi}{8}, -\sin \frac{\pi}{8}, -\cos \frac{\pi}{8} \right)$$

Ας δούμε τώρα μερικές ιδιότητες του V που μας βοηθούν να υλοποιήσουμε την αντίστοιχη πύλη με πύλες X, T και H . Συγκεκριμένα στο παρακάτω παράδειγμα δείχνουμε ότι

$$V = e^{-j\pi/4} (XTX)(HTH).$$

Δεδομένου ότι όπως θα δούμε στη συνέχεια, τελικά κάθε πύλη μπορεί να εκφραστεί χρησιμοποιώντας μία πύλη που υλοποιεί τον V το αποτέλεσμα αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό.

Παράδειγμα 3.41: Ο πίνακας V γράφεται ως γινόμενο με όρους από τους πίνακες X, T και H .

Στην ενότητα 3.13 είδαμε ότι:

$$T = e^{j\pi/8} R_z(\pi/4)$$

Παράλληλα, στην ενότητα 3.12 δείξαμε ότι:

$$X R_z(\theta) X = R_z(-\theta)$$

Θα έχουμε επομένως

$$R_z(-\pi/4) = e^{-j\pi/8} X T X$$

Από το παράδειγμα 3.40, γνωρίζουμε ότι:

$$R_x(\pi/4) = e^{-j\pi/8} H T H$$

Άρα ο V γράφεται, προσθέτοντας και μία καθολική φάση, χρησιμοποιώντας μόνο τις ήδη γνωστές πύλες X, T και H ,

$$V = R_z(-\pi/4) R_x(\pi/4) = e^{-j\pi/4} (X T X)(H T H).$$

Ένα script που επιβεβαιώνει αριθμητικά αυτή τη σχέση, βρίσκεται στο αρχείο `python/ex_V_circuit.py`:

```
import numpy as np

from qulib import GateH, GateT, GateX, BlochRotationX, BlochRotationZ

np.set_printoptions(precision=4, suppress=True)

X, T, H = GateX(), GateT(), GateH()

# Section 3.13: V = R_z(-pi/4) R_x(pi/4), built as a circuit using only X, T, H
V_abstract = BlochRotationZ(-np.pi / 4) @ BlochRotationX(np.pi / 4)
V_circuit = np.exp(-1j * np.pi / 4) * (X @ T @ X).U @ (H @ T @ H).U

print(f"V = R_z(-pi/4) R_x(pi/4) =\n{V_abstract.U}")
print(f"V = e^(-j pi/4) (X T X)(H T H) =\n{V_circuit}")
print(f"matches: {np.allclose(V_abstract.U, V_circuit)}")
```

Δηλαδή η περιστροφή $R_n(\theta)$, γύρω από τον συγκεκριμένο άξονα n που δεν έχει καμία ιδιαίτερη σχέση με τους x, y, z , είναι απόλυτα υλοποιήσιμη στην πράξη με ένα πολύ μικρό κύκλωμα που αποτελείται από πύλες X, T και H . Θα εξετάσουμε τώρα μία άλλη πύλη που υλοποιεί έναν πίνακα W ο οποίος σχετίζεται με τον V ,

$$W = H^{-1/2} V H^{1/2}$$

Με $H^{1/2}$ εννοούμε την ρίζα του πίνακα H . Η ρίζα R ενός πίνακα A είναι ο πίνακας για τον οποίο έχουμε $A = R^2$ οπότε συμβολίζουμε

$$R = A^{1/2}$$

Με $R^{-1/2}$ συμβολίζουμε τον αντίστροφο του R , δηλαδή:

$$R^{-1} = A^{-1/2}$$

Στο παρακάτω παράδειγμα δείχνουμε ότι ειδικά για τον πίνακα H έχουμε:

$$H^{-1/2} = \frac{1-j}{2} H + \frac{1+j}{2} I_2,$$

$$\mathbf{H}^{1/2} = \frac{1+j}{2}\mathbf{H} + \frac{1-j}{2}\mathbf{I}_2.$$

Παράδειγμα 3.42: Οι πίνακες $\mathbf{H}^{\pm 1/2}$

Αφού $\mathbf{H}^2 = \mathbf{I}_2$ και ο $\mathbf{H}$ μετατίθεται προφανώς με τον εαυτό του και με τον $\mathbf{I}_2$, μπορούμε να επαληθεύσουμε απευθείας ότι πρόκειται πράγματι για τετραγωνικές ρίζες της $\mathbf{H}$,

$$(\mathbf{H}^{-1/2})^2 = \left(\frac{1-j}{2}\right)^2 \mathbf{I}_2 + 2 \cdot \frac{1-j}{2} \cdot \frac{1+j}{2} \mathbf{H} + \left(\frac{1+j}{2}\right)^2 \mathbf{I}_2 = -\frac{j}{2}\mathbf{I}_2 + \mathbf{H} + \frac{j}{2}\mathbf{I}_2 = \mathbf{H},$$

και ομοίως $(\mathbf{H}^{1/2})^2 = \mathbf{H}$, ενώ

$$\mathbf{H}^{1/2}\mathbf{H}^{-1/2} = \frac{(1+j)(1-j)}{4}\mathbf{H}^2 + \left[\frac{(1+j)^2}{4} + \frac{(1-j)^2}{4}\right]\mathbf{H} + \frac{(1-j)(1+j)}{4}\mathbf{I}_2,$$

$$\mathbf{H}^{1/2}\mathbf{H}^{-1/2} = \frac{1}{2}\mathbf{I}_2 + 0 \cdot \mathbf{H} + \frac{1}{2}\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_2,$$

επιβεβαιώνει ότι πράγματι $\mathbf{H}^{1/2} = (\mathbf{H}^{-1/2})^{-1}$. Αντικαθιστώντας τον πίνακα $\mathbf{H}$,

$$\mathbf{H}^{-1/2} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (2 + \sqrt{2}) + j(2 - \sqrt{2}) & \sqrt{2}(1 - j) \\ \sqrt{2}(1 - j) & (2 - \sqrt{2}) + j(2 + \sqrt{2}) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}^{1/2} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (2 + \sqrt{2}) - j(2 - \sqrt{2}) & \sqrt{2}(1 + j) \\ \sqrt{2}(1 + j) & (2 - \sqrt{2}) - j(2 + \sqrt{2}) \end{bmatrix}.$$

Ένα script που επιβεβαιώνει αριθμητικά ότι οι $\mathbf{H}^{\pm 1/2}$ είναι τετραγωνικές ρίζες του $\mathbf{H}$, επαληθεύοντας το αποτέλεσμα και μέσω της `scipy.linalg.sqrtm`, βρίσκεται στο αρχείο `python/ex_hhalf_sqrt.py`:

```
import numpy as np
from scipy.linalg import sqrtm

from qulib import GateH

np.set_printoptions(precision=4, suppress=True)

I2 = np.eye(2)
H = GateH().U

# Section 3.13: H^{-1/2}, H^{1/2} as explicit linear combinations of H, I2
H_minus_half = (1 - 1j) / 2 * H + (1 + 1j) / 2 * I2
H_plus_half = (1 + 1j) / 2 * H + (1 - 1j) / 2 * I2

print(f"(H^{-1/2})^2 =\n{H_minus_half @ H_minus_half}")
print(f"(H^{1/2})^2 =\n{H_plus_half @ H_plus_half}")
print(f"H =\n{H}")
print(f"H^{-1/2} squares to H: {np.allclose(H_minus_half @ H_minus_half, H)}")
print(f"H^{1/2} squares to H: {np.allclose(H_plus_half @ H_plus_half, H)}")
print(f"H^{1/2} H^{-1/2} = I2: {np.allclose(H_plus_half @ H_minus_half, I2)}")

# Cross-check against scipy's principal matrix square root
S = sqrtm(H)
print(f"scipy.linalg.sqrtm(H) =\n{S}")
print(f"matches our H^{-1/2}: {np.allclose(S, H_minus_half)}")
```

Πολλαπλασιάζοντας (η πράξη είναι μηχανική αλλά μακροσκελής, οπότε παραλείπουμε τα ενδιάμεσα βήματα) τον πίνακα $\mathbf{U} = \mathbf{R}_n(\theta)$ του παραδείγματος 3.33 από αριστερά με $\mathbf{H}^{-1/2}$ και από δεξιά με $\mathbf{H}^{1/2}$,

καταλήγουμε στον πίνακα $\mathbf{W} = \mathbf{H}^{-1/2} \mathbf{U} \mathbf{H}^{1/2}$ με στοιχεία (όπου πάλι $c_0 = \cos(\pi/8)$, $s_0 = \sin(\pi/8)$)

$$m_{11} = c_0^2 + j \frac{s_0^2}{\sqrt{2}}, \quad m_{12} = -\sqrt{2} c_0 s_0 - j \frac{s_0^2}{\sqrt{2}}.$$

Τα υπόλοιπα δύο στοιχεία του $\mathbf{W}$ δίνονται, όπως πρέπει, από τα $-m_{12}^*$ και m_{11}^* ,

$$-m_{12}^* = \sqrt{2} c_0 s_0 - j \frac{s_0^2}{\sqrt{2}}, \quad m_{11}^* = c_0^2 - j \frac{s_0^2}{\sqrt{2}},$$

δηλαδή

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} c_0^2 + j \frac{s_0^2}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} c_0 s_0 - j \frac{s_0^2}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} c_0 s_0 - j \frac{s_0^2}{\sqrt{2}} & c_0^2 - j \frac{s_0^2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

To script `python/ex_W_matrix.py` επιβεβαιώνει αριθμητικά τον πίνακα $\mathbf{W}$:

```
import numpy as np

from qulib import GateH, BlochRotationX, BlochRotationZ

np.set_printoptions(precision=4, suppress=True)

I2 = np.eye(2)
H = GateH().U
H_minus_half = (1 - 1j) / 2 * H + (1 + 1j) / 2 * I2
H_plus_half = (1 + 1j) / 2 * H + (1 - 1j) / 2 * I2

# Section 3.13: U = R_z(-pi/4) R_x(pi/4) (example 3.25), W = H^{-1/2} U H^{1/2}
U = (BlochRotationZ(-np.pi / 4) @ BlochRotationX(np.pi / 4)).U
W = H_minus_half @ U @ H_plus_half

c0, s0 = np.cos(np.pi / 8), np.sin(np.pi / 8)
m11 = c0 ** 2 + 1j * s0 ** 2 / np.sqrt(2)
m12 = -np.sqrt(2) * c0 * s0 - 1j * s0 ** 2 / np.sqrt(2)
W_formula = np.array([
    [m11, m12],
    [-m12.conjugate(), m11.conjugate()],
])

print(f"W = H^{-1/2} U H^{1/2} =\n{W}")
print(f"W from m11, m12 formula =\n{W_formula}")
print(f"matches: {np.allclose(W, W_formula)}")
```

Θα προσπαθήσουμε τώρα να γράψουμε τον $\mathbf{W}$ ως περιστροφή. Γνωρίζουμε ότι ως μοναδιαίος πίνακας θα πρέπει να υπάρχει ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{m}$, μία γωνία θ_W και μία καθολική φάση α_W τέτοια ώστε:

$$\mathbf{W} = e^{j\alpha_W} \mathbf{R}_{\mathbf{m}}(\theta_W)$$

Όπως όμως έχουμε δείξει στην ενότητα 3.9, η ορίζουσα $\det(\mathbf{W})$ θα πρέπει να ισούται με $e^{j2\alpha_W}$. Θα δείξουμε παρακάτω ότι $\det(\mathbf{W}) = 1$ οπότε μπορούμε να επιλέξουμε $\alpha_W = 0$.

Πράγματι αφού $\mathbf{H}^{-1/2} \mathbf{H}^{1/2} = \mathbf{I}_2$, έχουμε $\det(\mathbf{H}^{-1/2}) \det(\mathbf{H}^{1/2}) = \det(\mathbf{I}_2) = 1$, οπότε δεδομένου ότι $\det(\mathbf{U}) = 1$ όπως δείξαμε στο παράδειγμα 3.33) θα έχουμε:

$$\det(\mathbf{W}) = \det(\mathbf{H}^{-1/2}) \det(\mathbf{U}) \det(\mathbf{H}^{1/2}) = 1,$$

δηλαδή $\mathbf{W} = \mathbf{R}_{\mathbf{m}}(\theta_W)$ απευθείας, χωρίς να χρειάζεται να αφαιρέσουμε καθολική φάση, με στοιχεία m_{11}, m_{12} όπως παραπάνω. Εφαρμόζοντας ακριβώς την ίδια διαδικασία με το παράδειγμα 3.33,

$$\cos\left(\frac{\theta_W}{2}\right) = \operatorname{Re}(m_{11}) = c_0^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right),$$

δηλαδή η ίδια γωνία με τον V ($\theta_W = \theta$), και

$$\sin\left(\frac{\theta_W}{2}\right) = \sqrt{\text{Im}(m_{11})^2 + \text{Re}(m_{12})^2 + \text{Im}(m_{12})^2} = \sqrt{\frac{s_0^4}{2} + 2c_0^2 s_0^2 + \frac{s_0^4}{2}} = s_0 \sqrt{1 + c_0^2},$$

ακριβώς όπως πριν. Ο νέος άξονας είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \left(-\frac{\text{Im}(m_{12})}{\sin(\theta_W/2)}, -\frac{\text{Re}(m_{12})}{\sin(\theta_W/2)}, -\frac{\text{Im}(m_{11})}{\sin(\theta_W/2)} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2(\pi/8)}} \left(\frac{\sin(\pi/8)}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \cos(\pi/8), -\frac{\sin(\pi/8)}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Αποτέλεσμα 3.12: Οι πύλες V, W περιστρέφουν γύρω από κάθετους άξονες

Ο πίνακας $W = H^{-1/2} V H^{1/2}$ ισούται με $R_m(\theta)$, δηλαδή με ίδια γωνία θ με τον $V = R_n(\theta)$, αλλά γύρω από τον άξονα

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2(\pi/8)}} \left(\frac{\sin(\pi/8)}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \cos(\pi/8), -\frac{\sin(\pi/8)}{\sqrt{2}} \right).$$

Απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι το $\mathbf{m}$ είναι κάθετο στο $\mathbf{n}$,

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{1 + \cos^2(\pi/8)} \left(\frac{\sin(\pi/8) \cos(\pi/8)}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \cos(\pi/8) \sin(\pi/8) + \frac{\sin(\pi/8) \cos(\pi/8)}{\sqrt{2}} \right) = 0.$$

Έχουμε λοιπόν κατασκευάσει, χρησιμοποιώντας μόνο τις πύλες X, H, T , δύο πύλες $V = R_n(\theta)$ και $W = R_m(\theta)$ που περιστρέφουν γύρω από δύο κάθετους άξονες.

Το script `python/ex_VW_perpendicular.py` επιβεβαιώνει αριθμητικά το Αποτέλεσμα 3.12, υπολογίζοντας τους άξονες $\mathbf{n}, \mathbf{m}$ και τη γωνία θ των V, W απευθείας από τους πίνακές τους:

```
import numpy as np

from qulib import GateH, SingleQubitGate, BlochRotationX, BlochRotationZ

np.set_printoptions(precision=4, suppress=True)

I2 = np.eye(2)
H = GateH().U
H_minus_half = (1 - 1j) / 2 * H + (1 + 1j) / 2 * I2
H_plus_half = (1 + 1j) / 2 * H + (1 - 1j) / 2 * I2

# Result 3.12: V = R_n(theta), W = H^{-1/2} V H^{1/2} = R_m(theta), with m perpendicular to n
V = (BlochRotationZ(-np.pi / 4) @ BlochRotationX(np.pi / 4)).U
W = H_minus_half @ V @ H_plus_half

n, theta_V, _ = SingleQubitGate(V).as_rotation()
m, theta_W, _ = SingleQubitGate(W).as_rotation()

print(f"V: n = {n}, theta = {theta_V:.4f}")
print(f"W: m = {m}, theta = {theta_W:.4f}")
print(f"same angle theta: {np.isclose(theta_V, theta_W)}")
print(f"m . n = {np.dot(m, n):.2e}")
print(f"m perpendicular to n: {np.isclose(np.dot(m, n), 0, atol=1e-9)}")

c0, s0 = np.cos(np.pi / 8), np.sin(np.pi / 8)
m_expected = np.array([s0 / np.sqrt(2), np.sqrt(2) * c0, -s0 / np.sqrt(2)]) / np.sqrt(1 + c0
** 2)
print(f"m matches book formula: {np.allclose(m, m_expected)}")
```

Μέχρι τώρα έχουμε δείξει ότι:

1. Ο πίνακας V που προκύπτει από την σχέση $V = R_z(-\pi/4)R_x(\pi/4)$ γράφεται ως εξής

$$V = R_z(-\pi/4)R_x(\pi/4) = e^{-j\pi/4} (XTX)(HTH)$$

2. Ο παραπάνω πίνακας V γράφεται ως περιστροφή $R_n(\theta)$, όπου

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

και

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2(\pi/8)}} \left(\cos \frac{\pi}{8}, -\sin \frac{\pi}{8}, -\cos \frac{\pi}{8} \right)$$

3. ο πίνακας W που προκύπτει από την σχέση

$$W = H^{-1/2} V H^{1/2}$$

ισούται με $R_m(\theta)$, δηλαδή με ίδια γωνία θ με τον $V = R_n(\theta)$, αλλά γύρω από τον άξονα

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2(\pi/8)}} \left(\frac{\sin(\pi/8)}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \cos(\pi/8), -\frac{\sin(\pi/8)}{\sqrt{2}} \right).$$

4. Τα δύο διανύσματα $\mathbf{m}$ και $\mathbf{n}$ είναι κάθετα, $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$.

Στις επόμενες ενότητες θα συζητήσουμε δύο πολύ σημαντικά αποτελέσματα:

Πρώτον, η γωνία θ έτσι πως ορίζεται στις περιστροφές $R_n(\theta)$ και $R_m(\theta)$ είναι συγκεκριμένη. Ωστόσο όπως θα δούμε μπορούμε οποιαδήποτε στροφή γύρω από τον άξονα $\mathbf{n}$ ή τον $\mathbf{m}$ γύρω από μία αυθαίρετη γωνία ϕ να την προσεγγίσουμε με πολύ μεγάλη ακρίβεια με ένα αριθμό διαδοχικών στροφών του αντίστοιχου άξονα κατά την γωνία θ . Έτσι για παράδειγμα μία στροφή $R_n(\phi)$ μπορεί να γραφτεί

$$R_n(\phi) \approx \underbrace{R_n(\theta) \cdot \dots \cdot R_n(\theta)}_{k \text{ φορές}} = (R_n(\theta))^k = R_n(k\theta)$$

όπου k είναι ένας κατάλληλος ακέραιος που κάθε φορά εξαρτάται από την ϕ .

Δεύτερον, οι πύλες $H^{1/2}$ και $H^{-1/2}$ τελικά υλοποιούνται μόνο με πύλες H και T .

3.15 Πως υλοποιούμε τις στροφές $R_n(\phi)$ και $R_m(\phi)$

Συνεχίζουμε να δείξουμε το πρώτο σημείο που αναφέραμε στο τέλος της ενότητας 3.14: οποιαδήποτε στροφή γύρω από τον άξονα $\mathbf{n}$ ή τον $\mathbf{m}$ γύρω από μία αυθαίρετη γωνία ϕ να την προσεγγίσουμε με πολύ μεγάλη ακρίβεια με ένα αριθμό διαδοχικών στροφών του αντίστοιχου άξονα κατά την γωνία θ . Θα χρειαστούμε ένα αριθμοθεωρητικό γεγονός, το οποίο θα επικαλεστούμε χωρίς απόδειξη: η γωνία θ είναι άρρητο πολλαπλάσιο του 2π , δηλαδή δεν υπάρχουν ακέραιοι μ, ν τέτοιοι ώστε $\theta = 2\pi\mu/\nu$.

Ας δούμε γιατί αυτό είναι τόσο χρήσιμο. Για κάθε φυσικό αριθμό k , ας συμβολίσουμε με $\theta_k \in [0, 2\pi)$ τη γωνία που προκύπτει από το $k\theta$ αφαιρώντας το κατάλληλο ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π . Θα έχουμε επομένως:

$$k\theta = 2m_k\pi + \theta_k$$

όπου το m_k είναι ακέραιος που επιλέγεται κατάλληλα ώστε $0 \leq \theta_k < 2\pi$. Είναι χρήσιμο στο σημείο αυτό να εισάγουμε και τον συμβολισμό μέσω του υπολοίπου (mod). Με $\gamma = \alpha \pmod{\beta}$ εννοούμε το υπόλοιπο $0 \leq \gamma < \beta$ της ακέραιας διαίρεσης του α δια β . Δηλαδή πάντα μπορούμε να βρούμε έναν ακέραιο λ ώστε να γράψουμε:

$$\alpha = \lambda\beta + \gamma$$

οπότε τότε γράφουμε ότι το γ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του α δια του β

$$\gamma = \alpha \pmod{\beta}$$

Μπορούμε να γράψουμε το θ_k επομένως ως:

$$\theta_k = k\theta \pmod{2\pi}$$

Συνεχίζουμε τώρα να υπολογίσουμε τα παρακάτω:

$$\begin{aligned}\cos(k\theta/2) &= \cos(m_k\pi + \theta_k/2) = \begin{cases} \cos(\theta_k/2) & , m_k \text{ άρτιος} \\ -\cos(\theta_k/2) & , m_k \text{ περιττός} \end{cases} \\ \sin(k\theta/2) &= \sin(m_k\pi + \theta_k/2) = \begin{cases} \sin(\theta_k/2) & , m_k \text{ άρτιος} \\ -\sin(\theta_k/2) & , m_k \text{ περιττός} \end{cases}\end{aligned}$$

Οι παραπάνω σχέσεις γράφονται:

$$\begin{aligned}\cos(k\theta/2) &= (-1)^{m_k} \cos(\theta_k/2) \\ \sin(k\theta/2) &= (-1)^{m_k} \sin(\theta_k/2)\end{aligned}$$

Δεδομένου τώρα ότι

$$\mathbf{R}_n(\phi) = \cos \frac{\phi}{2} \mathbf{I}_2 - j \sin \frac{\phi}{2} \mathbf{A}$$

όπου $\mathbf{A} = n_x \mathbf{X} + n_y \mathbf{Y} + n_z \mathbf{Z}$ θα έχουμε:

$$(\mathbf{R}_n(\theta))^k = \mathbf{R}_n(k\theta) = \cos \frac{k\theta}{2} \mathbf{I}_2 - j \sin \frac{k\theta}{2} \mathbf{A} = (-1)^{m_k} \mathbf{R}_n(\theta_k)$$

Η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι διαδοχικές περιστροφές γύρω από τον άξονα $\mathbf{n}$ είναι τελικά ισοδύναμες (αν εξαιρέσει κανείς το πρόσημο αλλά αυτό αντιστοιχεί σε μία καθολική φάση) με μία περιστροφή γύρω από τον ίδιο άξονα με μία γωνία που είναι στο $[0, 2\pi]$, $0 \leq \theta_k < 2\pi$.

Μπορούμε να δείξουμε ότι εάν το θ είναι άρρητο πολλαπλάσιο του 2π , δηλαδή δεν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί μ και ν τέτοιοι ώστε:

$$\theta = 2\pi \frac{\mu}{\nu}$$

τότε για κάθε k θα έχουμε ένα διαφορετικό θ_k . Πράγματι έστω ότι για δύο διαφορετικές τιμές του k έστω p και q είχαμε ίδιες τιμές του θ_k , δηλαδή

$$\theta_p = \theta_q$$

Αυτό σημαίνει ότι:

$$p\theta - 2m_p\pi = q\theta - 2m_q\pi$$

η παραπάνω σχέση όμως σημαίνει ότι:

$$(p - q)\theta = 2\pi(m_p - m_q)$$

Εφόσον όμως το $p - q$ είναι ακέραιος και το $m_p - m_q$ είναι και αυτό ακέραιος, έπεται ότι το θ είναι ρητό πολλαπλάσιο του 2π κάτι που δεν ισχύει! Επομένως για κάθε διαφορετικό k θα έχουμε και ένα διαφορετικό θ_k μέσα στο διάστημα $[0, 2\pi)$. Ως εκ τούτου εάν το θ είναι άρρητο πολλαπλάσιο του 2π , για κάθε διαφορετικό k η στροφή:

$$(\mathbf{R}_n(\theta))^k = \mathbf{R}_n(k\theta) = \pm \mathbf{R}_n(\theta_k)$$

υλοποιεί μία στροφή $\mathbf{R}_n(\theta_k)$ με διαφορετική γωνία θ_k μέσα στο $[0, 2\pi)$.

Αριθμητικά, αν υπολογίσουμε τις γωνίες θ_k για πολύ μεγάλο πλήθος τιμών του k και φτιάχνουμε το ιστόγραμμα τους, βλέπουμε ότι κατανέμονται (σχεδόν) ομοιόμορφα σε όλο το $[0, 2\pi)$ (σχήμα 3.18), ακριβώς όπως προβλέπει το παραπάνω σκεπτικό. Δείξαμε επομένως διαισθητικά ένα σημαντικό αποτέλεσμα: με κατάλληλη επιλογή του k μπορούμε να υλοποιήσουμε μία στροφή $\mathbf{R}_m(\phi)$ για οποιαδήποτε γωνία ϕ μέσα στο $[0, 2\pi)$. Με μία γωνία δηλαδή φτιάχνουμε όλες τις άλλες! Αυτό διατυπώνει με λίγο πιο “επίσημο” τρόπο το παρακάτω πλαίσιο:

Αποτέλεσμα 3.13: Προσέγγιση κάθε περιστροφής με δυνάμεις μίας πύλης

Αν το θ είναι άρρητο πολλαπλάσιο του 2π , τότε για κάθε γωνία-στόχο $\varphi \in [0, 2\pi)$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός k τέτοιος ώστε

$$(\mathbf{R}_n(\theta))^k = \pm \mathbf{R}_n(\theta_k), \quad |\theta_k - \varphi| < \varepsilon.$$

Δηλαδή, επαναλαμβάνοντας κατάλληλο πλήθος φορών μία μοναδική πύλη $\mathbf{R}_n(\theta)$ (γύρω από έναν σταθερό άξονα n), μπορούμε να προσεγγίσουμε, μέχρι μία αδιάφορη καθολική φάση, οποιαδήποτε περιστροφή $\mathbf{R}_n(\varphi)$ γύρω από τον ίδιο άξονα, με όσο μικρό σφάλμα θέλουμε.

Το σχήμα 3.18 παράγεται από το script `python/ex_irrational_rotation_hist.py`, που χρησιμοποιεί μόνο τις `numpy` και `matplotlib` (δεν χρειάζεται καθόλου η `qulib2.py` εδώ, αφού δεν μας ενδιαφέρει κανένας συγκεκριμένος πίνακας πύλης, μόνο οι ίδιες οι γωνίες θ_k). Επιλέγουμε μία συγκεκριμένη γωνία $\theta = 2\pi\sqrt{2} \bmod 2\pi \approx 2.603$ (μέσα δηλαδή στο $[0, 2\pi)$, όπως και τα θ_k που θα υπολογίσουμε): παραμένει άρρητο πολλαπλάσιο του 2π , αφού το $\sqrt{2}$ είναι άρρητο. Υπολογίζουμε το διάνυσμα $\theta_k = k\theta \bmod 2\pi$ για $k = 1, \dots, K$ με $K = 200\,000$ (με τη βοηθητική συνάρτηση `numpy.mod`, εφαρμοσμένη ταυτόχρονα σε όλο το διάνυσμα $k\theta$), και σχεδιάζουμε το ιστόγραμμα των τιμών αυτών, χωρίζοντας το $[0, 2\pi)$ σε 60 ίσα διαστήματα:

```
import os

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Use real LaTeX rendering for the math in the figure, so it matches the
# fonts/symbols of part2.tex itself instead of matplotlib's own mathtext.
plt.rcParams["text.usestex"] = True
plt.rcParams["font.family"] = "serif"

# Repeated rotations by an irrational multiple of 2*pi: R_n(theta)^k =
# +-R_n(theta_k), with theta_k = (k*theta) mod 2*pi (see the proof in
# part2.tex, right before result "density-approximation"). This script
# computes theta_k for a large number of values of k and histograms them, to
# check numerically that they spread out (almost) uniformly over [0, 2*pi).

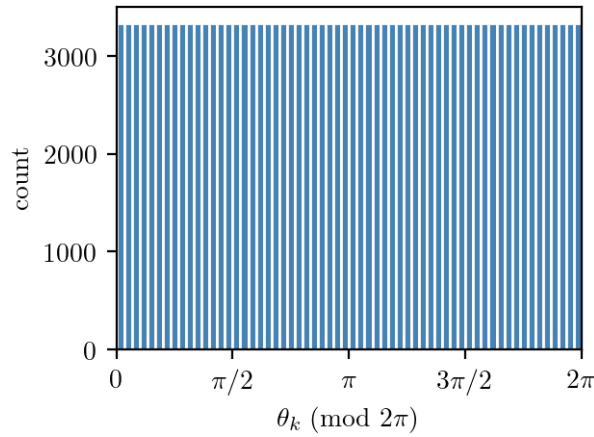
# theta itself is reduced to [0, 2*pi) (2*pi*sqrt(2) mod 2*pi), but it is
# still an irrational multiple of 2*pi, since sqrt(2) is irrational.
theta = (2 * np.pi * np.sqrt(2)) % (2 * np.pi)
K = 200_000

k = np.arange(1, K + 1)
theta_k = np.mod(k * theta, 2 * np.pi)

fig, ax = plt.subplots(figsize=(3.345, 2.51))
ax.hist(theta_k, bins=60, range=(0, 2 * np.pi), color="steelblue", edgecolor="white")
ax.set_xlim(0, 2 * np.pi)
ax.set_xticks([0, np.pi / 2, np.pi, 3 * np.pi / 2, 2 * np.pi])
ax.set_xticklabels(["0", r"$\pi/2$", r"$\pi$", r"$3\pi/2$", r"$2\pi$"])
ax.set_xlabel(r"$\theta_k \; ; \; (\mathrm{mod} \; 2\pi)$")
ax.set_ylabel("count")
fig.tight_layout()

out_path = os.path.join(os.path.dirname(__file__), "..", "figures", "part2", "irrationalphihist.png")
fig.savefig(out_path, dpi=200)
print(f"saved {out_path}")
```

. Το script αποθηκεύει απευθείας την εικόνα και αυτό είναι ακριβώς το σχήμα που βλέπουμε παρακάτω:



Σχήμα 3.18: Ιστόγραμμα των γωνιών $\theta_k \pmod{2\pi}$ για $K = 200\,000$ τιμές του k , με $\theta = 2\pi\sqrt{2} \pmod{2\pi} \approx 2.603$: η κατανομή τους είναι πρακτικά ομοιόμορφη στο $[0, 2\pi)$.

Προκύπτει επομένως ότι σαρώνοντας πολλές τιμές του k πέφτουμε σε όλα τα μικρά διαστήματα που έχουμε χωρίσει το διάστημα $[0, 2\pi]$ και επομένως μπορούμε να υλοποιήσουμε οποιαδήποτε γωνία που βρίσκεται μέσα στο $[0, 2\pi]$ με πολύ καλή προσέγγιση.

Εμβάθυνση 3.2: Απόδειξη: γιατί μία μόνο πύλη αρκεί για όλες τις γωνίες

Ας αποδείξουμε το αποτέλεσμα 3.13, χρησιμοποιώντας την αρχή του περιστερώνα (pigeonhole principle) η οποία λέει ότι αν τοποθετήσουμε περισσότερα από N αντικείμενα μέσα σε N κουτιά, κάποιο κουτί θα περιέχει αναγκαστικά τουλάχιστον δύο από αυτά.

Επιλέγουμε μία γωνία-στόχο $\varphi \in [0, 2\pi)$ και ένα $\varepsilon > 0$. Σημειώνουμε ότι μπορούμε να υποθέσουμε $\varepsilon < 2\pi$ καθώς δεδομένου ότι και οι δύο γωνίες θ_k και ϕ είναι στο διάστημα $[0, 2\pi)$, η απόλυτη διαφορά τους $|\theta_k - \phi|$ πάντα θα είναι μικρότερη από 2π .

Ας διαλέξουμε τώρα έναν φυσικό αριθμό N αρκετά μεγάλο ώστε $2\pi/N < \varepsilon$, και ας χωρίσουμε το $[0, 2\pi)$ σε N ίσα, διαδοχικά υποδιαστήματα μήκους $2\pi/N$. Θεωρούμε τις $N + 1$ γωνίες

$$0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$$

Παίρνουμε την πρώτη γωνία ίση με μηδέν ενώ οι υπόλοιπες υπολογίζονται από την σχέση

$$\theta_k = k\theta \pmod{2\pi}, \text{ για } 1 \leq k \leq N$$

Έχουμε όμως ήδη δείξει στα προηγούμενα ότι αυτές οι γωνίες πρέπει να είναι διακριτές μεταξύ τους όταν η θ είναι άρρητο πολλαπλάσιο του 2π . Άρα έχουμε $N + 1$ γωνίες και μόνο N υποδιαστήματα, οπότε, από την αρχή του περιστερώνα, τουλάχιστον δύο από αυτές, έστω θ_p, θ_q με $0 \leq p < q \leq N$, βρίσκονται στο ίδιο υποδιάστημα, άρα

$$|\theta_q - \theta_p| < \frac{2\pi}{N} < \varepsilon.$$

Θέτουμε τώρα:

$$\lambda = q - p \geq 1$$

$$\delta = \theta_q - \theta_p$$

οπότε θα πρέπει να ισχύει

$$|\delta| < \varepsilon$$

Επιπλέον θα πρέπει να έχουμε $\delta \neq 0$, αφού όπως δείξαμε παραπάνω ότι όλες οι γωνίες θ_k είναι διαφορετικές μεταξύ τους όταν το θ είναι άρρητο πολλαπλάσιο του 2π .

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει όταν υπολογίζουμε το $\lambda\theta$. Εφόσον

$$\theta_k = k\theta \pmod{2\pi}, \text{ για } 1 \leq k \leq N$$

θα πρέπει να ισχύει

$$k\theta = 2\pi m_k + \theta_k$$

για κάποιο ακέραιο m_k και αν εφαρμόσουμε την παραπάνω σχέση για $k = p, q$ θα έχουμε:

$$p\theta = 2\pi m_p + \theta_p$$

$$q\theta = 2\pi m_q + \theta_q$$

Επομένως αν υπολογίσουμε την διαφορά των δύο σχέσεων:

$$\delta = \theta_q - \theta_p = (q - p)\theta - 2\pi(m_q - m_p) = \lambda\theta - 2\pi(m_q - m_p)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι το $\lambda\theta$ πρέπει να διαφέρει από το δ κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π .

Αν υποθέσουμε ότι το δ είναι θετικός αριθμός, $\delta > 0$ τότε η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\delta + 2\pi(m_q - m_p) = \lambda\theta$$

και εφόσον το δ είναι η διαφορά των γωνιών θ_q και θ_p που είναι σε ένα διάστημα με μέγιστο μήκος $2\pi/N < \varepsilon$, έπεται ότι

$$0 < \delta < 2\pi$$

και επομένως το δ πρέπει να είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\lambda\theta$ με το 2π ,

$$\lambda\theta = \delta \pmod{2\pi}$$

Ας αναλογιστούμε τώρα τι συμβαίνει όταν πάμε να καλύψουμε το διάστημα $[0, 2\pi)$ με γωνίες $\ell\delta$ που είναι πολλαπλάσιες του δ . Κάποια στιγμή θα αρίσουμε να πλησιάζουμε το ϕ . Αν επιλέξουμε

$$\ell = \left\lfloor \frac{\phi}{\delta} \right\rfloor$$

όπου $\lfloor x \rfloor$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος από τον x ,

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

τότε θα

$$\frac{\phi}{\delta} - 1 < \ell \leq \frac{\phi}{\delta}$$

οπότε:

$$\phi - \delta < \ell\delta \leq \phi \text{ δηλαδή } \delta > \phi - \ell\delta \geq 0$$

Αυτό σημαίνει ότι το $\ell\delta$ έχει φτάσει σε απόσταση μικρότερη από το δ στο ϕ . Εφόσον όπως είδαμε $0 < \delta < \varepsilon$ τότε έπεται ότι έχει φτάσει και σε απόσταση μικρότερη από το ε . Θα δείξουμε τώρα ότι η γωνία $\ell\delta$ είναι το υπόλοιπο της γωνίας $\ell\lambda\theta$. Έχουμε:

$$\ell\delta = \ell\lambda\theta - 2\pi(m_q - m_p)$$

Εφόσον το $\ell\delta$ είναι μικρότερο από το ϕ που είναι μικρότερο από το 2π , προκύπτει ότι το $\ell\delta$ είναι το υπόλοιπο της γωνίας $\ell\lambda\theta$. Οπότε αν επιλέξουμε $k = \ell\lambda$ έχουμε υπολογίσει μία γωνία $\theta_k = \ell\delta$ που βρίσκεται βρίσκεται εγγύτερα της ϕ από ε .

Ας δούμε τώρα τι γίνεται στην άλλη περίπτωση, όταν το δ είναι αρνητικός αριθμός, $\delta < 0$. Ξεκινάμε ξανά από την ίδια σχέση

$$\delta + 2\pi(m_q - m_p) = \lambda\theta$$

Αφού όμως τώρα $-\varepsilon < \delta < 0$ (δηλαδή $0 < -\delta < \varepsilon < 2\pi$), γράφουμε $\delta = (2\pi + \delta) - 2\pi$ και αντικαθιστούμε:

$$\lambda\theta = (2\pi + \delta) + 2\pi(m_q - m_p - 1)$$

Το $2\pi + \delta$ βρίσκεται στο διάστημα $(2\pi - \varepsilon, 2\pi)$, άρα μέσα στο $(0, 2\pi)$, οπότε αυτό —και όχι το δ — είναι τώρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\lambda\theta$ με το 2π :

$$\lambda\theta = (2\pi + \delta) \pmod{2\pi}, \quad \text{δηλαδή} \quad \theta_\lambda = 2\pi + \delta.$$

Θέτουμε $\delta'' = -\delta$, οπότε $0 < \delta'' < \varepsilon$ και $\theta_\lambda = 2\pi - \delta''$.

Δουλεύουμε τώρα όπως πριν με τα πολλαπλάσια $\ell\lambda$. Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση $\delta = \lambda\theta - 2\pi(m_q - m_p)$ επί ℓ ,

$$\ell\delta = \ell\lambda\theta - 2\pi\ell(m_q - m_p)$$

Το $\ell\delta$ είναι όμως τώρα αρνητικό, οπότε δεν μπορεί να είναι το ίδιο το υπόλοιπο· γράφουμε αντ' αυτού

$$\ell\lambda\theta = (\ell\delta + 2\pi) + 2\pi(\ell(m_q - m_p) - 1)$$

Όσο $\ell\delta'' < 2\pi$, το $\ell\delta + 2\pi = 2\pi - \ell\delta''$ βρίσκεται στο $(0, 2\pi)$, άρα είναι αυτό το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\ell\lambda\theta$ με το 2π ,

$$\theta_{\ell\lambda} = 2\pi - \ell\delta''$$

Θέλουμε τώρα το $2\pi - \ell\delta''$ να πλησιάσει το ϕ , δηλαδή το $\ell\delta''$ να πλησιάσει το $2\pi - \phi$. Επιλέγοντας, με τον ίδιο τρόπο όπως πριν,

$$\ell = \left\lfloor \frac{2\pi - \phi}{\delta''} \right\rfloor$$

όπου $\lfloor x \rfloor$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος από το x , έχουμε

$$0 \leq (2\pi - \phi) - \ell\delta'' < \delta'' < \varepsilon.$$

Υπάρχει εδώ μία λεπτομέρεια που δεν εμφανιζόταν στην περίπτωση $\delta > 0$: αν το ϕ είναι πολύ κοντά στο 2π (συγκεκριμένα αν $2\pi - \phi < \delta''$), τότε το ℓ παραπάνω βγαίνει 0, και ο τύπος $\theta_{\ell\lambda} = 2\pi - \ell\delta''$ δεν έχει νόημα για $\ell = 0$ (θα έδινε 2π , εκτός του $[0, 2\pi)$, ενώ στην πραγματικότητα $\theta_0 = 0$). Σε αυτή την ειδική περίπτωση παίρνουμε απλώς $\ell = 1$ αντί για $\ell = 0$: τότε $\theta_\lambda = 2\pi - \delta''$, και αφού $2\pi - \phi < \delta''$,

$$0 < \phi - \theta_\lambda = \delta'' - (2\pi - \phi) < \delta'' < \varepsilon,$$

δηλαδή η γωνία θ_λ είναι ήδη αρκετά κοντά στο ϕ . Σε κάθε περίπτωση λοιπόν (είτε χρειάστηκε η διόρθωση $\ell = 1$ είτε όχι), θέτοντας $k = \ell\lambda$ καταλήγουμε σε μία γωνία $\theta_k = 2\pi - \ell\delta''$ με

$$|\theta_k - \phi| = |(2\pi - \phi) - \ell\delta''| < \delta'' < \varepsilon,$$

αφού η ποσότητα $(2\pi - \phi) - \ell\delta''$ βρίσκεται είτε στο $[0, \delta'')$ (συνήθης περίπτωση) είτε στο $(-\delta'', 0)$ (ειδική περίπτωση $\ell = 1$), σε κάθε περίπτωση με απόλυτη τιμή μικρότερη από $\delta'' < \varepsilon$.

Είτε λοιπόν $\delta > 0$ είτε $\delta < 0$, καταλήγουμε πάντα σε έναν φυσικό αριθμό k με $|\theta_k - \phi| < \varepsilon$, που είναι ακριβώς αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε.

3.16 Οι πύλες που υπολογίζουν τα $H^{1/2}$ και $H^{-1/2}$

Θα ασχοληθούμε τώρα με το δεύτερο σημείο στο τέλος της ενότητας 3.14, που αφορά την υλοποίηση των πυλών $H^{1/2}$ και $H^{-1/2}$ που καθορίζονται όπως είδαμε από τις σχέσεις:

$$H^{-1/2} = \frac{1-j}{2}H + \frac{1+j}{2}I_2,$$

$$H^{1/2} = \frac{1+j}{2}H + \frac{1-j}{2}I_2.$$

Όπως είδαμε στο παράδειγμα 3.32 έχουμε:

$$\mathbf{H} = e^{j\pi/2} \mathbf{R}_\gamma(\pi)$$

με

$$\gamma = (1, 0, 1)/\sqrt{2}$$

Στο παρακάτω παράδειγμα δείχνουμε αρχικά ότι οι πίνακες $\mathbf{H}^{1/2}$ και $\mathbf{H}^{-1/2}$ γράφονται και αυτοί ως περιστροφές γύρω από τον ίδιο άξονα γ :

$$\mathbf{H}^{1/2} = e^{-j\pi/4} \mathbf{R}_\gamma\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\mathbf{H}^{-1/2} = e^{j\pi/4} \mathbf{R}_\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Παράδειγμα 3.43: Οι πίνακες $\mathbf{H}^{\pm 1/2}$ ως περιστροφές γύρω από τον άξονα γ

Ξεκινάμε από το αποτέλεσμα του παραδείγματος 3.32 για να γράψουμε τον πίνακα ως εξής:

$$\mathbf{R}_\gamma(\pi) = e^{-j\pi/2} \mathbf{H}$$

Όπως γνωρίζουμε ο πίνακας περιστροφής δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{R}_n(\theta) = \cos(\theta/2) \mathbf{I}_2 - j \sin(\theta/2) \mathbf{A}$$

όπου

$$\mathbf{A} = \gamma_x \mathbf{X} + \gamma_y \mathbf{Y} + \gamma_z \mathbf{Z}$$

Οπότε μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\mathbf{R}_\gamma(\pi) = \cos(\pi/2) \mathbf{I}_2 - j \sin(\pi/2) \mathbf{A} = -j \mathbf{A}$$

$$\mathbf{R}_\gamma(-\pi) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{I}_2 - j \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{A} = j \mathbf{A}.$$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\mathbf{R}_\gamma(-\pi) = -\mathbf{R}_\gamma(\pi) = e^{j\pi/2} \mathbf{H}$$

Όμως, όπως είδαμε στην ενότητα 3.12, όταν πολλαπλασιάζουμε δύο πίνακες $\mathbf{R}_\gamma(\theta_1)$ και $\mathbf{R}_\gamma(\theta_2)$, το γινόμενο πρέπει να ισούται με $\mathbf{R}_\gamma(\theta_1 + \theta_2)$. Επομένως θα πρέπει:

$$\begin{aligned} \left(e^{-j\pi/4} \mathbf{R}_\gamma\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 &= e^{-j\pi/4} e^{-j\pi/4} \mathbf{R}_\gamma\left(-\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{R}_\gamma\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= e^{-j\pi/2} \mathbf{R}_\gamma(-\pi) = e^{-j\pi/2} \cdot e^{j\pi/2} \mathbf{H} = \mathbf{H}. \end{aligned}$$

δηλαδή ο πίνακας $e^{-j\pi/4} \mathbf{R}_\gamma(-\pi/2)$ είναι πράγματι μία τετραγωνική ρίζα της $\mathbf{H}$. Ας δούμε ότι πρόκειται συγκεκριμένα για την $\mathbf{H}^{1/2}$ (και όχι π.χ. για την $-\mathbf{H}^{1/2}$ ή την $\mathbf{H}^{-1/2}$, που είναι και αυτές τετραγωνικές ρίζες της $\mathbf{H}$), υπολογίζοντας ρητά τον πίνακά του. Χρησιμοποιώντας $\gamma = (1, 0, 1)/\sqrt{2}$, οπότε $\mathbf{A} = (\mathbf{X} + \mathbf{Z})/\sqrt{2}$, και $\cos(-\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\sin(-\pi/4) = -\sqrt{2}/2$,

$$\mathbf{R}_\gamma\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{I}_2 + \frac{j}{2} (\mathbf{X} + \mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{j}{2} & \frac{j}{2} \\ \frac{j}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{j}{2} \end{bmatrix}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $e^{-j\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - j)$,

$$e^{-j\pi/4} \mathbf{R}_\gamma\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (2 + \sqrt{2}) - j(2 - \sqrt{2}) & \sqrt{2}(1 + j) \\ \sqrt{2}(1 + j) & (2 - \sqrt{2}) - j(2 + \sqrt{2}) \end{bmatrix},$$

δηλαδή ακριβώς ο πίνακας $\mathbf{H}^{1/2}$ του παραδείγματος 3.42. Με το ίδιο σκεπτικό, $e^{j\pi/4} \mathbf{R}_\gamma(\pi/2)$ δίνει ακριβώς την $\mathbf{H}^{-1/2}$.

To script `python/ex_Hhalf_gamma_rotation.py` επιβεβαιώνει αριθμητικά το παραπάνω παράδειγμα:

```
import numpy as np

from qulib import GateH, BlochRotationN

np.set_printoptions(precision=4, suppress=True)

I2 = np.eye(2)
H = GateH().U
gamma = np.array([1, 0, 1]) / np.sqrt(2)

# Section 3.13:  $H^{\{1/2\}}$ ,  $H^{\{-1/2\}}$  as rotations  $R_{\text{gamma}}(-\pi/2)$ ,  $R_{\text{gamma}}(\pi/2)$ 
H_plus_half = np.exp(-1j * np.pi / 4) * BlochRotationN(gamma, -np.pi / 2).U
H_minus_half = np.exp(1j * np.pi / 4) * BlochRotationN(gamma, np.pi / 2).U

print(f"(e^(-j pi/4) R_gamma(-pi/2))^2 =\n{H_plus_half @ H_plus_half}")
print(f"H =\n{H}")
print(f"squares to H: {np.allclose(H_plus_half @ H_plus_half, H)}")

H_plus_half_formula = (1 + 1j) / 2 * H + (1 - 1j) / 2 * I2
H_minus_half_formula = (1 - 1j) / 2 * H + (1 + 1j) / 2 * I2

print(f"H1/2 matches e^(-j pi/4) R_gamma(-pi/2): {np.allclose(H_plus_half, H_plus_half_formula)}")
print(f"H-1/2 matches e^(j pi/4) R_gamma(pi/2): {np.allclose(H_minus_half, H_minus_half_formula)}")
```

Χρειαζόμαστε τώρα δύο βοηθητικές παρατηρήσεις. Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι

$$SR_x(\theta)S^T = R_y(\theta)$$

δηλαδή εφαρμόζοντας αριστερά τον πίνακα S και δεξιά τον ανάστροφό του σε έναν πίνακα περιστροφής γύρω από τον άξονα x λαμβάνουμε τον αντίστοιχο πίνακα περιστροφής γύρω από τον άξονα y . Το δείχνουμε στο παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 3.44: Πρώτη παρατήρηση: $SR_x(\theta)S^T = R_y(\theta)$

Ισχυριζόμαστε ότι

$$SR_x(\theta)S^T = R_y(\theta)$$

για κάθε θ , και το δείχνουμε κάνοντας απευθείας τις πράξεις με τους πίνακες. Γράφουμε πρώτα ρητά τον $R_x(\theta) = \cos(\theta/2)I_2 - j \sin(\theta/2)X$ (ενότητα 3.8), και τους S, S^T (ενότητα 3.13),

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -j \sin(\theta/2) \\ -j \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}$$

$$S^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας πρώτα $SR_x(\theta)$ (η S πολλαπλασιάζει μόνο τη δεύτερη γραμμή επί j),

$$SR_x(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -j \sin(\theta/2) \\ j \cdot (-j \sin(\theta/2)) & j \cos(\theta/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -j \sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & j \cos(\theta/2) \end{bmatrix}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα δεξιά με S^T (που πολλαπλασιάζει μόνο τη δεύτερη στήλη επί $-j$),

$$SR_x(\theta)S^T = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & (-j \sin(\theta/2)) \cdot (-j) \\ \sin(\theta/2) & (j \cos(\theta/2)) \cdot (-j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix},$$

αφού $(-j)(-j) = -1$ και $j \cdot (-j) = 1$. Συγκρίνοντας τώρα με

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \cos(\theta/2)\mathbf{I}_2 - j \sin(\theta/2)\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix},$$

βλέπουμε ότι οι δύο πίνακες ταυτίζονται ακριβώς, για κάθε γωνία θ .

To script `python/ex_S_Rx_Ry.py` επιβεβαιώνει αριθμητικά την πρώτη παρατήρηση:

```
import numpy as np

from qulib import GateS, GateX, GateY, BlochRotationX, BlochRotationY

np.set_printoptions(precision=4, suppress=True)

S = GateS().U
S_inv = np.linalg.inv(S)

# First observation: S R_x(theta) S^-1 = R_y(theta), for a generic angle theta
theta = 0.7
lhs = S @ BlochRotationX(theta).U @ S_inv
rhs = BlochRotationY(theta).U
print(f"S R_x(theta) S^-1 =\n{lhs}")
print(f"R_y(theta) =\n{rhs}")
print(f"matches: {np.allclose(lhs, rhs)}")

# Direct check for theta = pi: S X S^-1 = Y
X, Y = GateX().U, GateY().U
print(f"S X S^-1 =\n{S @ X @ S_inv}")
print(f"Y =\n{Y}")
print(f"matches: {np.allclose(S @ X @ S_inv, Y)}")
```

Η δεύτερη παρατήρηση που χρειαζόμαστε είναι ότι μία περιστροφή γύρω από τον γ ισοδυναμεί με μία περιστροφή κατά $\pi/4$ γύρω από τον y , μία περιστροφή γύρω από το z και μία αντίστροφη περιστροφή $-\pi/4$ γύρω από το y :

$$\mathbf{R}_y(\pi/4)\mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{R}_y(-\pi/4) = \mathbf{R}_\gamma(\varphi)$$

Παράδειγμα 3.45: Δεύτερη παρατήρηση: $\mathbf{R}_y(\pi/4)\mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{R}_y(-\pi/4) = \mathbf{R}_\gamma(\varphi)$

Ισχυριζόμαστε ότι

$$\mathbf{R}_y(\pi/4)\mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{R}_y(-\pi/4) = \mathbf{R}_\gamma(\varphi)$$

για κάθε φ , και το δείχνουμε κάνοντας απευθείας τις πράξεις με τους πίνακες. Συμβολίζοντας $c_0 = \cos(\pi/8)$, $s_0 = \sin(\pi/8)$, οι πίνακες $\mathbf{R}_y(\pm\pi/4)$ γράφονται (ενότητα 3.8)

$$\mathbf{R}_y(\pi/4) = \begin{bmatrix} c_0 & -s_0 \\ s_0 & c_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y(-\pi/4) = \begin{bmatrix} c_0 & s_0 \\ -s_0 & c_0 \end{bmatrix}$$

ενώ ο $\mathbf{R}_z(\varphi)$ είναι διαγώνιος,

$$\mathbf{R}_z(\varphi) = \begin{bmatrix} e^{-j\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{j\varphi/2} \end{bmatrix}.$$

Πολλαπλασιάζοντας πρώτα $\mathbf{R}_y(\pi/4)\mathbf{R}_z(\varphi)$ (ο διαγώνιος $\mathbf{R}_z(\varphi)$ πολλαπλασιάζει την πρώτη στήλη επί $e^{-j\varphi/2}$ και τη δεύτερη επί $e^{j\varphi/2}$),

$$\mathbf{R}_y(\pi/4)\mathbf{R}_z(\varphi) = \begin{bmatrix} c_0 e^{-j\varphi/2} & -s_0 e^{j\varphi/2} \\ s_0 e^{-j\varphi/2} & c_0 e^{j\varphi/2} \end{bmatrix}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα δεξιά με $\mathbf{R}_y(-\pi/4)$,

$$\mathbf{R}_y(\pi/4)\mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{R}_y(-\pi/4) = \begin{bmatrix} c_0^2 e^{-j\varphi/2} + s_0^2 e^{j\varphi/2} & c_0 s_0 (e^{-j\varphi/2} - e^{j\varphi/2}) \\ c_0 s_0 (e^{-j\varphi/2} - e^{j\varphi/2}) & s_0^2 e^{-j\varphi/2} + c_0^2 e^{j\varphi/2} \end{bmatrix}.$$

Χρησιμοποιώντας $e^{\pm j\varphi/2} = \cos(\varphi/2) \mp j \sin(\varphi/2)$, το διαγώνιο στοιχείο $(1, 1)$ γράφεται

$$c_0^2 e^{-j\varphi/2} + s_0^2 e^{j\varphi/2} = (c_0^2 + s_0^2) \cos \frac{\varphi}{2} - j(c_0^2 - s_0^2) \sin \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{\varphi}{2} - j \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\varphi}{2},$$

αφού $c_0^2 + s_0^2 = 1$ και, από τον τύπο της διπλής γωνίας, $c_0^2 - s_0^2 = \cos(2 \cdot \pi/8) = \cos(\pi/4)$. Με τον ίδιο τρόπο, το στοιχείο $(2, 2)$ δίνει $\cos(\varphi/2) + j \cos(\pi/4) \sin(\varphi/2)$, ενώ το εκτός διαγωνίου στοιχείο γράφεται

$$c_0 s_0 (e^{-j\varphi/2} - e^{j\varphi/2}) = -2j c_0 s_0 \sin \frac{\varphi}{2} = -j \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\varphi}{2},$$

αφού $2c_0 s_0 = \sin(2 \cdot \pi/8) = \sin(\pi/4)$. Αντικαθιστώντας τέλος $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$,

$$\mathbf{R}_y(\pi/4)\mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{R}_y(-\pi/4) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{j}{\sqrt{2}} \sin \frac{\varphi}{2} & -\frac{j}{\sqrt{2}} \sin \frac{\varphi}{2} \\ -\frac{j}{\sqrt{2}} \sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{j}{\sqrt{2}} \sin \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}.$$

Από την άλλη, χρησιμοποιώντας $\gamma = (1, 0, 1)/\sqrt{2}$ τον γενικό τύπο που δίνει τους πίνακες περιστροφής:

$$\mathbf{R}_\gamma(\varphi) = \cos \frac{\varphi}{2} \mathbf{I}_2 - j \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\mathbf{X} + \mathbf{Z}}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{j}{\sqrt{2}} \sin \frac{\varphi}{2} & -\frac{j}{\sqrt{2}} \sin \frac{\varphi}{2} \\ -\frac{j}{\sqrt{2}} \sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{j}{\sqrt{2}} \sin \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix},$$

δηλαδή ακριβώς ο ίδιος πίνακας, για κάθε γωνία φ .

To script `python/ex_Ry_Rz_gamma.py` επιβεβαιώνει αριθμητικά τη δεύτερη παρατήρηση:

```
import numpy as np

from qulib import BlochRotationY, BlochRotationZ, BlochRotationN

np.set_printoptions(precision=4, suppress=True)

gamma = np.array([1, 0, 1]) / np.sqrt(2)
Ry4 = BlochRotationY(np.pi / 4).U
Ry4_inv = np.linalg.inv(Ry4)

# Second observation: R_y(pi/4) R_z(phi) R_y(pi/4)^-1 = R_gamma(phi), for a generic angle phi
phi = 0.9
lhs = Ry4 @ BlochRotationZ(phi).U @ Ry4_inv
rhs = BlochRotationN(gamma, phi).U
print(f"R_y(pi/4) R_z(phi) R_y(pi/4)^-1 =\n{lhs}")
print(f"R_gamma(phi) =\n{rhs}")
print(f"matches: {np.allclose(lhs, rhs)}")
```

Συνδυάζουμε τώρα τις δύο παρατηρήσεις. Η πρώτη, στη γωνία $\pi/4$, δίνει

$$\mathbf{R}_y(\pi/4) = \mathbf{S} \mathbf{R}_x(\pi/4) \mathbf{S}^T$$

και άρα, αντιστρέφοντας,

$$\mathbf{R}_y^{-1}(\pi/4) = \mathbf{S} \mathbf{R}_x^{-1}(\pi/4) \mathbf{S}^T.$$

Θα χρειαστούμε επίσης ότι ο διαγώνιος $\mathbf{S}$ μετατίθεται με τον διαγώνιο $\mathbf{R}_z(\varphi)$:

Παράδειγμα 3.46: Ο διαγώνιος S μετατίθεται με τον διαγώνιο $R_z(\varphi)$

Ισχυριζόμαστε ότι

$$SR_z(\varphi) = R_z(\varphi)S$$

για κάθε γωνία φ , και το δείχνουμε κάνοντας απευθείας τις πράξεις. Και οι δύο πίνακες είναι διαγώνιοι,

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}$$

$$R_z(\varphi) = \begin{bmatrix} e^{-j\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{j\varphi/2} \end{bmatrix}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με αυτή τη σειρά,

$$SR_z(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 \cdot e^{-j\varphi/2} & 0 \\ 0 & j \cdot e^{j\varphi/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j\varphi/2} & 0 \\ 0 & j e^{j\varphi/2} \end{bmatrix}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα με την αντίστροφη σειρά,

$$R_z(\varphi)S = \begin{bmatrix} e^{-j\varphi/2} \cdot 1 & 0 \\ 0 & e^{j\varphi/2} \cdot j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j\varphi/2} & 0 \\ 0 & j e^{j\varphi/2} \end{bmatrix}.$$

Οι δύο πίνακες ταυτίζονται ακριβώς, άρα $SR_z(\varphi) = R_z(\varphi)S$. Το ίδιο επιχείρημα δείχνει, γενικότερα, ότι δύο οποιοδήποτε διαγώνιοι πίνακες πάντα μετατίθενται: κάθε στοιχείο της διαγωνίου του γινομένου είναι απλώς το γινόμενο των αντίστοιχων διαγώνιων στοιχείων, ανεξάρτητα από τη σειρά πολλαπλασιασμού.

Χρησιμοποιώντας τώρα αυτό, μαζί με τις δύο σχέσεις για τον $R_y(\pi/4)$ που βρήκαμε παραπάνω, η δεύτερη παρατήρηση γράφεται

$$\begin{aligned} R_\gamma(\varphi) &= R_y\left(\frac{\pi}{4}\right) R_z(\varphi) R_y^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) = S R_x\left(\frac{\pi}{4}\right) S^T R_z(\varphi) S R_x\left(-\frac{\pi}{4}\right) S^T = \\ &= S R_x\left(\frac{\pi}{4}\right) S^T S R_z(\varphi) R_x\left(-\frac{\pi}{4}\right) S^T \\ &= S R_x\left(\frac{\pi}{4}\right) R_z(\varphi) R_x\left(-\frac{\pi}{4}\right) S^T \end{aligned}$$

Θα αντικαταστήσουμε τώρα τα $R_x(\pm\pi/4)$ και το $R_z(\varphi)$ με γινόμενα από H, T . Από το παράδειγμα 3.40,

$$R_x(\pi/4) = e^{-j\pi/8} H T H.$$

Επίσης είναι εύκολο να δούμε ότι:

$$T^8 = I_2,$$

οπότε έχουμε $T^{-1} = T^7$, οπότε

$$R_x(-\pi/4) = e^{j\pi/8} H T^{-1} H = e^{j\pi/8} H T^7 H.$$

Αντιστρέφοντας και τη σχέση $T = e^{j\pi/8} R_z(\pi/4)$ (ενότητα 3.13),

$$R_z(\pi/4) = e^{-j\pi/8} T.$$

Ας δούμε πρώτα την περίπτωση $\varphi = -\pi/2$. Χρησιμοποιώντας τη σύνθεση περιστροφών γύρω από τον ίδιο άξονα,

$$R_z\left(-\frac{\pi}{2}\right) = R_z^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) R_z^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(e^{-j\pi/8} T\right)^{-2} = e^{j\pi/4} T^{-2} = e^{j\pi/4} T^6.$$

Οι τρεις φάσεις που εμφανίζονται απλοποιούνται σε

$$e^{-j\pi/8} \cdot e^{j\pi/4} \cdot e^{j\pi/8} = e^{j\pi/4},$$

οπότε

$$R_\gamma\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{j\pi/4} SHTHT^6 HT^7 HS^{-1}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με την καθολική φάση $e^{-j\pi/4}$ του $H^{1/2}$, οι φάσεις ακυρώνονται πλήρως,

$$H^{1/2} = SHTHT^6 HT^7 HS^{-1}.$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, για $\varphi = \pi/2$ βρίσκουμε

$$R_z\left(\frac{\pi}{2}\right) = R_z\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = e^{-j\pi/4} T^2,$$

και οι φάσεις πάλι ακυρώνονται πλήρως με την καθολική φάση $e^{j\pi/4}$ του $H^{-1/2}$, δίνοντας

$$H^{-1/2} = SHTHT^2 HT^7 HS^{-1}.$$

Τέλος, αντικαθιστώντας $S = T^2$, $S^{-1} = T^{-2} = T^6$ (ενότητα 3.13), καταλήγουμε σε κυκλώματα αποκλειστικά από T, H .

Αποτέλεσμα 3.14: Οι πίνακες $H^{\pm 1/2}$ ως κυκλώματα από T, H

Οι πίνακες $H^{\pm 1/2}$ κατασκευάζονται ακριβώς (όχι κατά προσέγγιση, αφού κάθε βήμα παραπάνω ήταν ακριβές) από τις πύλες T, H ,

$$H^{1/2} = T^2 HTHT^6 HT^7 HT^6,$$

$$H^{-1/2} = T^2 HTHT^2 HT^7 HT^6.$$

Το script `python/ex_Hhalf_TH_circuit.py` επιβεβαιώνει αριθμητικά το παραπάνω αποτέλεσμα:

```
import numpy as np

from qulib import GateH, GateT

np.set_printoptions(precision=4, suppress=True)

I2 = np.eye(2)
H = GateH().U
T = GateT().U

def Tp(k):
    return np.linalg.matrix_power(T, k)

# Result 3.14: H^{1/2}, H^{-1/2} as exact circuits built only from T, H
H_plus_half_circuit = Tp(2) @ H @ T @ H @ Tp(6) @ H @ Tp(7) @ H @ Tp(6)
H_minus_half_circuit = Tp(2) @ H @ T @ H @ Tp(2) @ H @ Tp(7) @ H @ Tp(6)

H_plus_half_formula = (1 + 1j) / 2 * H + (1 - 1j) / 2 * I2
H_minus_half_formula = (1 - 1j) / 2 * H + (1 + 1j) / 2 * I2

print(f"T^2 H T H T^6 H T^7 H T^6 =\n{H_plus_half_circuit}")
print(f"H^{1/2} =\n{H_plus_half_formula}")
print(f"matches: {np.allclose(H_plus_half_circuit, H_plus_half_formula)}")

print(f"T^2 H T H T^2 H T^7 H T^6 =\n{H_minus_half_circuit}")
print(f"H^{-1/2} =\n{H_minus_half_formula}")
print(f"matches: {np.allclose(H_minus_half_circuit, H_minus_half_formula)}")
```

Αποτέλεσμα 3.15: Το σύνολο $\{H, T\}$ είναι καθολικό

Συνοψίζοντας όλο το παραπάνω επιχείρημα:

- Οι πύλες που υλοποιούν οι πίνακες

$$V = e^{-j\pi/4} (XTX)(HTH).$$

και

$$W = H^{-1/2} V H^{1/2}$$

αντιστοιχούν στις στροφές $R_n(\theta)$ και $R_m(\theta)$ σε γύρω δύο διανύσματα n και m που είναι μεταξύ τους κάθετα και η γωνία θ , προκύπτει από την σχέση

$$\cos^2 \theta = \cos(\pi/8)$$

Η γωνία θ είναι άρρητη και προκύπτει ότι κάθε περιστροφή γύρω από τα n και m , $R_n(\phi)$ και $R_m(\phi)$ αντίστοιχα μπορεί να περιγραφεί εφαρμόζοντας τον κατάλληλο αριθμό περιστροφών γύρω από την θ , π.χ.

$$R_n(\phi) \approx (R_n(\theta))^k$$

Επομένως κάθε αυθαίρετη περιστροφή $R_n(\phi)$ και $R_m(\phi)$ μπορεί να υλοποιηθεί από πύλες που περιγράφονται από τους X, T, H και $H^{-1/2}, H^{1/2}$.

- Από την ενότητα 3.5 ξέρουμε ότι όλοι οι μοναδιαίοι πίνακες που αντιστοιχούν σε 1 qubit μπορούν να περιγραφούν από τους πίνακες περιστροφών R_n και R_m χρησιμοποιώντας κατάλληλες γωνίες α, β, γ και δ έτσι ώστε:

$$U = e^{j\alpha} R_n(\beta) R_m(\gamma) R_n(\delta)$$

Επομένως κάθε πύλη ενός qubit μπορεί να υλοποιηθεί από πύλες που περιγράφονται από τους X, T, H και $H^{-1/2}, H^{1/2}$.

- Οι πίνακες $H^{1/2}$ και $H^{-1/2}$ γράφονται και αυτοί με την βοήθεια των πινάκων H και T ,

$$H^{1/2} = T^2 H T H T^6 H T^7 H T^6,$$

$$H^{-1/2} = T^2 H T H T^2 H T^7 H T^6.$$

Επομένως κάθε πύλη ενός qubit μπορεί να υλοποιηθεί από πύλες που περιγράφονται από τους X, T, H .

- Δεδομένου ότι $X = H Z H$ και

$$Z = T^4 \quad (\text{παραλείπουμε έναν εκθετικό όρο } e^{j\alpha})$$

κάθε πύλη ενός qubit μπορεί να υλοποιηθεί από πύλες που περιγράφονται από τους T και H .

Σύνοψη Ενότητας

Σε αυτή την ενότητα περάσαμε από την αφηρημένη περιγραφή ενός qubit ως διάνυσμα σε μία πολύ πιο γεωμετρική εικόνα, τη σφαίρα του Bloch, και καταλήξαμε σε ένα από τα πιο πρακτικά αποτελέσματα του μαθήματος: ότι μόλις δύο πύλες αρκούν για να υλοποιήσουμε οποιαδήποτε κβαντική πύλη ενός qubit. Συνοπτικά:

- Κάθε κατάσταση ενός qubit αντιστοιχεί σε ένα σημείο πάνω στη σφαίρα του Bloch, με τους έξι πόλους της να αντιστοιχούν στις καταστάσεις $|0\rangle, |1\rangle, |\pm x\rangle, |\pm y\rangle$.
- Οι πίνακες Pauli X, Y, Z αντιστοιχούν σε περιστροφές κατά π γύρω από τους ομώνυμους άξονες. Γενικεύοντας, ο τελεστής $\hat{R}_n(\pi) = n_x \hat{X} + n_y \hat{Y} + n_z \hat{Z}$ περιγράφει περιστροφή κατά π γύρω από οποιοδήποτε άξονα n , και ο τύπος του Rodrigues επεκτείνει αυτό σε οποιαδήποτε γωνία θ ,

δίνοντας τον γενικό πίνακα περιστροφής $R_n(\theta)$.

- Κάθε μοναδιαίος 2×2 πίνακας U (δηλαδή κάθε πύλη ενός qubit) γράφεται ως $U = e^{j\alpha} R_n(\theta)$: κάθε πύλη είναι μία περιστροφή της σφαίρας Bloch, επί μία καθολική φάση.
- Κάθε U γράφεται επίσης ως γινόμενο τριών περιστροφών γύρω από ένα σταθερό ζεύγος κάθετων αξόνων (αναπαράσταση Euler $U = e^{j\alpha} R_n(\beta) R_m(\gamma) R_n(\delta)$), καθώς και στην εναλλακτική μορφή $U = e^{j\alpha} A X B X C$.
- Ορίσαμε τις βασικές, ονομαστικές πύλες ενός qubit X, Y, Z, H, S, T , με τις αντίστοιχες περιστροφές τους στη σφαίρα Bloch.
- Οι πύλες $V = R_n(\theta)$ και $W = R_m(\theta)$, κατασκευασμένες μόνο από X, H, T , περιστρέφουν κατά την ίδια γωνία θ γύρω από δύο κάθετους άξονες n, m . Επειδή το θ είναι άρρητο πολλαπλάσιο του 2π , οι δυνάμεις τους προσεγγίζουν όσο καλά θέλουμε οποιαδήποτε περιστροφή γύρω από τον n ή τον m .
- Δείξαμε τέλος ότι και οι πύλες $H^{\pm 1/2}$ (απαραίτητες για την κατασκευή του W) γράφονται ακριβώς ως κυκλώματα αποκλειστικά από H, T , καταλήγοντας στο ότι το σύνολο $\{H, T\}$ είναι καθολικό: κάθε πύλη ενός qubit μπορεί να προσεγγιστεί όσο καλά θέλουμε χρησιμοποιώντας μόνο αυτές τις δύο πύλες.