

# Σήματα και Συστήματα

---

Σειρά Fourier

# Πότε τη χρησιμοποιούμε;

---

Για μη περιοδικά σήματα: αν μας ενδιαφέρει η ανάλυση σε διάστημα πεπερασμένου εύρους

Αν μας ενδιαφέρει το ανάπτυγμα σε σήματα απλών συχνοτήτων να ισχύει σε όλο τον άξονα των πραγματικών αριθμών, τότε απαιτείται ο μετασχηματισμός *Fourier*.

Για περιοδικά σήματα: ο μετασχηματισμός *Fourier* (γενικά) δεν υπάρχει, αλλά το ανάπτυγμα σε σήματα απλών συχνοτήτων επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της σειράς *Fourier*

# Ορθοκανονικές συναρτήσεις

---

Σειρά Fourier: ανάπτυγμα σε άθροισμα στοιχειωδών συναρτήσεων

Αντιστοιχία με:

ανάπτυγμα διανύσματος στα διανύσματα βάσης που παράγουν τον αντίστοιχο διανυσματικό χώρο

Έστω το σύνολο των συναρτήσεων  $x(t)$  στο διάστημα  $[a,b]$  με καλή συμπεριφορά (συνεχείς ή τμηματικά συνεχείς)

και το υποσύνολο  $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots$  με την ιδιότητα:

$$\int_a^b \phi_i(t) \phi_j^*(t) dt = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Τέτοιες συναρτήσεις  $\phi_n(t)$  ονομάζονται ορθοκανονικές.

# Ορθοκανονικές συναρτήσεις

---

Θεωρούμε μια ακολουθία ορθοκανονικών συναρτήσεων και έστω ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(t)$$

συγκλίνει σε μία συνάρτηση  $x(t)$  στο διάστημα  $[a,b]$ , δηλαδή

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(t), \quad a \leq t \leq b$$

Τότε οι συντελεστές  $a_n$  ικανοποιούν τη σχέση

$$a_n = \int_a^b x(t) \phi_n^*(t) dt$$

# Ορθοκανονικές συναρτήσεις

---

Στο γραμμικό χώρο που αποτελείται από το σύνολο των συναρτήσεων των ορισμένων στο διάστημα  $[a,b]$  και με καλή συμπεριφορά, ορίζουμε την πράξη μεταξύ δύο στοιχείων του  $x(t)$  και  $y(t)$  ως

$$\langle x, y \rangle \equiv \int_a^b x(t) y^*(t) dt$$

Η πράξη αυτή έχει ιδιότητες εσωτερικού γινομένου. Ισχύει:

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0$
2.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
3.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$
4.  $\langle cx, y \rangle = c \langle x, y \rangle, \quad \forall c$

# Ορθοκανονικές συναρτήσεις

Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο καλείται και Ευκλείδειος χώρος.

Σε έναν Ευκλείδειο χώρο το εσωτερικό γινόμενο ορίζει και ένα μέτρο  $\|x\|_2 \equiv \sqrt{\langle x, x \rangle}$

που είναι το μήκος του αντίστοιχου διανύσματος.

Ευκλείδαιοι χώροι: επιτρέπουν άμεση γενίκευση εννοιών και αποτελεσμάτων από την Ευκλείδεια γεωμετρία.

$$\text{π.χ. } \int_a^b \phi_i(t) \phi_j^*(t) dt = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \rightarrow \text{συνθήκη ορθογωνιότητας}$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(t) \quad \rightarrow \text{ανάπτυγμα διανύσματος } x(t) \text{ ως προς τα} \\ \text{διανύσματα } \phi_n(t) \text{ του χώρου}$$

$$a_n = \int_a^b x(t) \phi_n^*(t) dt \quad \rightarrow \text{προβολές του } x(t) \text{ σε κάθε ένα από τα} \\ \text{ορθοκανονικά διανύσματα}$$

# Τριγωνομετρική σειρά Fourier

Έστω  $x(t)$  συνάρτηση στο διάστημα  $[t_0, t_0+T]$  και έστω ότι υπάρχει το ανάπτυγμα:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_0 t) + b_n \sin(n\Omega_0 t)]$$

όπου  $\Omega_0 = 2\pi/T$ .

Ικανές συνθήκες για την ύπαρξη του αναπτύγματος

-> Dirichlet

1.  $x(t)$  συνεχής ή με πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών πεπερασμένου ύψους
2.  $x(t)$  φραγμένης κύμανσης στο διάστημα  $[t_0, t_0+T]$
3.  $x(t)$  απόλυτα ολοκληρώσιμη  $\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| dt < \infty$

# Τριγωνομετρική σειρά Fourier

---

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_0 t) + b_n \sin(n\Omega_0 t)]$$

Τότε ισχύει ότι

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos(n\Omega_0 t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin(n\Omega_0 t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

# Εκθετική σειρά Fourier

Κάτω από τις ίδιες συνθήκες Dirichlet, μία συνάρτηση  $x(t)$ , στο διάστημα  $[t_0, t_0+T]$  αναπτύσσεται σε άθροισμα στοιχειωδών εκθετικών συναρτήσεων

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t}$$

Στοιχειώδη περιοδικά μιγαδικά εκθετικά σήματα συνδυάζονται γραμμικά και «παράγουν» πιο πολύπλοκα περιοδικά σήματα.

όπου  $\Omega_0 = 2\pi/T$  και

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jn\Omega_0 t} dt$$

Υπολογισμός συντελεστών σειράς Fourier,  $c_n$ : υποδεικνύει με ποιο τρόπο πολύπλοκα περιοδικά σήματα μπορούν να αναλυθούν σε γραμμικό συνδυασμό στοιχειωδών περιοδικών σημάτων.

$c_n$ : μοναδική περιγραφή του  $x(t)$  στο πεδίο των συχνοτήτων (γιατί διαφορετικά  $x(t)$  οδηγούν σε διαφορετικά σύνολα συντελεστών Fourier)

# Εκθετική σειρά Fourier

Από τη σχέση Euler που συνδέει την εκθετική με την τριγωνομετρική σειρά, προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις ανάμεσα στα  $a_n$ ,  $b_n$  και  $c_n$ :

$$\begin{aligned}a_0 &= c_0 \\a_n &= c_n + c_{-n} \\b_n &= j(c_n - c_{-n}) \\c_n &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Για πραγματικές  $x(t)$  (δηλαδή για  $a_n$  και  $b_n$  πραγματικά), προκύπτει

$$c_n^* = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = c_{-n}$$

το οποίο είναι αντίστοιχο αυτού που ισχύει για το μετασχηματισμό Fourier,  $X^*(\Omega) = X(-\Omega)$ .

# Σειρές Fourier περιοδικών συναρτήσεων

---

Ορίσαμε το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier μιας συνάρτησης  $x(t)$  σε ένα διάστημα  $[a,b]$ .

Έξω από αυτό το διάστημα η σειρά δε συγκλίνει απαραίτητα στο  $x(t)$ , δεδομένου ότι η ορθογωνιότητα των συναρτήσεων του αναπτύγματος ισχύει στο συγκεκριμένο διάστημα.

Έστω συνάρτηση περιοδική με περίοδο  $T$

$$x(t) = x(t + T)$$

Το ανάπτυγμα Fourier της  $x(t)$  σε διάστημα μήκους  $T$  ίσο με την περίοδο είναι

$$x(t) = \sum_n c_n e^{jn\Omega_0 t}, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Αλλά  $e^{jn\Omega_0 t} = e^{jn\Omega_0(t+T)}$  δηλαδή η σειρά Fourier είναι επίσης περιοδική με την ίδια περίοδο  $T$ , και άρα συγκλίνει σε όλο το διάστημα  $-\infty < t < \infty$ . Το ίδιο ισχύει και για την τριγωνομετρική σειρά.

# Σειρές Fourier περιοδικών συναρτήσεων

Άρα, αν  $x(t) = x(t + T)$ , τότε για  $-\infty < t < \infty$  ισχύει:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn \frac{2\pi}{T} t}$$

ή ισοδύναμα

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos(n \frac{2\pi}{T} t) + b_n \sin(n \frac{2\pi}{T} t) \right)$$

όπου

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos(n \Omega_0 t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin(n \Omega_0 t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jn \Omega_0 t} dt$$

# Σειρές Fourier περιοδικών συναρτήσεων

---

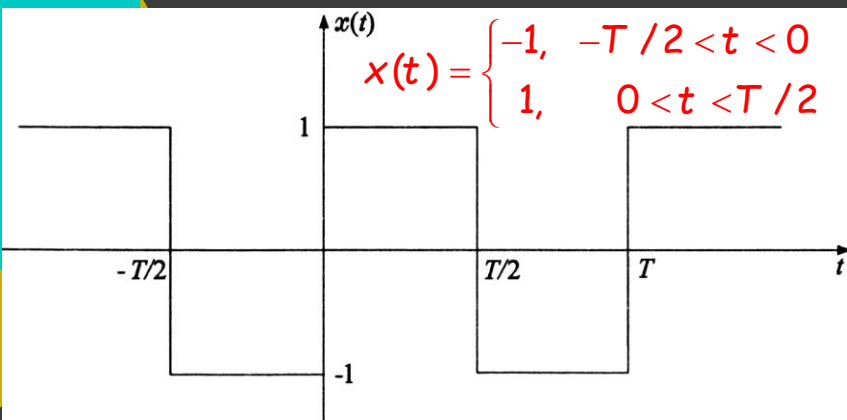
Το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης είναι ανεξάρτητο του  $t_0$ .

Αρκεί το διάστημα ολοκλήρωσης να καλύπτει μια περίοδο.

Συχνότητες ημιτόνων, συνημιτόνων: ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας  $\Omega_0 = 2\pi/T$

-> συχνότητες γνωστές ως αρμονικές του περιοδικού σήματος

# Σειρές Fourier περιοδικών συναρτήσεων

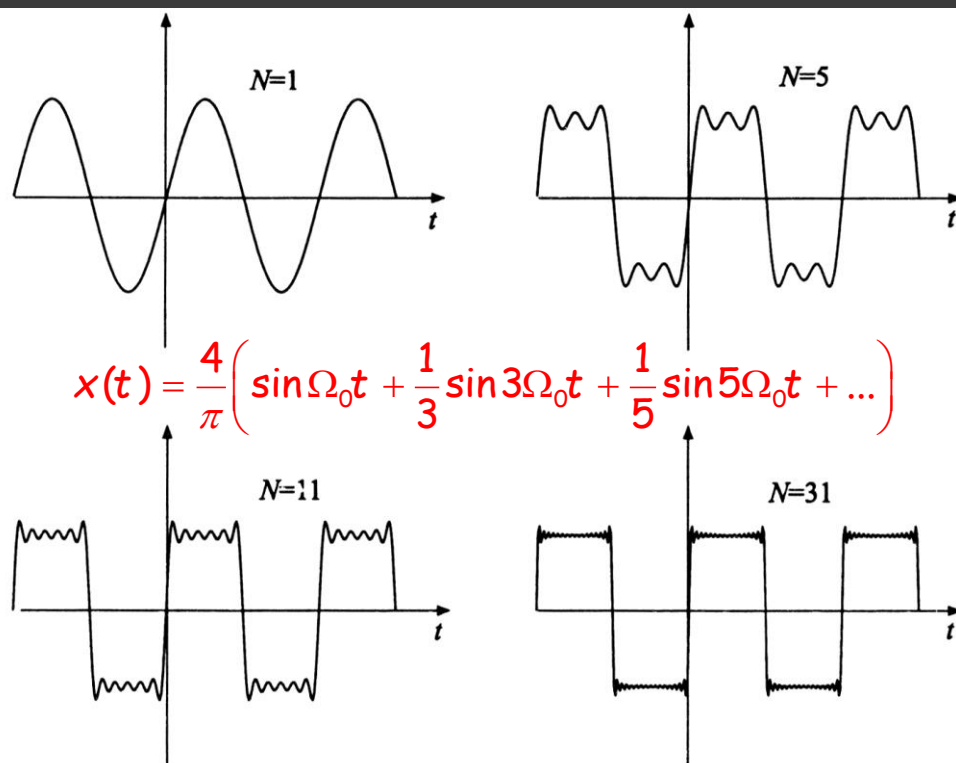


Σχήμα 2.14 Η περιοδική συνάρτηση του Παραδείγματος 2.15.

Ταλαντώσεις στα σημεία ασυνέχειας (φαινόμενο Gibbs)

Καλύτερη προσέγγιση όσο αυξάνει το N

Οι ταλαντώσεις θα πάνε να εμφανίζονται όταν αθροιστούν άπειρες αρμονικές.



Σχήμα 2.15 Το άθροισμα των  $N = 1, 5, 11, 31$  πρώτων αρμονικών του σήματος του Παραδείγματος 2.15.

# Σειρά Fourier για άρτια και περιττή συμμετρία

---

Έστω  $x(t)$ ,  $t \in [-T/2, T/2]$ .

1.  $x(-t) = x(t)$ : άρτια

$$b_n = 0, n = 1, 2, \dots$$

$$c_n = c_{-n}$$

2.  $x(-t) = -x(t)$ : περιττή

$$a_n = 0, n = 1, 2, \dots$$

$$c_n = -c_{-n}$$

# Θεώρημα Parseval

Έστω  $x(t)$  ορισμένη στο  $[-T/2, T/2]$  ή περιοδική με περίοδο  $T$ .

Αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Αν  $x(t)$  πραγματική συνάρτηση,

$c_n^* = c_{-n}$  και άρα  $|c_{-n}| = |c_n|$  (φάσμα ισχύος συμμετρικό)

και το Θεώρημα γράφεται επίσης σαν

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = c_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

# Θεώρημα Parseval

---

Για περιοδικά σήματα, δεν έχει νόημα η ενέργεια (αντίστοιχο Θεώρημα του μετασχηματισμού Fourier)

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

αφού το ολοκλήρωμα απειρίζεται.

Έχει νόημα η έννοια της μέσης ισχύος, που ορίζεται ως η μέση ενέργεια ανά μονάδα χρόνου.

Η μέση ισχύς για ένα περιοδικό σήμα ισούται με

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

όπου  $T$  η περίοδος.

# Θεώρημα Parseval

Άρα από το Θεώρημα του Parseval  $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$

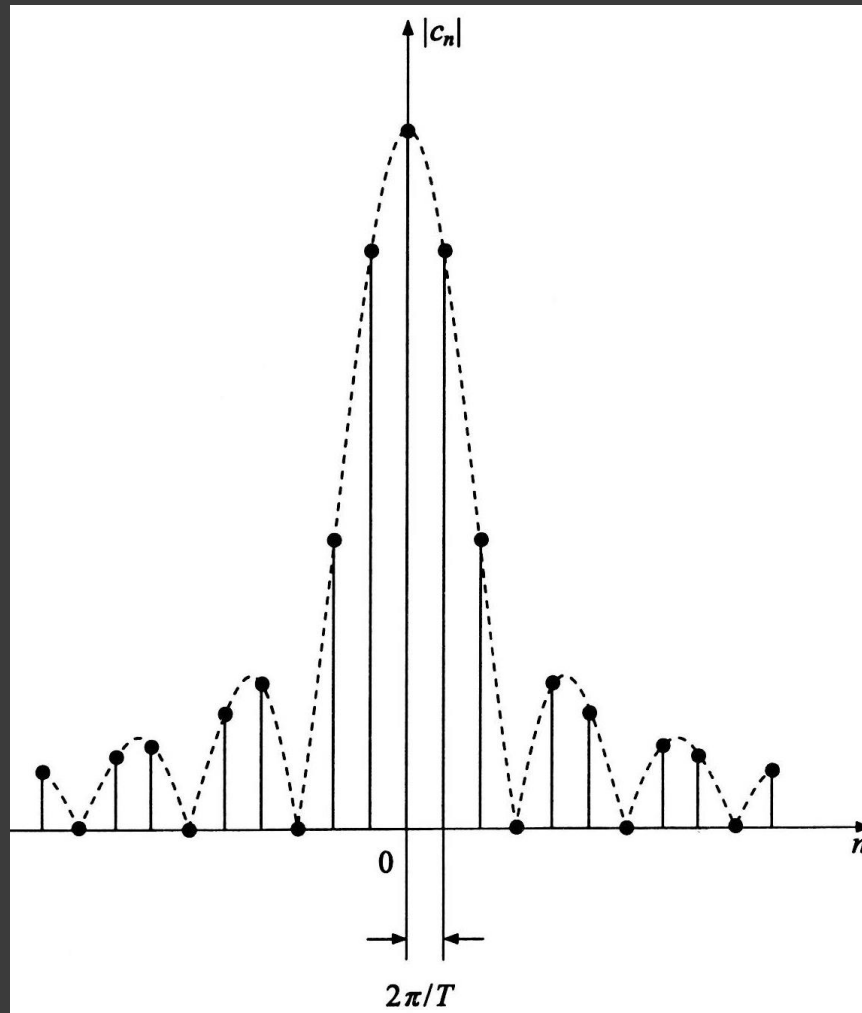
προκύπτει ότι η μέση ισχύς του σήματος  $x(t)$  ισούται με το άθροισμα της μέσης ισχύος καθεμιάς των αρμονικών.

Ακολουθία  $|c_n|^2$  (φασματική πυκνότητα ισχύος): υποδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο κατανέμεται η ισχύς του  $x(t)$  στις συνιστώσες συχνότητες

π.χ. αν  $|c_i|^2$  μεγάλο  $\rightarrow$  η αντίστοιχη συχνότητα κατέχει σημαντικό ποσό της ισχύος του σήματος

Επίσης, η φασματική πυκνότητα ισχύος (ή φάσμα ισχύος ή φάσμα) απαρτίζεται από διακριτές τιμές και είναι γνωστό ως φάσμα γραμμών.

# Θεώρημα Parseval



Σχήμα 2.17 Φάσμα γραμμών περιοδικού σήματος.

# Σχέση σειράς Fourier με το μετασχηματισμό Fourier

Σειρά Fourier: ορίστηκε σε διάστημα εύρους  $T$  ή σε όλο το σύνολο των πραγματικών για μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο  $T$ , ως:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$$

Έστω ότι το διάστημα  $T$  αυξάνει συνεχώς, δηλ.  $T \rightarrow \infty$  (μας ενδιαφέρει το ανάπτυγμα της συνάρτησης σε όλο τον άξονα των πραγματικών αριθμών).

Τότε, απόσταση μεταξύ αρμονικών  $\rightarrow 0$  (το φάσμα γίνεται συνεχές). Ορίζουμε

$$2\pi/T = \Delta\Omega, \quad \Delta\Omega \rightarrow 0$$

και

$$2\pi n/T = \Omega$$

# Σχέση σειράς Fourier με το μετασχηματισμό Fourier

Οι συντελεστές  $c_n$  για το διάστημα  $[-T/2, T/2]$  δίνονται από τη σχέση:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt$$

Για  $T \rightarrow \infty$ , έχουμε:

$$2\pi \frac{c_n}{\Delta\Omega} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt = X(\Omega)$$

Με ανάλογο τρόπο προκύπτει:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\Omega 2\pi \frac{c_n}{\Delta\Omega} e^{j\Omega t} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

Στο όριο δηλαδή  $T \rightarrow \infty$ , ανακτούμε το ζεύγος του μετασχηματισμού Fourier.