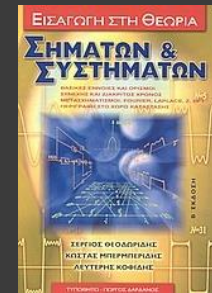


ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Βιβλιογραφία

Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και
Συστημάτων, Σ. Θεοδωρίδης, Κ.
Μπερμπερίδης, Λ. Κοφίδης, Τυπωθήτω



Σήματα Συστήματα και Αλγόριθμοι, Ν.
Καλουπτσίδης, Δίαυλος



Ευχαριστίες για την παραχώρηση των
πρωτότυπων σημειώσεων :

Dr Καρύμπαλη Ειρήνη,
Πανεπιστήμιο Αιγαίου,
Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και
Επικοινωνιακών Συστημάτων

http://www.icsd.aegean.gr/karybali/en_index.html

Τι είναι σήμα

Σήμα

Σύνολο τιμών που λαμβάνει μία φυσική ποσότητα όταν αυτή μεταβάλλεται.

Συνάρτηση ή ακολουθία μίας ή περισσότερων μεταβλητών (π.χ. χρόνου, χώρου) που περιγράφει τη μεταβολή ενός φυσικού φαινομένου.

π.χ. τηλεπικοινωνιακό σήμα, ραδιοφωνικό σήμα, εικόνες από δορυφόρο, καρδιακό σήμα, χρηματιστηριακός δείκτης, κ.τ.λ.

Κατηγορίες σημάτων

Αναλογικό σήμα

Το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης είναι διαστήματα πραγματικών αριθμών.

π.χ. τιμές ρεύματος που διαρρέουν μια αντίσταση $i(t)$

Ανεξάρτητη μεταβλητή (t) και εξαρτημένη μεταβλητή (i) μεταβάλλονται σε ένα συνεχές σύνολο τιμών.

Σήμα διακριτού χρόνου*

Η ανεξάρτητη μεταβλητή λαμβάνει μόνο διακριτές τιμές, ενώ η εξαρτημένη μεταβλητή μεταβάλλεται σε ένα διάστημα (παίρνει συνεχείς τιμές).

π.χ. τιμές πληθωρισμού Π_n για κάθε μήνα n , $n = 1, 2, 3, \dots$

* σε πολλές περιπτώσεις η ανεξάρτητη μεταβλητή δεν αντιστοιχεί σε χρόνο

Κατηγορίες σημάτων

Τα σήματα διακριτού χρόνου προκύπτουν:

- από πηγές διακριτής πληροφορίας
- από αναλογικά σήματα μέσω δειγματοληψίας

Δειγματοληπτούμε την τιμή που έχει το αναλογικό σήμα (με τη βοήθεια ενός μετατροπέα A/D) κάθε π.χ. T δευτερόλεπτα.

$x(t)$: το αναλογικό σήμα

$x(n) = x(nT)$: η ακολουθία που αντιστοιχεί στο σήμα διακριτού χρόνου

Δειγματοληψία - ΓΙΑΤΙ;

Κατηγορίες σημάτων

Ψηφιακό σήμα

Τόσο η ανεξάρτητη όσο και η εξαρτημένη μεταβλητή λαμβάνουν μόνο διακριτές τιμές.

π.χ. εικόνα: 2D ακολουθία $I(m,n)$, m,n : θέσεις pixels στο επίπεδο της εικόνας

I : τιμές-επίπεδα του γκρι (συνήθως $256 = 2^8$, όπου το καθένα κωδικοποιείται με 8 δυαδικά ψηφία)

0 - Μαύρο

255 - Λευκό



Τι είναι σύστημα

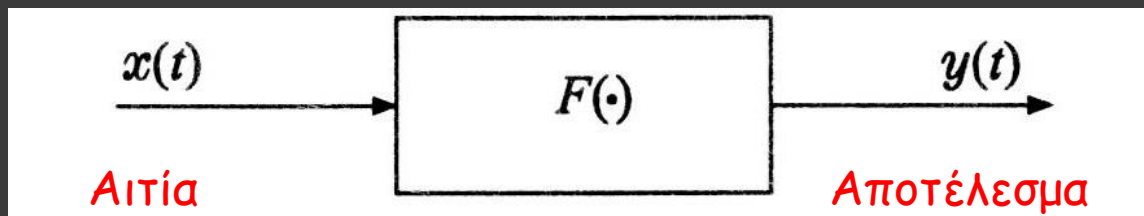
Σύστημα

Η οντότητα που επεξεργάζεται - μετατρέπει ένα σήμα (ή περισσότερα) προκειμένου να επιτύχει κάποιο στόχο, με αποτέλεσμα τη δημιουργία νέων σημάτων.

Ένας μετασχηματισμός F που εφαρμόζεται σε ένα σήμα $x(t)$ ή $x(n)$ και έχει ως αποτέλεσμα ένα σήμα $y(t)$ ή $y(n)$.

$x(t)$ ή $x(n)$: σήμα εισόδου

$y(t)$ ή $y(n)$: σήμα εξόδου



Σχήμα 1.1 Σύστημα ως μετασχηματισμός σημάτων.

Μελέτη σημάτων και συστημάτων

Θεωρία συστημάτων

Αντικείμενο μελέτης: γνώση και περιγραφή των βασικών χαρακτηριστικών ενός φυσικού συστήματος με στόχο τη χρησιμοποίησή του σε μια φυσική διεργασία.

Επεξεργασία σημάτων

Έχοντας λάβει ένα σήμα (π.χ. μια εικόνα από δορυφόρο), πώς μπορώ να διαχωρίσω τη χρήσιμη πληροφορία από παρεμβολές και θόρυβο που έχουν υπεισέλθει κατά τη διαδικασία μετάδοσης και λήψης;

Τιους μετασχηματισμούς μπορώ να εφαρμόσω σε ένα σήμα, προκειμένου να τονίσω και να εκμεταλλευτώ συγκεκριμένα χρήσιμα χαρακτηριστικά του;

π.χ. DCT → διάκριση συχνοτήτων → λιγότερα bits για κωδικοποίηση υψηλών συχνοτήτων → συμπίεση δεδομένων

Ειδικές περιπτώσεις σημάτων

Βασική μεθοδολογία στη θεωρία σημάτων και συστημάτων:
ανάλυση ενός σήματος ή συστήματος σε απλούστερα, των οποίων η συμπεριφορά είναι γνωστή ή πιο εύκολο να μελετηθεί

Περιοδικά σήματα

$$x(t) = x(t+kT), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

T (sec): βασική περίοδος (η ελάχιστη σταθερά για την οποία ισχύει $x(t)=x(t+T)$)

$f = 1/T$ (Hz): βασική συχνότητα

$\Omega = 2\pi/T$ (rads): κυκλική συχνότητα

Περιοδικές ακολουθίες

$$x(n) = x(n+kN), \text{ για κάθε } k \in \mathbb{Z} \text{ (σύνολο ακεραίων)}$$

N : περίοδος

Ειδικές περιπτώσεις σημάτων

Ημιτονοειδή σήματα

Το περιοδικό σήμα

$$x(t) = A \sin(\Omega t + \theta)$$

$T = 2\pi/\Omega$: περίοδος

$\Omega = 2\pi f$ (rads): κυκλική συχνότητα

f : η συχνότητα του ημιτόνου

θ : φάση του ημιτόνου

A : πλάτος του ημιτόνου

Αν $\theta = \pi/2$, το σήμα ημιτόνου είναι σήμα συνημιτόνου, $\cos(\Omega t)$.

Ειδικές περιπτώσεις σημάτων

Μιγαδικό εκθετικό σήμα

Το περιοδικό σήμα

$$y(t) = Ae^{j(\Omega t + \theta)}$$

$T = 2\pi/\Omega$: περίοδος

Τα σήματα $y(t)$ - μιγαδικό εκθετικό και $x(t)$ - ημιτονοειδές σχετίζονται μεταξύ τους με τον τύπο του Euler

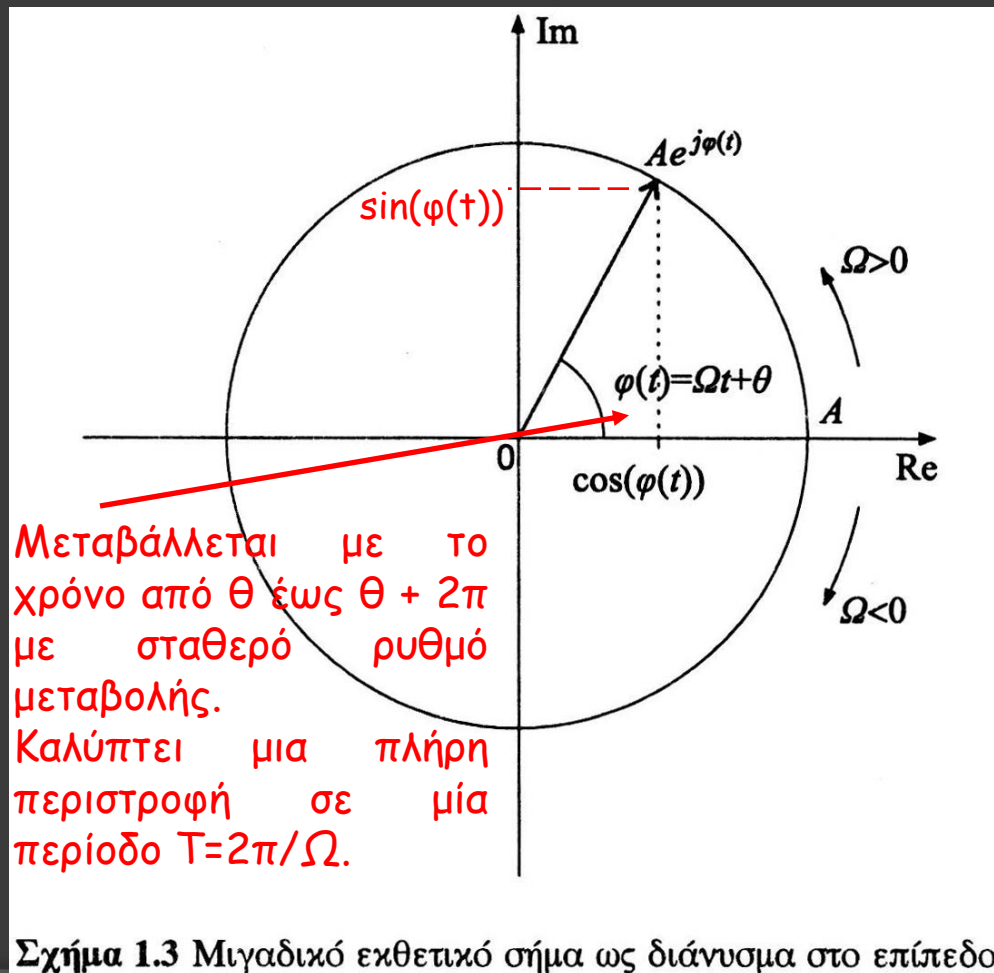
$$e^{j(\Omega t + \theta)} = \cos(\Omega t + \theta) + j\sin(\Omega t + \theta)$$

και μπορούμε να γράψουμε:

$$A\cos(\Omega t + \theta) = A \operatorname{Re}[e^{j(\Omega t + \theta)}]$$

$$A\sin(\Omega t + \theta) = A \operatorname{Im}[e^{j(\Omega t + \theta)}]$$

Ειδικές περιπτώσεις σημάτων



$$Ae^{-j(\Omega t + \theta)}$$

Ίδιες ιδιότητες με $Ae^{j(\Omega t + \theta)}$

Το διάνυσμα κινείται με τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Η γωνία μεταβάλλεται από $-\theta$ έως $-\theta - 2\pi$.

Προβολή στο φανταστικό άξονα: $-\sin(\varphi(t))$

Αρνητική κυκλική συχνότητα

Ειδικές περιπτώσεις σημάτων

Το μιγαδικό εκθετικό σήμα μπορεί να αναπαρασταθεί και ως:

$$y(t) = Ae^{j(\Omega t + \theta)} = Ye^{j\Omega t}$$

$Y = Ae^{j\theta}$: μιγαδικό πλάτος σήματος

Λαμβάνοντας υπόψη τις αντίστροφες σχέσεις του Euler

$$\cos \phi = \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2}, \quad \sin \phi = \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j}$$

αποδεικνύεται ότι ένα ημιτονοειδές σήμα γράφεται ως άθροισμα δύο μιγαδικών συζυγών σημάτων.

$$A \cos(\Omega t + \theta) = ;$$

Ειδικές περιπτώσεις σημάτων

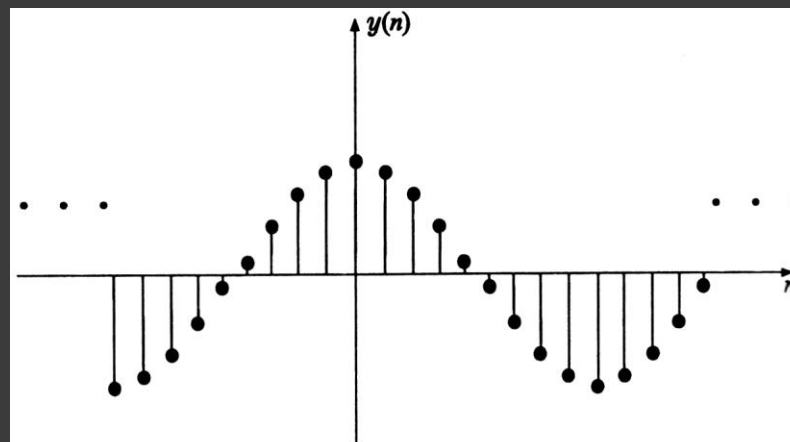
Μιγαδική εκθετική ακολουθία

$$x(n) = e^{j\Omega n} = \cos \omega n + j \sin \omega n$$

$\cos \omega n$: διακριτό συνημίτονο

$\sin \omega n$: διακριτό ημίτονο

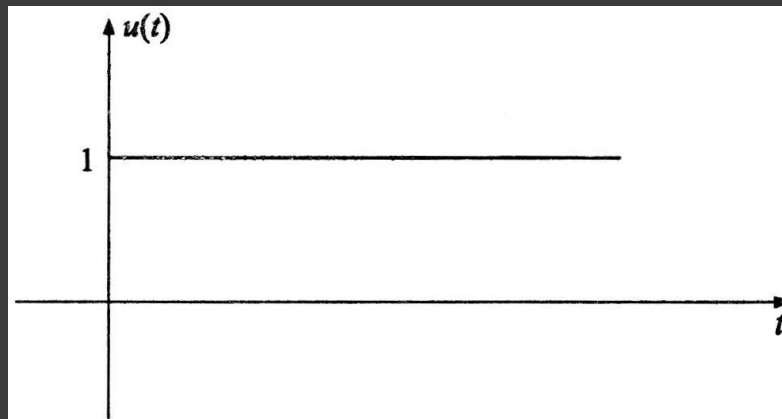
Αν $\omega = 2k\pi/N$ ($k \in \mathbb{Z}$), τότε η $x(n)$ είναι περιοδική με περίοδο N και ω : κυκλική συχνότητα.



Σχήμα 5.3 Η ακολουθία $\cos(\frac{\pi}{9}n)$.

Ειδικές περιπτώσεις σημάτων

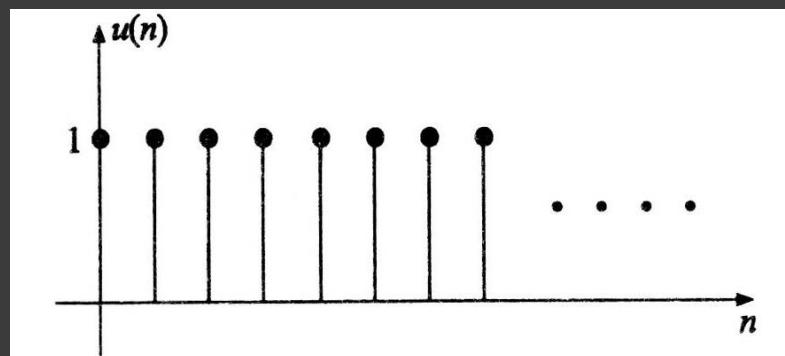
Μοναδιαία βηματική συνάρτηση



Σχήμα 1.4 Μοναδιαία βηματική συνάρτηση.

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

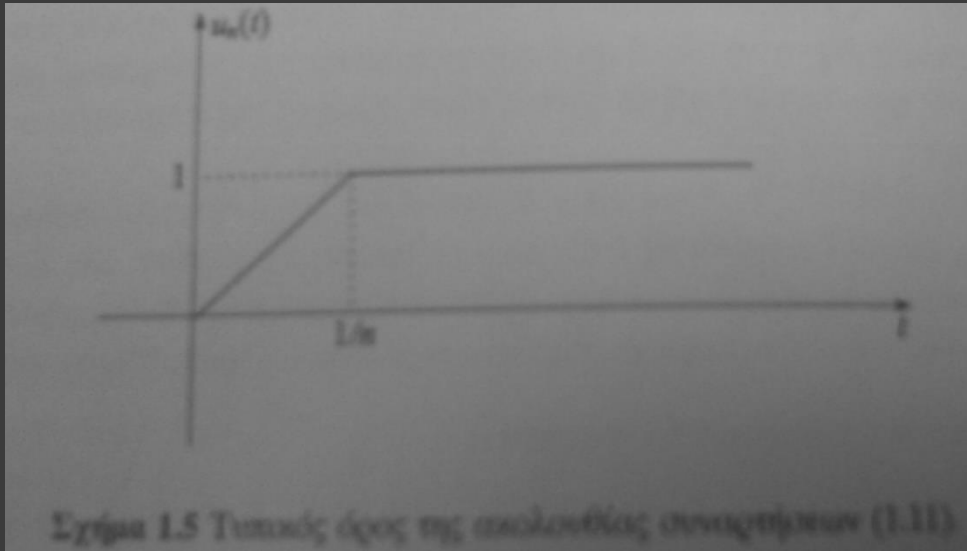
Ασυνεχής στο $t=0$,
όπου και δεν ορίζεται



Σχήμα 5.1 Η μοναδιαία βηματική ακολουθία $u(n)$.

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Ειδικές περιπτώσεις σημάτων



Εναλλακτικά:

$$u_n(t) = \begin{cases} 1, & t \geq \frac{1}{n} \\ nt, & 0 < t < \frac{1}{n} \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

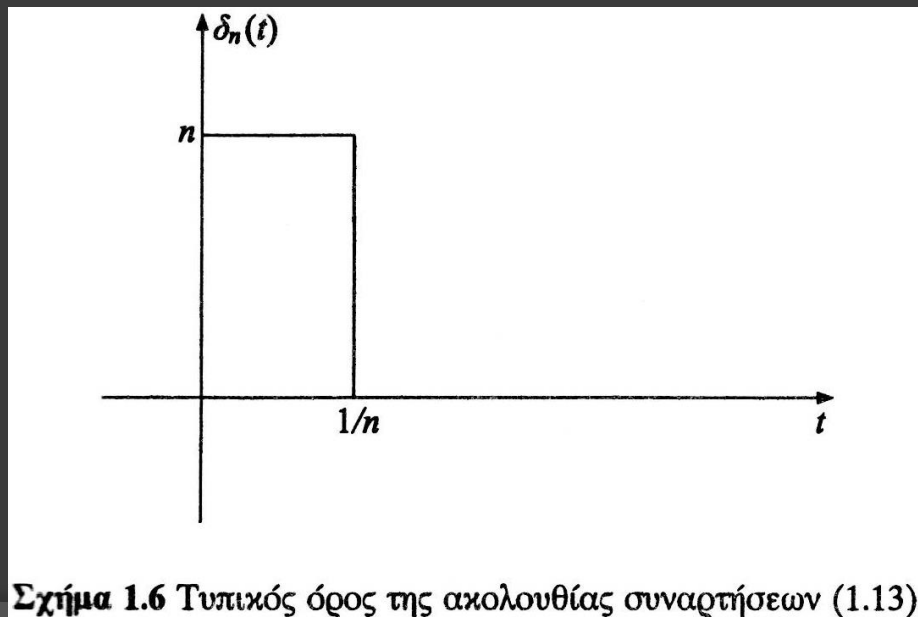
Ισχύει: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = u(t)$

Ειδικές περιπτώσεις σημάτων

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η παράγωγος:

$$\delta_n(t) \equiv \frac{du_n(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ n, & 0 < t < \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < t \end{cases}$$

Η παράγωγος δεν ορίζεται στα σημεία 0 και $1/n$



Η $\delta_n(t)$ δεν έχει πεπερασμένο όριο.

Για $n \rightarrow \infty$ το εύρος του παλμού τείνει στο 0, αλλά το πλάτος του τείνει στο άπειρο.

Ειδικές περιπτώσεις σημάτων

Κρουστική συνάρτηση και κατανομές

Αντίθετα, η ακολουθία ολοκληρωμάτων της $\delta_n(t)$ έχει όριο και μάλιστα είναι σταθερή:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} n dt = 1$$

Άλλες συναρτήσεις με την παραπάνω ιδιότητα:

$$\delta_n(t) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 t^2}$$

$$\delta_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\pi t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{j\Omega t} d\Omega$$

Θα συναντήσουμε πολλές τέτοιες περιπτώσεις στα επόμενα κεφάλαια.

Ειδικές περιπτώσεις σημάτων

Κρουστική συνάρτηση ή συνάρτηση Dirac

Ορίζουμε τη $\delta(t)$ να έχει την εξής ιδιότητα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \delta(t) dt = \varphi(0)$$

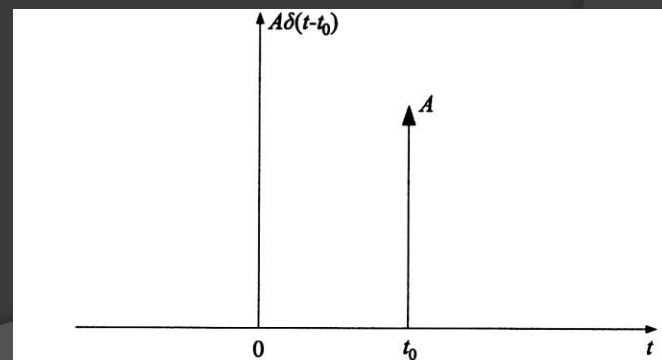
Όπου $\varphi(t)$ οποιαδήποτε συνάρτηση συνεχής στο $t=0$.

$$\text{Αν } \varphi(t)=1 \text{ τότε } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Η συνάρτηση $A\delta(t-t_0)$ χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) A\delta(t-t_0) dt = A\varphi(t_0) \quad \text{για κάθε συνάρτηση } \varphi(t) \text{ συνεχής στο } t_0.$$

Παριστάνεται με βέλος πλάτους A , στο $t=t_0$



Σχήμα 1.7 Κρουστική συνάρτηση πλάτους A τοποθετημένη στο $t = t_0$.

Ειδικές περιπτώσεις σημάτων

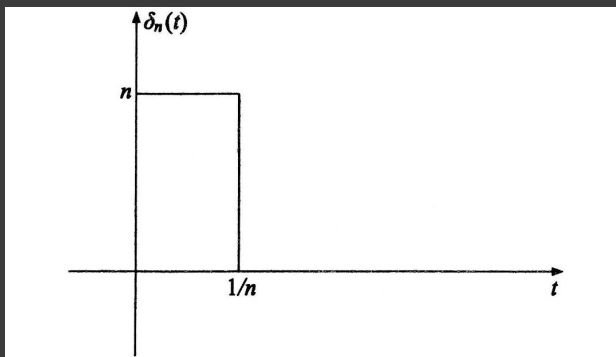
Συνάρτηση δέλτα (κρουστική)

$$\delta(t) = 0, \text{ για κάθε } t \neq 0$$

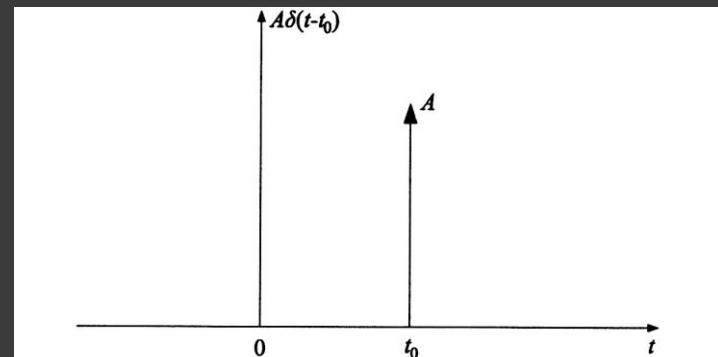
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Παίρνει μηδενικές τιμές παντού εκτός από την αρχή των αξόνων.

Η συνολική επιφάνεια κάτω της $\delta(t)$ είναι 1.



Σχήμα 1.6 Τυπικός όρος της ακολουθίας συναρτήσεων (1.13).



Σχήμα 1.7 Κρουστική συνάρτηση πλάτους A τοποθετημένη στο $t = t_0$.

Ειδικές περιπτώσεις σημάτων

Χρησιμεύει ως προσέγγιση ενός φυσικού σήματος μικρής διάρκειας και μεγάλου μέτρου.

Η απόκριση ενός συστήματος σε τέτοια είσοδο έχει πολλή πληροφορία για το χαρακτήρα του συστήματος.

Ιδιότητες

$$(\alpha) \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$(\beta) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t) dt = \phi(0)$$

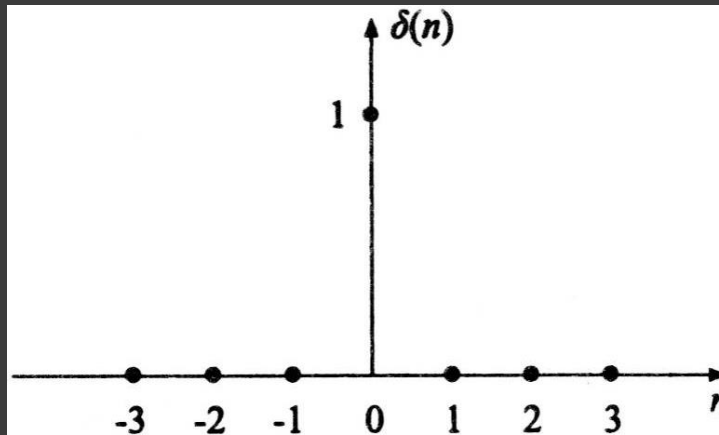
$$(\gamma) \text{ Μετατόπιση } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \phi(t) dt = \phi(t_0)$$

$$(\delta) \text{ Κλιμάκωση } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(at) \phi(t) dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi\left(\frac{t}{a}\right) dt$$

$$(\epsilon) \text{ Παραγωγή } \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t - t_0) \phi(t) dt = (-1)^n \phi^{(n)}(t_0)$$

Ειδικές περιπτώσεις σημάτων

Κρουστική ακολουθία



Σχήμα 5.2 Η κρουστική ακολουθία $\delta(n)$.

$$\delta(n - k) = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$$

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k)x(n - k) = x(n) * \delta(n)$$

Κατηγορίες συστημάτων

Στατικά και Δυναμικά Συστήματα

Στατικό σύστημα (ή σύστημα χωρίς μνήμη): κάθε χρονική στιγμή t , το σήμα εξόδου $y(t)$ εξαρτάται μόνο από την τιμή του σήματος εισόδου $x(t)$, την ίδια χρονική στιγμή

π.χ. αντίσταση $R \rightarrow u(t) = i(t)R$

Δυναμικό σύστημα (ή σύστημα με μνήμη): η έξοδός του $y(t)$ τη χρονική στιγμή t εξαρτάται από τις τιμές που παίρνει η είσοδος και σε χρονικές στιγμές διάφορες του t , π.χ. Σε ένα διάστημα $[t_0, t]$

π.χ. χωρητική αντίσταση $C \rightarrow y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$

Κατηγορίες συστημάτων

Αιτιατά και Μη-αιτιατά Συστήματα

Αιτιατό σύστημα: το σήμα εξόδου $y(t)$ εξαρτάται από τις τιμές του σήματος εισόδου, $x(t)$, την παρούσα στιγμή t και προηγούμενες χρονικές στιγμές

Αν το σύστημα περιγράφεται από μία συνάρτηση $h(t)$, το σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνο αν $h(t) = 0$ για $t < 0$.

Μεταβολές στην είσοδο (αιτία) $\rightarrow$ μεταβολές στην έξοδο (αποτέλεσμα)

π.χ. σύστημα χωρητικής αντίστασης

Μη-αιτιατό σύστημα: η έξοδός του εξαρτάται και από μελλοντικές τιμές της εισόδου

Μη πραγματοποιήσιμο σύστημα (εκτός και αν δεν πρόκειται να λειτουργήσει σε πραγματικό χρόνο)

Κατηγορίες συστημάτων

Γραμμικά και Μη-γραμμικά Συστήματα

Γραμμικό σύστημα: Η απόκριση στο γραμμικό συνδυασμό δύο εισόδων ισούται με τον αντίστοιχο γραμμικό συνδυασμό των επιμέρους αποκρίσεων.

Έξοδος συστήματος στη γενική της μορφή:

$$y(t) = F[x(t)]$$

Γραμμικό σύστημα, αν για δύο οποιαδήποτε σήματα $x_1(t)$ και $x_2(t)$ ισχύει:

$$F[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1F[x_1(t)] + a_2F[x_2(t)] \quad - \text{Αρχή υπέρθεσης}$$

$$y(t) = F\left[\sum_{i=1}^N a_i x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^N a_i F[x_i(t)] = \sum_{i=1}^N a_i y_i(t)$$

Κατηγορίες συστημάτων

Γραμμικό σύστημα διακριτού χρόνου

Έξοδος συστήματος στη γενική της μορφή:

$$y(n) = T[x(n)]$$

όπου T ένας μετασχηματισμός.

Γραμμικό σύστημα, αν ισχύει η ιδιότητα της υπέρθεσης:

$$T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1T[x_1(n)] + a_2T[x_2(n)]$$

Για οποιεσδήποτε σταθερές a_1, a_2 .

Μη-γραμμικό σύστημα: δεν ικανοποιεί την αρχή της υπέρθεσης

Κατηγορίες συστημάτων

Χρονικά Αμετάβλητα και Μεταβαλλόμενα συστήματα

Χρονικά Αμετάβλητο σύστημα: αν και μόνο αν χρονικές ολισθήσεις του σήματος εισόδου μεταφράζονται σε αντίστοιχες χρονικές ολισθήσεις στην έξοδο

$$y(t) = F[x(t)] \Leftrightarrow y(t-t_0) = F[x(t-t_0)], \text{ για κάθε } t_0 \in \mathbb{R}$$

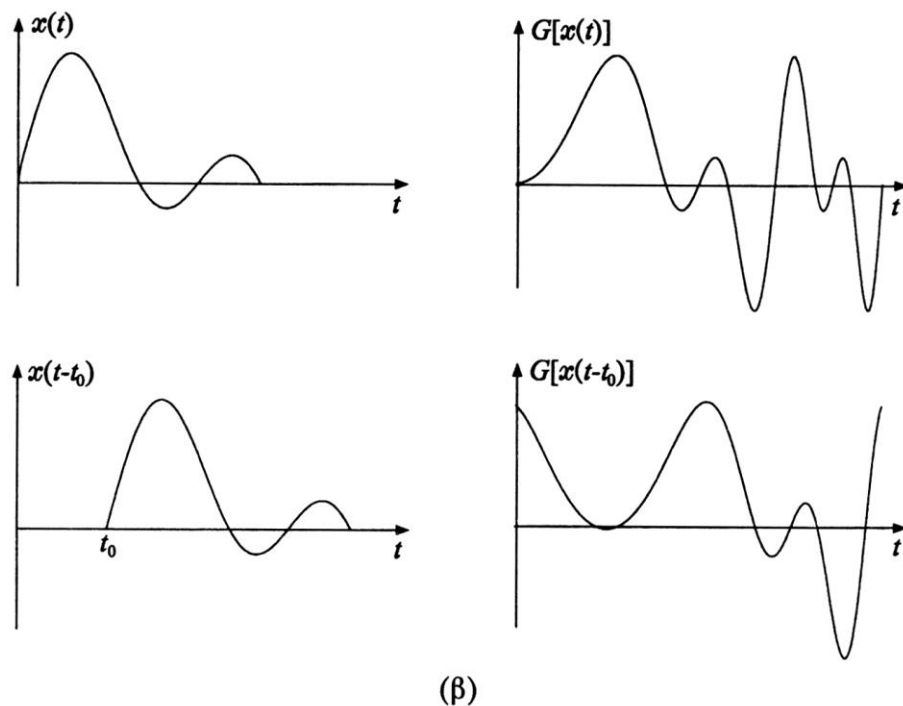
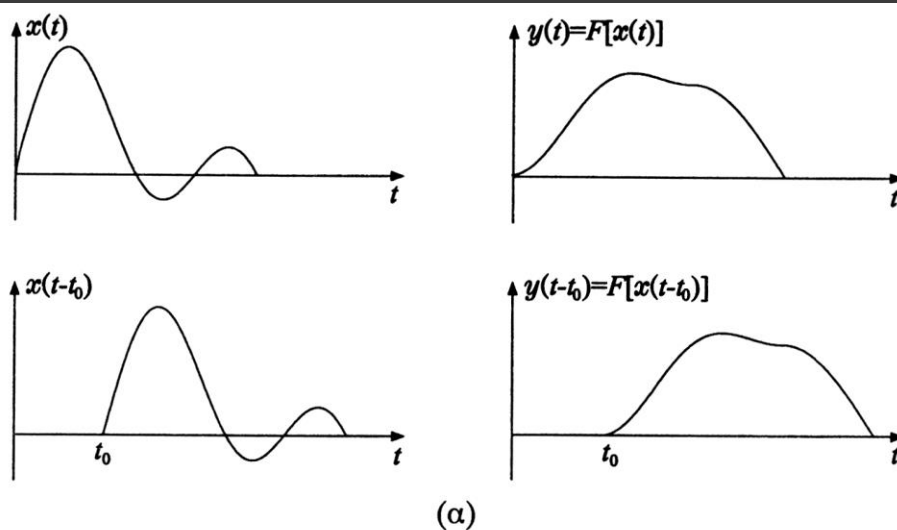
Το σήμα εξόδου δεν αλλάζει μορφή και παραμένει το ίδιο, ανεξάρτητα από το ποια χρονική στιγμή θα διεγείρουμε την είσοδο με το σήμα $x(t)$.

Χρονικά Αμετάβλητο σύστημα διακριτού χρόνου:

$$y(n) = T[x(n)] \Leftrightarrow y(n-n_0) = T[x(n-n_0)], \text{ για κάθε } n_0 \in \mathbb{Z}$$

Χρονικά Μεταβαλλόμενο σύστημα: μια χρονική ολίσθηση στην είσοδο μπορεί να οδηγήσει σε εντελώς διαφορετική έξοδο

Κατηγορίες συστημάτων



Σχήμα 1.9 Παράδειγμα εισόδου και εξόδου γραμμικού (α) χρονικά αμετάβλητου και (β) χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος.

Κρουστική απόκριση γραμμικών συστημάτων

- ◉ Ζητούμενο: εξαγωγή βασικής, γενικής σχέσης
- ◉ Περιγραφή κατά γενικό τρόπο της εξόδου $y(t)$, ενός γραμμικού (σε αρχική ηρεμία) συστήματος, ως συνάρτηση δύο σημάτων:
 - Του σήματος εισόδου $x(t)$
 - Της απόκρισης του συστήματος όταν αυτό διεγείρεται από το κρουστικό σήμα $\delta(t)$
- ◉ Η περιγραφή ενός συστήματος ως μιας απεικόνισης $F(.)$ δεν είναι πάντα εύκολη
- ◉ Ειδικά όταν το σύστημα είναι πολύπλοκο
- ◉ Αντίθετα, η έξοδος του συστήματος για είσοδο $\delta(t)$ μπορεί να αποτυπωθεί και πειραματικά.

Γραμμικό Χρονικά Αμετάβλητο Σύστημα (ΓΧΑΣ)

Σε ένα ΓΧΑ σύστημα αρκεί η γνώση μίας και μόνο συνάρτησης, της $h(t)$, για να περιγραφεί πλήρως η σχέση εισόδου, $x(t)$, και εξόδου, $y(t)$ του συστήματος.

$h(t) = F[\delta(t)]$ - κρουστική απόκριση

Η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος, όταν αυτό διεγείρεται από την κρουστική συνάρτηση, $\delta(t)$.

Στην πράξη, μπορεί να υπολογιστεί πειραματικά, ως η έξοδος του συστήματος, όταν η είσοδος είναι ένας παλμός «μικρού» εύρους και «μεγάλου» πλάτους (προσέγγιση της συνάρτησης $\delta(t)$).

Γραμμικό Χρονικά Αμετάβλητο Σύστημα (ΓΧΑΣ)

Γραμμικό σύστημα

Είσοδος: γραμμικός συνδυασμός μετατοπισμένων κρουστικών παλμών

=>

Έξοδος: γραμμικός συνδυασμός των αποκρίσεων του συστήματος σε
κάθε ένα από τους μετατοπισμένους παλμούς

και χρονικά αμετάβλητο

=>

η απόκρισή του σε ένα μετατοπισμένο παλμό είναι ίση με τη
μετατοπισμένη απόκριση του συστήματος σε ένα παλμό εισόδου τη
χρονική στιγμή $t=0$

Γραμμικό Χρονικά Αμετάβλητο Σύστημα (ΓΧΑΣ)

Άρα,

η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος μπορεί να εκφραστεί ως ο γραμμικός συνδυασμός χρονικά μετατοπισμένων κρουστικών αποκρίσεων.

Συνέλιξη

Ολοκλήρωμα για συνεχή σήματα

Άθροισμα για διακριτά σήματα

Ορισμός συνέλιξης

Ένα σήμα $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός (ολοκλήρωμα) χρονικά μετατοπισμένων κρουστικών παλμών:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι $h(t) = F[\delta(t)]$.

Για ΧΑ σύστημα ισχύει $F[\delta(t-\tau)] = h(t-\tau)$.

Τότε:

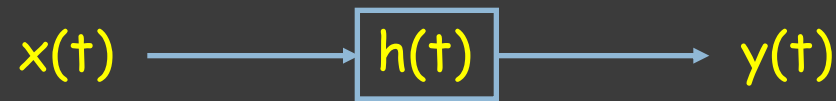
$$y(t) = F[x(t)]$$

$$y(t) = F\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right]$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) F[\delta(t - \tau)] d\tau \quad [F : \text{γραμμικό}]$$

Συνέλιξη $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad [F : \text{ΧΑ}]$

Ορισμός συνέλιξης



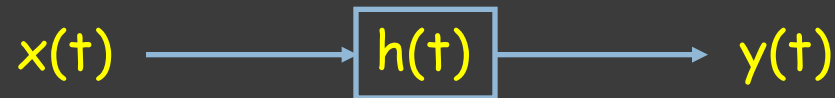
Άρα, η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t)$ σε μία είσοδο $x(t)$ δίνεται ως:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

Για σήματα και συστήματα διακριτού χρόνου:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n - k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n - k) \end{aligned}$$

Υπολογισμός συνέλιξης



1. Υπολογίζουμε την κατοπτρική ως προς το μηδέν της μίας εκ των δύο συναρτήσεων, $x(t)$, $h(t)$.
2. Ολισθαίνουμε την κατοπτρική συνάρτηση κάθε φορά στο εκάστοτε t .
3. Πολλαπλασιάζουμε $x(t)h(t-t)$ (ή $h(t)x(t-t)$) και ολοκληρώνουμε.

Η έξοδος του συστήματος είναι πιο διευρυμένη σε σχέση με την είσοδο και την κρουστική απόκριση.

Εφαρμογή επίδειξης συνελίξεων

John Hopkins University

Συνεχούς χρόνου:

<http://www.jhu.edu/~signals/convolve/index.html>

Διακριτού χρόνου:

<http://www.jhu.edu/~signals/discreteconv2/index.html>

Ιδιότητες συνέλιξης

1. Αντιμεταθετική

$$h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t)$$

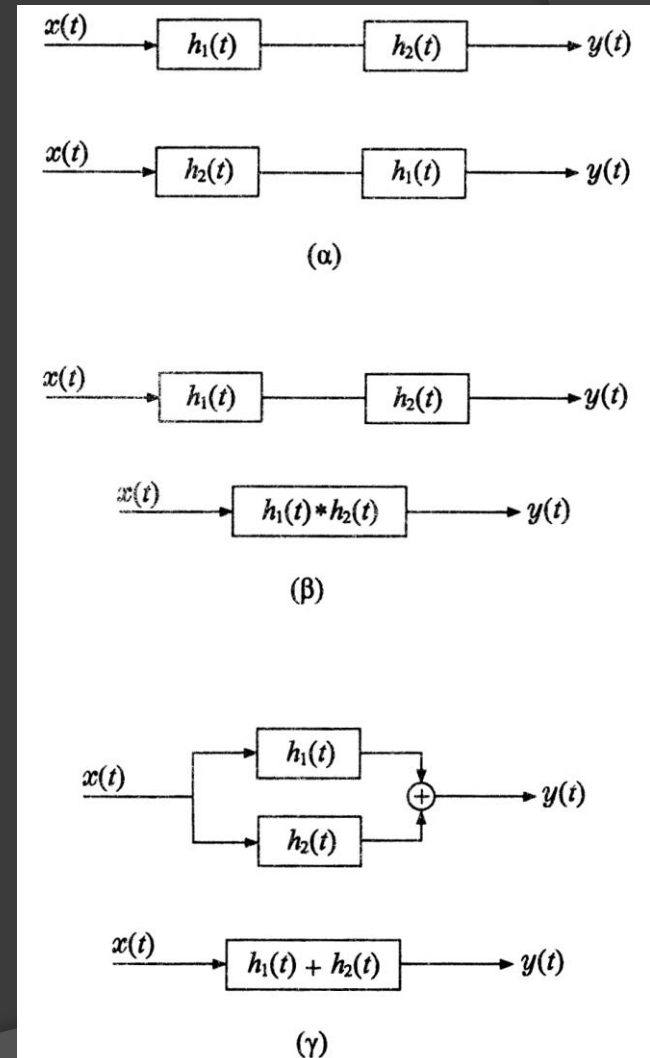
2. Προσεταιριστική

$$\begin{aligned} h_2(t) * [h_1(t) * x(t)] \\ &= [h_2(t) * h_1(t)] * x(t) \\ &= [h_1(t) * h_2(t)] * x(t) \end{aligned}$$

3. Επιμεριστική

$$\begin{aligned} [h_1(t) + h_2(t)] * x(t) \\ &= h_1(t) * x(t) + h_2(t) * x(t) \end{aligned}$$

4. Ταυτοτική $h(t) * \delta(t) = h(t)$



Σχήμα 1.11 Ερμηνεία των ιδιοτήτων της συνέλιξης.

Ευστάθεια συστημάτων

Απαίτηση για ευστάθεια συστημάτων

-> απαίτηση τα εμπλεκόμενα σήματα να παραμένουν πεπερασμένα σε πλάτος

Ευστάθεια φραγμένης εισόδου φραγμένης εξόδου (ΦΕΦΕ)

Ένα σύστημα λέγεται ευσταθές τύπου ΦΕΦΕ, αν και μόνο αν για κάθε φραγμένη είσοδο η έξοδός του παραμένει φραγμένη.

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα ΓΧΑ σύστημα ευσταθές τύπου ΦΕΦΕ είναι η

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad \left(\text{ή} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \right)$$

δηλαδή, η κρουστική του απόκριση να είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη (ή απόλυτα αθροίσιμη).

Απόκριση ΓΧΑΣ σε διεγέρσεις απλής συχνότητας

Ζητούμενο:

υπολογισμός σήματος εξόδου για είσοδο ίση με το μιγαδικό εκθετικό σήμα απλής συχνότητας

$$x(t) = Ae^{j\Omega_0 t}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = A \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\Omega_0(t-\tau)}d\tau \\ &= Ae^{j\Omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\Omega_0 \tau}d\tau = AH(\Omega_0)e^{j\Omega_0 t} \end{aligned}$$

όπου $H(\Omega_0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\Omega_0 \tau}d\tau$ <- Μετασχηματισμός Fourier

η ανεξάρτητη του χρόνου (μιγαδική) ποσότητα

Άρα, το σήμα στην έξοδο είναι το ίδιο το περιοδικό σήμα $e^{j\Omega_0 t}$ αλλά με διαφορετικό πλάτος και φάση.

Απόκριση ΓΧΑΣ σε διεγέρσεις απλής συχνότητας

Το $H(\Omega_0)$ μπορεί να γραφεί ως

$$H(\Omega_0) = |H(\Omega_0)| e^{j\varphi(\Omega_0)}$$

όπου το μέτρο $|H(\Omega_0)|$ και η φάση $\varphi(\Omega_0)$ εξαρτώνται από τη συχνότητα Ω_0 του σήματος εισόδου.

Άρα

$$y(t) = A |H(\Omega_0)| e^{j[\Omega_0 t + \varphi(\Omega_0)]}$$

και το πλάτος της εξόδου είναι $A |H(\Omega_0)|$ και η φάση μετατοπισμένη κατά $\varphi(\Omega_0)$ σε σχέση με αυτή του σήματος εισόδου.

$H(\Omega_0)$: μαθηματικός μετασχηματισμός (που δρα πάνω στην $h(t)$ και δίνει την $H(\Omega)$) υπολογισμένος για $\Omega = \Omega_0$.

Απόκριση ΓΧΑΣ σε διεγέρσεις απλής συχνότητας

Θα μελετήσουμε τρόπους περιγραφής ενός σήματος ως υπέρθεση σημάτων απλών συχνοτήτων.

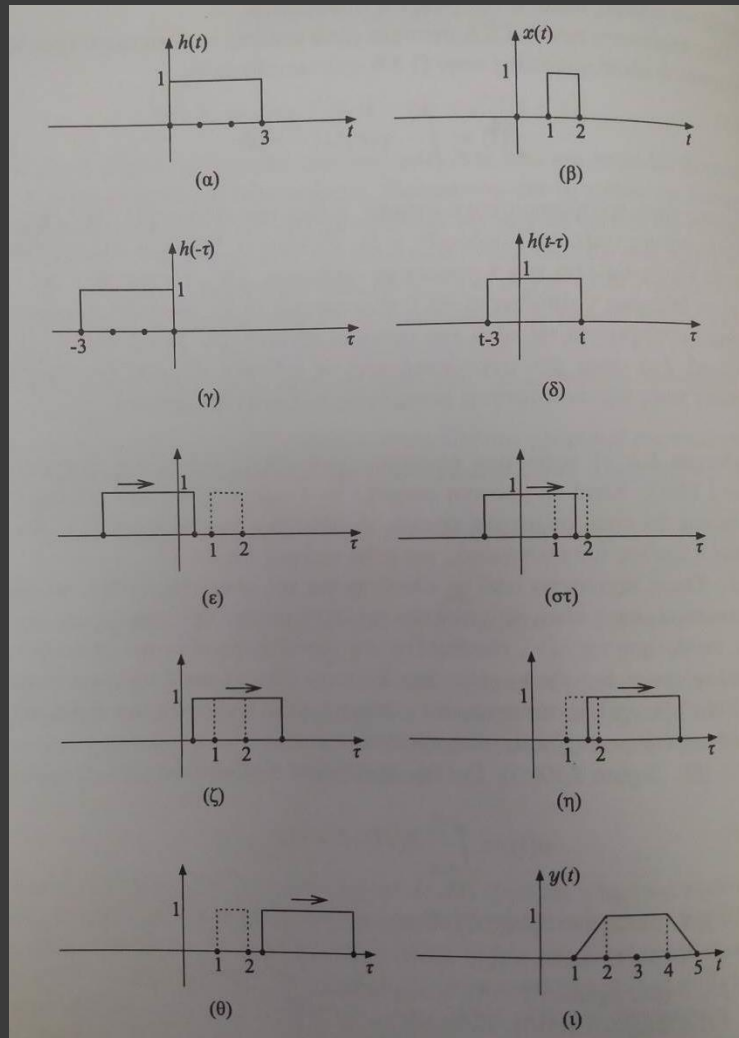
Έξοδος ΓΧΑΣ:

υπέρθεση των ίδιων αυτών σημάτων

έχοντας υπολογίσει την αλλαγή που επιβάλλει το σύστημα στο πλάτος και τη φάση του κάθε σήματος χωριστά

ανάλογα με τη συχνότητά του.

Παράδειγμα



$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

1. $t < 1, y(t) = 0$
2. $1 \leq t \leq 2, y(t) = t - 1$
3. $2 < t \leq 4, y(t) = 1$
4. $4 < t \leq 5, y(t) = 5 - t$
5. $5 < t, y(t) = 0$