

Σήματα και Συστήματα

Μετασχηματισμός Fourier

Εισαγωγή

Σήμα απλής συχνότητας

-> διέρχεται αναλλοίωτο από ένα ΓΧΑ σύστημα

Ζητούμενο: μελέτη μαθηματικών εργαλείων για την ανάλυση ενός σήματος σε σήματα απλών συχνοτήτων

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) -> ανάλυση μιας (σύνθετης) συνάρτησης σε άθροισμα συναρτήσεων απλών συχνοτήτων για τη μελέτη φαινομένων διάδοσης της θερμότητας

Ανάλυση σύνθετης ποσότητας σε απλούστερες συνιστώσες -> ευκολότερη μελέτη ενός προβλήματος

π.χ. στη γραμμική άλγεβρα, ανάλυση διανύσματος στον n -διάστατο χώρο στις n συνιστώσες του (προβολές σε μία ορθοκανονική βάση που παράγει το χώρο)

Μετασχηματισμός Fourier

Έστω συνάρτηση $x(t)$.

Μετασχηματισμός Fourier (MF) της $x(t)$ ορίζεται η μιγαδική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής $X(\Omega)$:

$$X(\Omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

υπό την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα αυτό υπάρχει.

Υπενθύμιση: σήμα εξόδου για είσοδο ίση με το μιγαδικό εκθετικό σήμα απλής συχνότητας: $x(t) = A e^{j\Omega_0 t}$

$$y(t) = A H(\Omega_0) e^{j\Omega_0 t}$$

όπου $H(\Omega_0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\Omega_0 \tau} d\tau$ ← Μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ του ΓΧΑΣ

Μετασχηματισμός Fourier

Να υπολογιστεί ο MF $x(t) \equiv P_{T/2}(t)$
του τετραγωνικού
παλμού του σχήματος $x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases}$

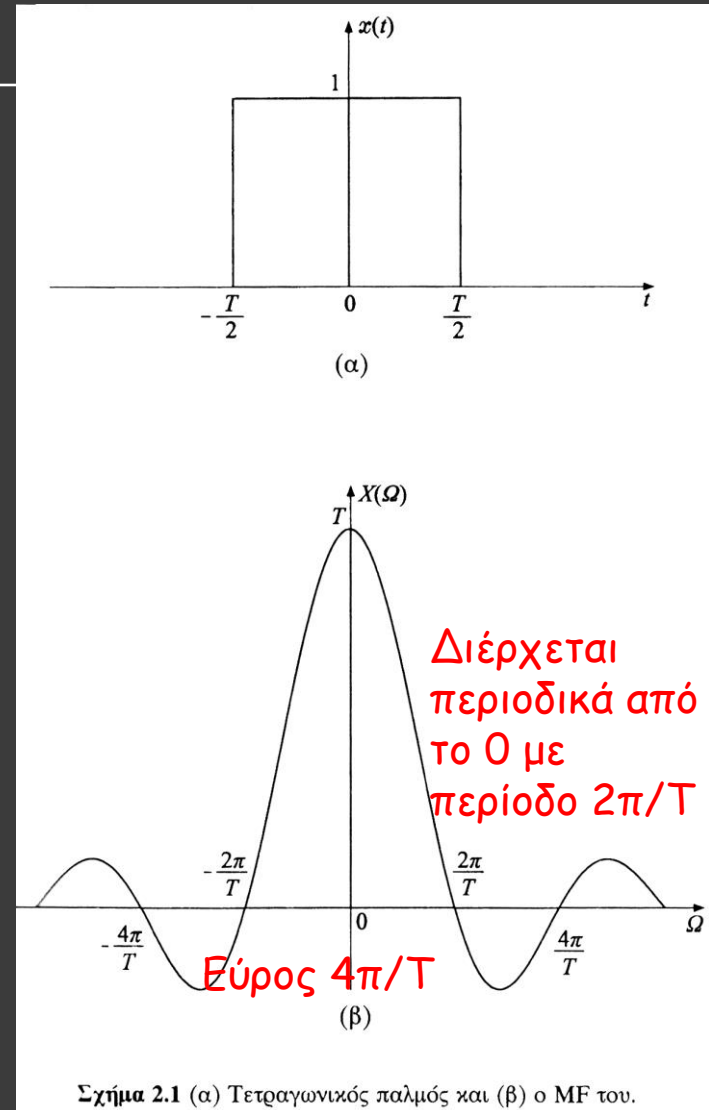
$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\Omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{-j\Omega} e^{-j\Omega t} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{2}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega T}{2}\right) \Rightarrow$$

$$X(\Omega) = T \frac{\sin\left(\frac{\Omega T}{2}\right)}{\frac{\Omega T}{2}} \equiv T \text{Sa}\left(\frac{\Omega T}{2}\right)$$

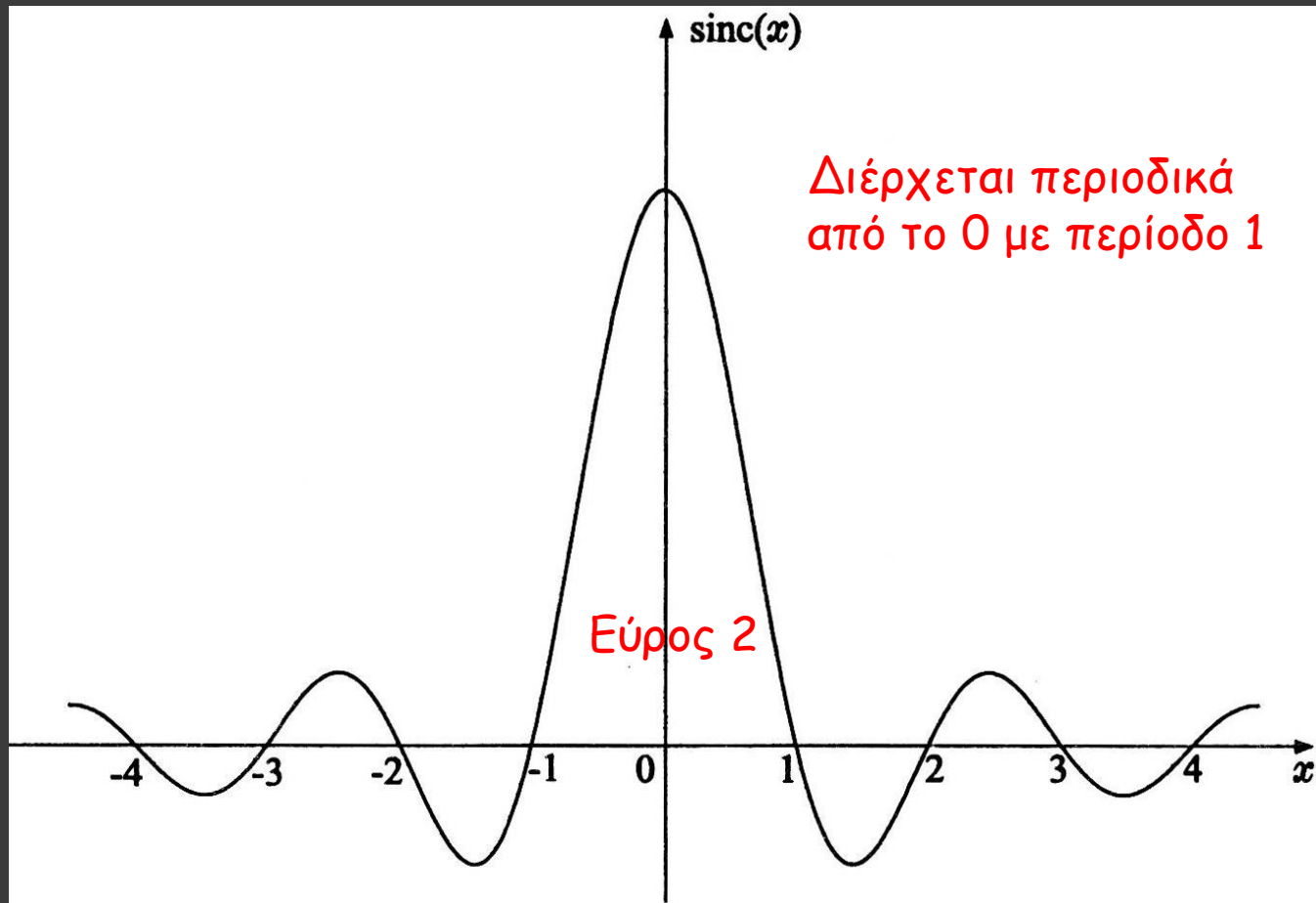
$$\text{Sa}(x) = \frac{\sin x}{x} = \text{sinc}\left(\frac{x}{\pi}\right)$$

$$\text{sinc}(x) \equiv \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad \text{συνάρτηση δειγματοληψίας}$$



Σχήμα 2.1 (α) Τετραγωνικός παλμός και (β) ο MF του.

Μετασχηματισμός Fourier



Σχήμα 2.2 Η συνάρτηση $\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$.

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

Είναι αρκετή η γνώση της $X(\Omega)$ (μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης $x(t)$) για να ανακτήσουμε τη συνάρτηση $x(t)$;

Αν υπάρχει το ολοκλήρωμα:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

τότε κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις:

$$x(t) = \hat{x}(t)$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier $\rightarrow$ αναδεικνύει ότι έχουμε πετύχει να εκφράσουμε το σήμα $x(t)$ ως μία υπέρθεση άπειρων σημάτων απλών συχνοτήτων της μορφής $e^{j\Omega t}$.

Ζεύγος μετασχηματισμού Fourier

Για μη περιοδικά σήματα, αν μας ενδιαφέρει το ανάπτυγμα σε σήματα απλών συχνοτήτων να ισχύει σε όλο τον άξονα των πραγματικών αριθμών, τότε απαιτείται ο μετασχηματισμός Fourier.

$$\begin{aligned} X(\Omega) &\equiv F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt, & -\infty < \Omega < \infty \\ x(t) &\equiv F^{-1}\{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega, & -\infty < t < \infty \end{aligned}$$

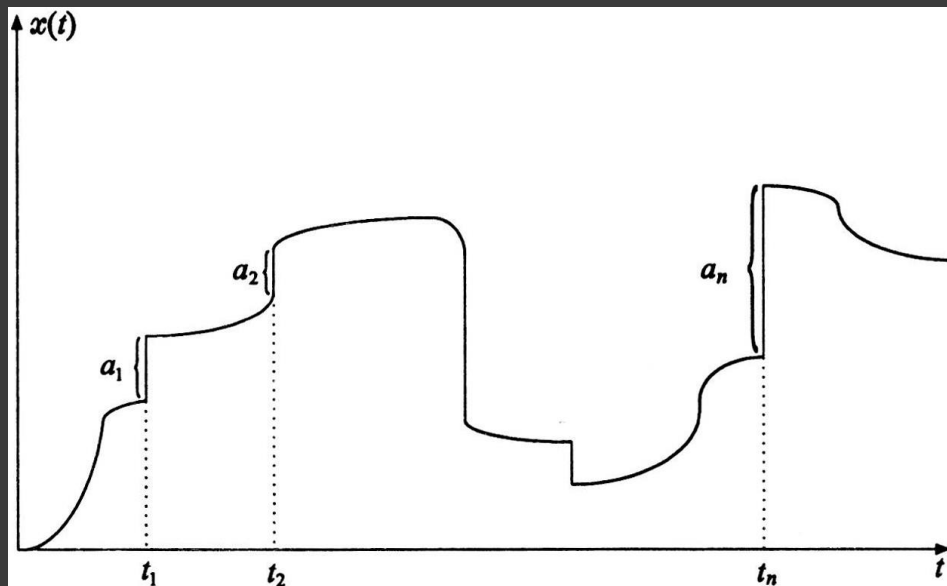
Η ύπαρξη των ολοκληρωμάτων αυτών δεν εξασφαλίζεται πάντα.

Είναι δυνατό να υπάρχει το ένα ολοκλήρωμα και όχι το άλλο.

Συνθήκες Dirichlet

Συνθήκες ικανές για την ύπαρξη του ζεύγους μετασχηματισμών Fourier:

1. Η συνάρτηση (σήμα) $x(t)$ είναι συνεχής ή το πολύ περιέχει πεπερασμένο αριθμό πεπερασμένου ύψους ασυνεχειών.



Σχήμα 2.3 Συνάρτηση με ασυνέχειες πεπερασμένου ύψους.

Συνθήκες Dirichlet

Συνθήκες ικανές για την ύπαρξη του ζεύγους μετασχηματισμών Fourier:

2. Η συνάρτηση $x(t)$ είναι φραγμένης κύμανσης

Συνάρτηση φραγμένης κύμανσης: το μήκος της καμπύλης της στο γράφημα $(t, x(t))$ είναι πεπερασμένο για κάθε πεπερασμένο διάστημα του άξονα t .

Συναρτήσεις που πληρούν τις συνθήκες 1 και 2 είναι γνωστές ως τμηματικά ομαλές.

Συνθήκες Dirichlet

Συνθήκες ικανές για την ύπαρξη του ζεύγους μετασχηματισμών Fourier:

3. Η συνάρτηση $x(t)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, δηλαδή:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Η ικανότητα αυτής της συνθήκης αποδεικνύεται αμέσως από τον ορισμό του ΜF.

$$|X(\Omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Άρα, αν η $x(t)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, ο $X(\Omega)$ υπάρχει. Τότε η $X(\Omega)$ είναι και συνεχής.

Συνθήκες Dirichlet

Οι προηγούμενες συνθήκες δεν είναι αναγκαίες.

π.χ. η $x(t) = \sin(\Omega_0 t) / \pi t$

δεν είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη.

Ο ΜF όμως υπάρχει και είναι

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_0 \\ 0, & |\Omega| > \Omega_0 \end{cases}$$

Παράδειγμα 2.2

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της $x(t)=\delta(t)$

Λύση:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\Omega t} dt = 1$$

$$\text{ή } \delta(t) \leftrightarrow 1$$

το σύμβολο $\leftrightarrow$ δηλώνει ότι οι αντίστοιχες συναρτήσεις αποτελούν ζεύγος Fourier

Παράδειγμα 2.2

αντίστροφος μετασχηματισμός
Fourier:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{j\Omega t} d\Omega$$

η γνωστή σχέση από το προηγούμενο
κεφάλαιο

Ζεύγη ΜF

Πίνακας 2.1 Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμών Fourier	
Σήμα $x(t)$	MF $X(\Omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\Omega)$
$u(t)$	$\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\Omega t_0}$
$e^{j\Omega_0 t}$	$2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$
$\cos \Omega_0 t$	$\pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$
$\sin \Omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\Omega - \Omega_0) - \delta(\Omega + \Omega_0)]$
$\begin{cases} 1, & t < T/2 \\ 0, & t > T/2 \end{cases}$	$T \frac{\sin(\frac{\Omega T}{2})}{\frac{\Omega T}{2}}$
$\frac{\sin \Omega_0 t}{\pi t}$	$\begin{cases} 1, & \Omega < \Omega_0 \\ 0, & \Omega > \Omega_0 \end{cases}$
$e^{-at}u(t), \operatorname{Re}(a) > 0$	$\frac{1}{j\Omega + a}$
$te^{-at}u(t), \operatorname{Re}(a) > 0$	$\frac{1}{(j\Omega + a)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t), \operatorname{Re}(a) > 0$	$\frac{1}{(j\Omega + a)^n}$

Ιδιότητες MF

1. Γραμμικότητα

Αν

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(\Omega)$$

και

$$x_2(t) \leftrightarrow X_2(\Omega)$$

τότε

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \leftrightarrow \alpha X_1(\Omega) + \beta X_2(\Omega)$$

για οποιεσδήποτε σταθερές α και β .

Ιδιότητες MF

2. Χρονική ολίσθηση

Αν

$$x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$$

τότε

$$x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\Omega t_0} X(\Omega), \text{ για κάθε } t_0 \in \mathbb{R}$$

3. Ολίσθηση στη συχνότητα

Αν

$$x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$$

τότε

$$e^{j\Omega_0 t} x(t) \leftrightarrow X(\Omega - \Omega_0)$$

Ιδιότητες MF

Αν $x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$

Τότε $x(t) \cos(\Omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} [X(\Omega - \Omega_0) + X(\Omega + \Omega_0)]$

Λύση:

$$\cos \Omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t})$$

Απ' όπου με χρήση της ιδιότητας ολίσθησης στη συχνότητα προκύπτει το ζητούμενο.

Η παραπάνω ιδιότητα χρησιμοποιείται ευρέως στις τηλεπικοινωνίες:
σήμα $x(t) \rightarrow$ μεταφέρει συγκεκριμένη πληροφορία

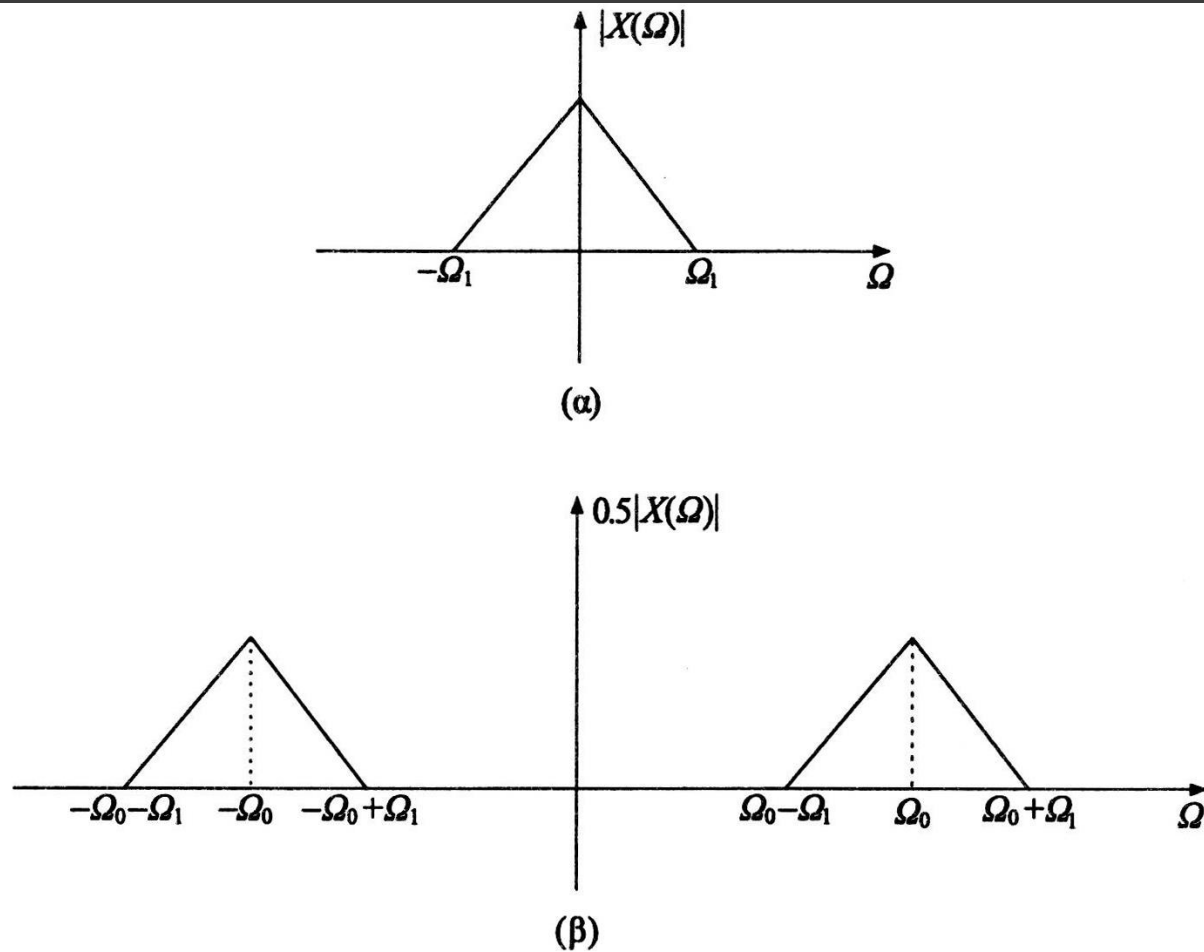
σήμα απλής συχνότητας $\cos(\Omega_0 t) \rightarrow$ "φέρον"

πολλαπλασιασμός τους με σκοπό $\rightarrow$ εκπομπή σήματος σε ένα μέσο μετάδοσης

Διαδικασία γνωστή ως διαμόρφωση.

Πολλαπλασιασμός με φέρον $\rightarrow$ δεν αλλοιώνει τη μορφή του MF $X(\Omega)$,
αλλά μεταφέρει την αρχή των αξόνων στα $\pm \Omega_0$.

Ιδιότητες MF



Σχήμα 2.5 Αποτέλεσμα στο πεδίο συχνοτήτων πολλαπλασιασμού με συνημίτονο (διαμόρφωση) στο πεδίο του χρόνου.

Ιδιότητες MF

Διαμόρφωση → ολίσθηση στις συχνότητες του φάσματος ενός σήματος

Σημαντική στις τηλεπικοινωνίες γιατί:

1. Η παραμόρφωση που προκαλούν τα φυσικά κανάλια (ατμόσφαιρα, ομοαξονικά καλώδια, οπτικές ίνες, κ.τ.λ.) διαφέρει ανάλογα με την περιοχή συχνοτήτων του μεταδιδόμενου σήματος.
2. Η ολίσθηση στις συχνότητες δίνει τη δυνατότητα της ταυτόχρονης μετάδοσης, μέσω του ίδιου φυσικού καναλιού, σημάτων πολλών χρηστών. → Πολυπλεξία

Για να μεταδώσουμε ένα σήμα το διαμορφώνουμε στην κατάλληλη περιοχή συχνοτήτων.

Αντίστροφη διαδικασία στο δέκτη: αποδιαμόρφωση

Ιδιότητες MF

4. Κλιμάκωση στο χρόνο και τη συχνότητα

Αν

$$x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$$

και a μια πραγματική σταθερά, τότε

$$x(at) \leftrightarrow 1/|a| X(\Omega/a)$$

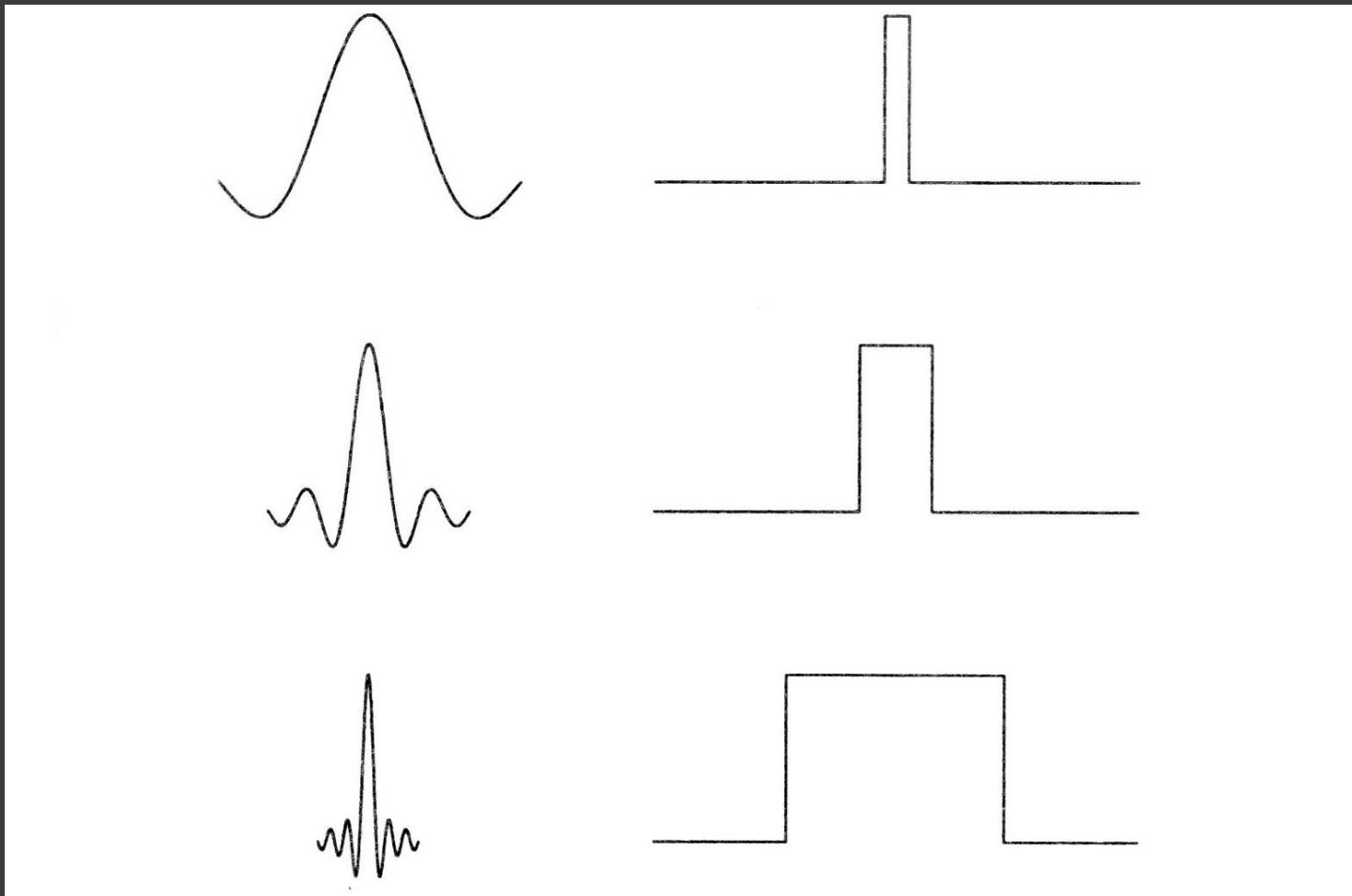
και

$$1/|a| x(t/a) \leftrightarrow X(a\Omega)$$

Φυσική σημασία: αν ο άξονας του χρόνου t διασταλεί ($a < 1$), τότε ο αντίστοιχος άξονας των συχνοτήτων Ω συστέλλεται και αντίστροφα.

Υπενθύμιση: η συχνότητα έχει τη διάσταση του αντίστροφου χρόνου

Ιδιότητες MF



Σχήμα 2.6 Διαστολή του άξονα του χρόνου αντιστοιχεί σε συστολή του άξονα της συχνότητας και αντίστροφα.

Ιδιότητες MF

5. Δυσικότητα του MF

Αν

$$x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$$

τότε

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\Omega)$$

6. Παραγωγή

Αν

$$x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$$

και ο μετασχηματισμός της $d^n x(t)/dt^n$ υπάρχει, τότε

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\Omega)^n X(\Omega)$$

και

$$(-jt)^n x(t) \leftrightarrow \frac{d^n X(\Omega)}{d\Omega^n}$$

Θεώρημα Συνέλιξης

Έχουμε ορίσει τη συνέλιξη δύο συναρτήσεων $x(t)$ και $h(t)$ ως:

$$y(t) \equiv x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Αν $h(t)$ η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος και $x(t)$ η είσοδός του, $y(t)$ είναι το σήμα εξόδου του συστήματος.

Η σχέση που συνδέει τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς Fourier είναι η ακόλουθη

$$y(t) \equiv x(t) * h(t) \leftrightarrow X(\Omega)H(\Omega)$$

όπου $H(\Omega)$, $X(\Omega)$ οι μετασχηματισμοί των $h(t)$ και $x(t)$, αντίστοιχα.

Θεώρημα Συνέλιξης

Ανάλογη σχέση ισχύει και για τη συνέλιξη των μετασχηματισμών Fourier.

Αν δηλαδή

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi} H(\Omega) * X(\Omega) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\phi) X(\Omega - \phi) d\phi$$

Τότε:

$$y(t) \equiv x(t)h(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * H(\Omega)$$

Συνέλιξη $\rightarrow$ υπολογιστικά σύνθετη πράξη

Συνέλιξη μετασχηματιζόμενη κατά Fourier $\rightarrow$ απλό γινόμενο συναρτήσεων

Ειδικές μορφές του μετασχηματισμού Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος είναι μια μιγαδική συνάρτηση, άρα μπορεί να αναπαρασταθεί ως:

$$X(\Omega) = R(\Omega) + jI(\Omega)$$

Αν $x(t)$ πραγματική συνάρτηση, τότε:

$$R(-\Omega) = R(\Omega), \text{ άρτια συνάρτηση}$$

$$I(-\Omega) = -I(\Omega), \text{ περιττή συνάρτηση}$$

$$X(-\Omega) = X^*(\Omega)$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι και αναγκαίες συνθήκες για να είναι το σήμα $x(t)$ πραγματικό.

$$R(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(\Omega t) dt$$

$$I(\Omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(\Omega t) dt$$

Ειδικές μορφές του μετασχηματισμού Fourier

Αν χρησιμοποιήσουμε τις $R(\Omega)$ και $I(\Omega)$ για να ανακτήσουμε το σήμα $x(t)$, προκύπτει ότι:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\Omega) \cos[\Omega t + \phi(\Omega)] d\Omega$$

όπου

$$A(\Omega) = \sqrt{R^2(\Omega) + I^2(\Omega)}$$

$$\phi(\Omega) = \tan^{-1} \left[\frac{I(\Omega)}{R(\Omega)} \right]$$

Άρα, μετασχηματισμός Fourier πραγματικού σήματος

-> ανάπτυγμα του σήματος σε άπειρο πλήθος ημιτονοειδών σημάτων

Ειδικές μορφές του μετασχηματισμού Fourier

Αν $x(t)$ φανταστική συνάρτηση, $x(t) = jy(t)$, όπου $y(t)$ πραγματική, τότε αποδεικνύεται ότι:

$$R(-\Omega) = -R(\Omega)$$

$$I(-\Omega) = I(\Omega)$$

$$X(-\Omega) = -X^*(\Omega)$$

Μετασχηματισμοί Ημιτόνου και Συνημιτόνου

Αν $x(t)$ πραγματική συνάρτηση

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\Omega) \cos(\Omega t) - I(\Omega) \sin(\Omega t)] d\Omega$$

και:

α) $x(t)$ άρτια

$$I(\Omega) = 0$$

και

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R(\Omega) \cos(\Omega t) d\Omega \\ R(\Omega) &= 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos(\Omega t) dt \end{aligned}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier μιας πραγματικής άρτιας συνάρτησης είναι πραγματική και άρτια συνάρτηση.

Μετασχηματισμοί Ημιτόνου και Συνημιτόνου

β) $x(t)$ περιττή

$$R(\Omega) = 0$$

και

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} I(\Omega) \sin(\Omega t) d\Omega \\ I(\Omega) &= -2 \int_0^{\infty} x(t) \sin(\Omega t) dt \end{aligned}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier μιας πραγματικής περιττής συνάρτησης είναι φανταστική συνάρτηση με περιττή συμμετρία.

Θεώρημα Parseval

Έχουμε δει ότι:

$$x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) * X_2(\Omega)$$

Αν πάρουμε τους αντίστοιχους ορισμούς και κάνουμε κάποιες πράξεις, προκύπτει ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_1(\Omega)|^2 d\Omega$$

Το αριστερό μέλος είναι η ολική ενέργεια που παρέχεται από το σήμα.

Η ενέργεια αυτή είναι ίση με $1/2\pi$ επί το εμβαδόν που περικλείει η καμπύλη του τετραγώνου του μέτρου του μετασχηματισμού Fourier του σήματος.

Θεώρημα Parseval

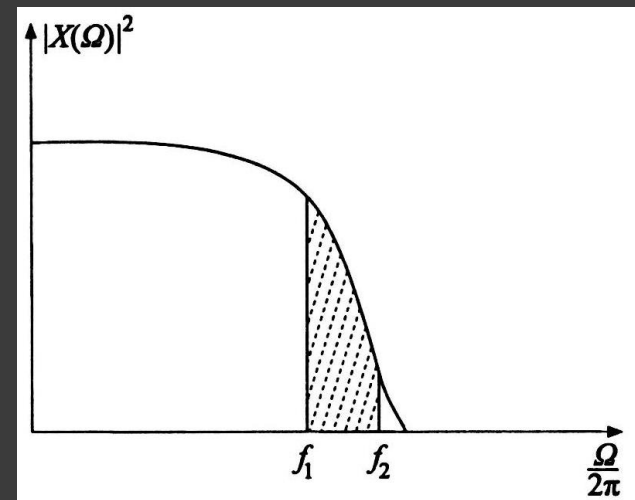
$|X_1(\Omega)|^2 \rightarrow$ εκφράζει την κατανομή της ενέργειας ανά μονάδα συχνότητας

Η στοιχειώδης δηλαδή ενέργεια μεταξύ των συχνοτήτων f και $f + df$ είναι ίση με:

$$dE/df = |X_1(\Omega)|^2$$

Υπολογισμός ενέργειας που συνεισφέρουν στο σήμα οι συχνότητες μεταξύ f_1 και f_2

$\rightarrow$ ολοκλήρωση $|X(\Omega)|^2$ μεταξύ των δύο αυτών συχνοτήτων



Εφαρμογή του μετ. Fourier στη μελέτη γραμμικών συστημάτων

Απόκριση Συχνοτήτων Συστήματος

Από το θεώρημα της συνέλιξης για το μετασχηματισμό Fourier έχουμε:

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) \quad \text{ή} \quad H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier $H(\Omega)$ της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ δίνεται από το πηλίκο των μετασχηματισμών Fourier εξόδου εισόδου.

$H(\Omega)$: συνάρτηση μεταφοράς ή απόκριση συχνοτήτων του συστήματος

Η γνώση της $H(\Omega)$ παρέχει μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier την $h(t)$.

Υπολογισμός $H(\Omega)$: πιο εύκολος από τον απευθείας υπολογισμό της $h(t)$.

Εφαρμογή του μετ. Fourier στη μελέτη γραμμικών συστημάτων

Περιγραφή ΓΧΑ συστημάτων με διαφορικές εξισώσεις και ο μετασχηματισμός Fourier

Σύστημα: η διαδικασία που μετατρέπει μία φυσική ποσότητα που περιγράφεται από το σήμα εισόδου $x(t)$ σε μία άλλη που περιγράφεται από το σήμα εξόδου, $y(t)$.

Διαδικασία μετασχηματισμού φυσικών ποσοτήτων: εκφράζεται με τη βοήθεια μιας διαφορικής εξίσωσης που συσχετίζει τα σήματα εισόδου-εξόδου

ΓΧΑΣ -> η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση είναι γραμμική με σταθερούς συντελεστές

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{l=0}^M \beta_l \frac{d^l x(t)}{dt^l}$$

Εφαρμογή του μετ. Fourier στη μελέτη γραμμικών συστημάτων

Επίλυση διαφορικής εξίσωσης

-> με χρήση του μετασχηματισμού Fourier και της συνάρτησης $H(\Omega)$ του αντίστοιχου συστήματος

Από την ιδιότητα της παραγώγισης έχουμε

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} \leftrightarrow \left[\sum_{k=0}^N \alpha_k (j\Omega)^k \right] Y(\Omega)$$
$$\sum_{l=0}^M \beta_l \frac{d^l x(t)}{dt^l} \leftrightarrow \left[\sum_{l=0}^M \beta_l (j\Omega)^l \right] X(\Omega)$$

και άρα:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{l=0}^M \beta_l (j\Omega)^l}{\sum_{k=0}^N \alpha_k (j\Omega)^k}$$

Εφαρμογή του μετ. Fourier στη μελέτη γραμμικών συστημάτων

Από την $H(\Omega)$ μπορούμε να βρούμε την $h(t)$.

Η $H(\Omega)$ είναι ρητή συνάρτηση.

Για τον υπολογισμό της $h(t)$ χρειάζεται:

1. Ανάλυση σε απλά κλάσματα
2. Χρήση των πινάκων (ζεύγη-ιδιότητες) του μετασχηματισμού Fourier.

Ανάλογες τεχνικές χρησιμοποιούνται και κατά τη μελέτη του μετασχηματισμού Laplace

Εφαρμογή του μετ. Fourier στη μελέτη γραμμικών συστημάτων

Ιδανικό κατωπερατό φίλτρο

Φίλτρο: ένα σύστημα του οποίου η απόκριση συχνοτήτων είναι ακριβώς (ή κατά προσέγγιση) μηδέν σε ορισμένα διαστήματα συχνοτήτων.

Ιδανικό κατωπερατό φίλτρο: το ΓΧΑ σύστημα του οποίου η απόκριση συχνοτήτων ορίζεται ως

$$H(\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega t_0}, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$

όπου t_0 μία σταθερά.

Η συχνότητα Ω_c είναι γνωστή ως συχνότητα αποκοπής.

- Το μέτρο της $H(\Omega)$ είναι 1 ή 0.
- Η φάση της $H(\Omega)$ είναι γραμμική συνάρτηση της συχνότητας

Εφαρμογή του μετ. Fourier στη μελέτη γραμμικών συστημάτων

Αν $x(t)$ είναι η είσοδος στο σύστημα αυτό, τότε για την έξοδο $y(t)$ έχουμε:

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$$

Το ιδανικό κατωπερατό φίλτρο απορροφά τις συχνότητες του φάσματος $X(\Omega)$ που είναι μεγαλύτερες από Ω_c .

Έστω ότι το $x(t)$ αποτελείται από δύο συνιστώσες

$$x(t) = x_e(t) + x_a(t)$$

όπου $x_e(t)$ η επιθυμητή και $x_a(t)$ μια ανεπιθύμητη συνιστώσα (παρεμβολή).

Επίσης, έστω ότι:

$$|X_e(\Omega)|=0, \quad |\Omega|>\Omega_c$$

$$|X_a(\Omega)|=0, \quad |\Omega|<\Omega_c$$

Εφαρμογή του μετ. Fourier στη μελέτη γραμμικών συστημάτων

Η έξοδος του φίλτρου θα είναι:

$$Y(\Omega) = X_{\varepsilon}(\Omega)e^{-j\Omega t_0}$$

ή

$$y(t) = x_{\varepsilon}(t-t_0)$$

Το φίλτρο απορροφά την ανεπιθύμητη παρεμβολή.

Η επίδραση του φίλτρου στην επιθυμητή συνιστώσα είναι απλά μια χρονική καθυστέρηση.

Εφαρμογή του μετ. Fourier στη μελέτη γραμμικών συστημάτων

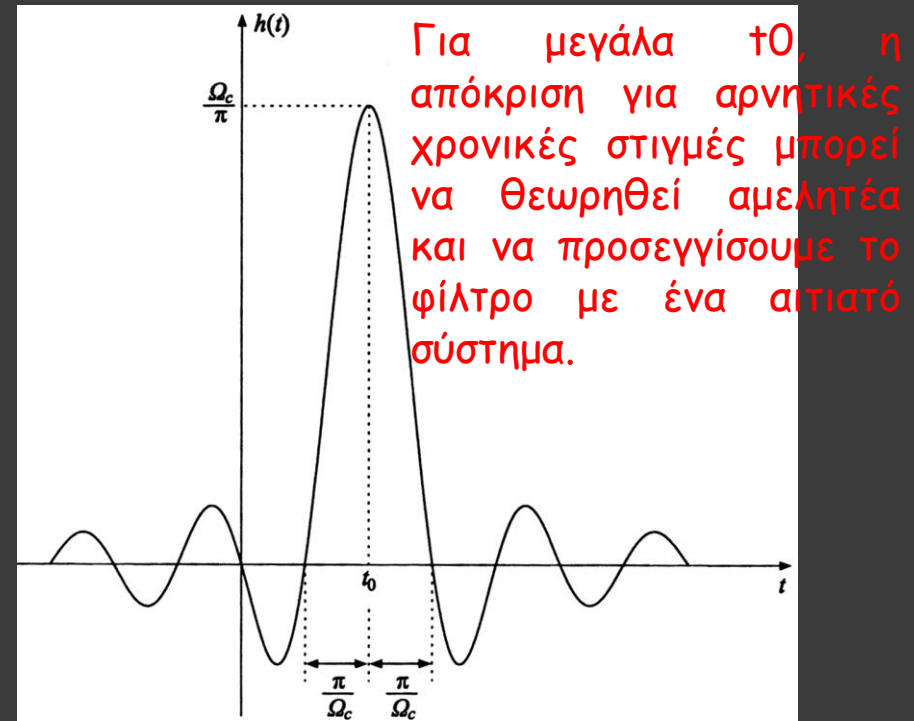
Χαρακτηριστικά της συμπεριφοράς του ιδανικού κατωπερατού φίλτρου στο πεδίο του χρόνου

Κρουστική απόκριση (υπολογισμός μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier):

$$h(t) = \frac{\sin \Omega_c (t - t_0)}{\pi (t - t_0)} = \frac{\Omega_c}{\pi} \text{Sa} [\Omega_c (t - t_0)]$$

Μικρό $\Omega_c \rightarrow$ μεγάλη διάρκεια κρουστικής απόκρισης και αντίστροφα

Μη μηδενική κρουστική απόκριση για αρνητικές χρονικές στιγμές $\rightarrow$ μη αιτιατό φίλτρο (μη πραγματοποιήσιμο)



Σχήμα 2.13 Κρουστική απόκριση ιδανικού κατωπερατού φίλτρου.