

Σήματα και Συστήματα

Μετασχηματισμός Laplace

Pierre-Simon Laplace

23/4/1749 – 5/3/1827
Beaumont-en-Auge - Paris
Normandy





Εισαγωγή

Μετασχηματισμός Laplace

- Διευρύνει την κλάση των συναρτήσεων για τις οποίες μπορεί να επιτευχθεί μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας.
- Παρέχει τη δυνατότητα μελέτης συστημάτων που δεν βρίσκονται σε αρχική κατάσταση ηρεμίας. (Οι αρχικές συνθήκες ενσωματώνονται κατάλληλα στη μελέτη του συστήματος.)
- Η θεωρία γραμμικών συστημάτων εμπλουτίζεται, αλλά και απλοποιείται ταυτόχρονα, με τη χρήση του μιγαδικού πεδίου συχνότητας, την εισαγωγή πόλων και μηδενικών, κ.τ.λ.
- Παρέχει τη δυνατότητα επίλυσης διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές.

Εισαγωγή

Μετασχηματισμοί Laplace και Fourier: ειδικές περιπτώσεις γενικευμένων γραμμικών ολοκληρωτικών μετασχηματισμών (ΓΓΟΜ).

Στόχος ΓΓΟΜ: επίτευξη συγκεκριμένου τύπου αντιστοίχισης μεταξύ δύο συναρτήσεων με ταυτόχρονη εξασφάλιση της μοναδικότητας στην αντιστοίχιση αυτή.

ΓΓΟΜ συνάρτησης $x(t)$:
$$X(s) = \int_a^{\infty} x(t)k(s,t)dt$$

Η συνάρτηση $x(\cdot)$ με όρισμα t μετατρέπεται σε μια άλλη συνάρτηση $X(\cdot)$ μιας νέας μεταβλητής s .

Επιλογή a (κάτω όριο ολοκλήρωσης), $k(s,t)$ (πυρήνας μετασχηματισμού) $\rightarrow$ καθορίζει το ΓΓΟΜ που είναι κατάλληλος για μια ορισμένη κατηγορία προβλημάτων.

Εισαγωγή

Για να υπάρχει αυτός ο μετασχηματισμός πρέπει το ολοκλήρωμα

$$X(s) = \int_a^{\infty} x(t)k(s,t)dt$$

να συγκλίνει.

Αν για συγκεκριμένα $x(t)$, a , $k(s,t)$ το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει, ο αντίστοιχος μετασχηματισμός για τη $x(t)$ δεν ορίζεται.

Μετασχηματισμός Fourier: $X(\Omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$

ειδική περίπτωση ΓΓΟΜ, για $k(s,t) = e^{-jst}$, $s = \Omega$ και $a = -\infty$.

Μετασχηματισμός Laplace - Ορισμός

Για $k(s,t) = e^{-st}$, όπου s μιγαδική μεταβλητή και $a = 0$,
μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Για $a = -\infty$, ορίζεται ο αμφίπλευρος μετασχηματισμός Laplace:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Στη γενική περίπτωση, $s = \sigma + j\Omega$.

Για $\sigma = 0$, ο ορισμός του αμφίπλευρου μετασχηματισμού Laplace συμπίπτει με το μετασχηματισμό Fourier (αν αυτός υπάρχει).

Μετασχηματισμός Laplace

Αντικαθιστώντας την s στον ορισμό του αμφίπλευρου μετασχηματισμού Laplace, προκύπτει:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\Omega t} dt \equiv L\{x(t)\}$$

το οποίο μπορεί να ερμηνευτεί και ως ο μετασχηματισμός Fourier της $x(t)e^{-\sigma t}$.

Λόγω αυτής της σχέσης με το MF, s : μιγαδική συχνότητα

Παράγοντας $e^{-\sigma t}$: παρέχει τη δυνατότητα σύγκλισης του παραπάνω ολοκληρώματος και άρα ύπαρξης του ML, ακόμα κι όταν ο MF της $x(t)$ δεν υπάρχει.

Μονόπλευρος vs. αμφίπλευρος μετασχηματισμός Laplace

Αν δύο συναρτήσεις είναι διαφορετικές για $t < 0$ και ίδιες για $t \geq 0$, έχουν ίδιο μονόπλευρο ML , αλλά διαφορετικό αμφίπλευρο.

Αν $x(t) = 0$ για $t < 0$, οι δύο ορισμοί συμπίπτουν.

Μονόπλευρος ML

- παρέχει τη δυνατότητα μελέτης συστημάτων που δεν βρίσκονται σε αρχική κατάσταση ηρεμίας
- παρέχει τη δυνατότητα επίλυσης γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές και με ενσωμάτωση μη μηδενικών αρχικών συνθηκών
- πιο φυσική η χρήση του στη μελέτη αιτιατών συστημάτων, όπου η κρουστική απόκρισή τους, $h(t) = 0$, για $t < 0$

Μονόπλευρος ML

Ορισμός

Μια συνάρτηση $x(t)$ είναι εκθετικής τάξης a (ή απλώς εκθετικής τάξης), αν υπάρχουν δύο σταθερές $M > 0$ και a , και μια ορισμένη τιμή t_0 του t , τέτοιες ώστε να ισχύει:

$$|e^{-at}x(t)| < M \text{ ή } |x(t)| < Me^{at} \text{ για } t \geq t_0$$

Παραδείγματα

1. $x(t) = e^{ct}\cos(\Omega t)$

είναι εκθετικής τάξης c , γιατί $|e^{ct}\cos(\Omega t)| \leq e^{ct}$ για $t > 0$

2. $x(t) = e^{t^2}$

δεν είναι εκθετικής τάξης, γιατί $|e^{-at}e^{t^2}| = e^{t^2-at}$ δεν φράσσεται από καμία θετική σταθερά

Μονόπλευρος ΜΛ

Θεώρημα ύπαρξης του ΜΛ

Αν η συνάρτηση $x(t)$ είναι (α) τμηματικά συνεχής σε ένα πεπερασμένο διάστημα $0 \leq t \leq b$ και (β) εκθετικής τάξης a για $t > b$, τότε ο ΜΛ της $x(t)$ υπάρχει για $\text{Re}(s) > a$.

Οι συνθήκες του θεωρήματος είναι μόνο ικανές.

Χρήσιμα ζεύγη ΜΛ

Πίνακας 3.1 Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμών Laplace

Σήμα $x(t)$	ML $X(s)$	ΠΣ
$\delta(t)$	1	$\text{Re}(s) > -\infty$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}(s) > 0$
$\frac{d^n \delta(t)}{dt^n}$	s^n	$\text{Re}(s) > -\infty$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}(s) > -a$
$e^{+at}u(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\text{Re}(s) > a$
$e^{j\Omega_0 t}u(t)$	$\frac{1}{s-j\Omega_0}$	$\text{Re}(s) > 0$
$\cos(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\Omega_0^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
$\sin(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{\Omega_0}{s^2+\Omega_0^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
$e^{-at} \cos(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\Omega_0^2}$	$\text{Re}(s) > -a$
$e^{-at} \sin(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{\Omega_0}{(s+a)^2+\Omega_0^2}$	$\text{Re}(s) > -a$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\text{Re}(s) > 0$
$e^{-at} t^n u(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\text{Re}(s) > -a$
$t \cos(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{s^2-\Omega_0^2}{(s^2+\Omega_0^2)^2}$	$\text{Re}(s) > 0$

Σύγκλιση ML

Περιοχή σύγκλισης ML: η περιοχή του επιπέδου s (μιγαδικό επίπεδο) στην οποία υπάρχει ο ML της αντίστοιχης συνάρτησης

ML: μιγαδική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής s

$X(s)$ αναλυτική στο σημείο $s = s_0$: αν είναι παραγωγίσιμη στο s_0 και σε όλα τα σημεία της περιοχής γύρω από αυτό

$X(s)$ αναλυτική στην περιοχή R_A του μιγαδικού επιπέδου: αν είναι αναλυτική σε κάθε σημείο s της R_A

Σημείο ανωμαλίας: σημείο s_0 για το οποίο η $X(s)$ δεν είναι αναλυτική, αλλά είναι αναλυτική σε κάποιο σημείο σε κάθε γειτονιά του s_0

Μεμονωμένο ανώμαλο: σημείο s_0 για το οποίο η $X(s)$ δεν είναι αναλυτική, αλλά είναι αναλυτική οπουδήποτε αλλού σε μια περιοχή

Σύγκλιση ML

Αν η $X(s)$ μπορεί να γραφεί σε μορφή ρητής συνάρτησης, δηλαδή ως λόγος δύο πολυωνύμων του s

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

τότε

πόλοι της $X(s)$: οι ρίζες του $D(s)$ (μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $X(s)$)

μηδενικά της $X(s)$: οι ρίζες του $N(s)$ (στα σημεία αυτά η $X(s)$ μηδενίζεται)

π.χ. ο ML της $x(t) = e^{-at}$, $a > 0$, που είναι $X(s) = 1/(s+a)$, έχει έναν πόλο στο σημείο $s_0 = -a$

Σύγκλιση ML

Πόλοι στο αριστερό ημιεπίπεδο του s : αντιστοιχούν σε σήματα στο πεδίο του χρόνου πολλαπλασιασμένα με e^{-at} , $a > 0$

Πόλοι στο δεξιό ημιεπίπεδο του s : αντιστοιχούν σε σήματα στο πεδίο του χρόνου πολλαπλασιασμένα με e^{at} , $a > 0$

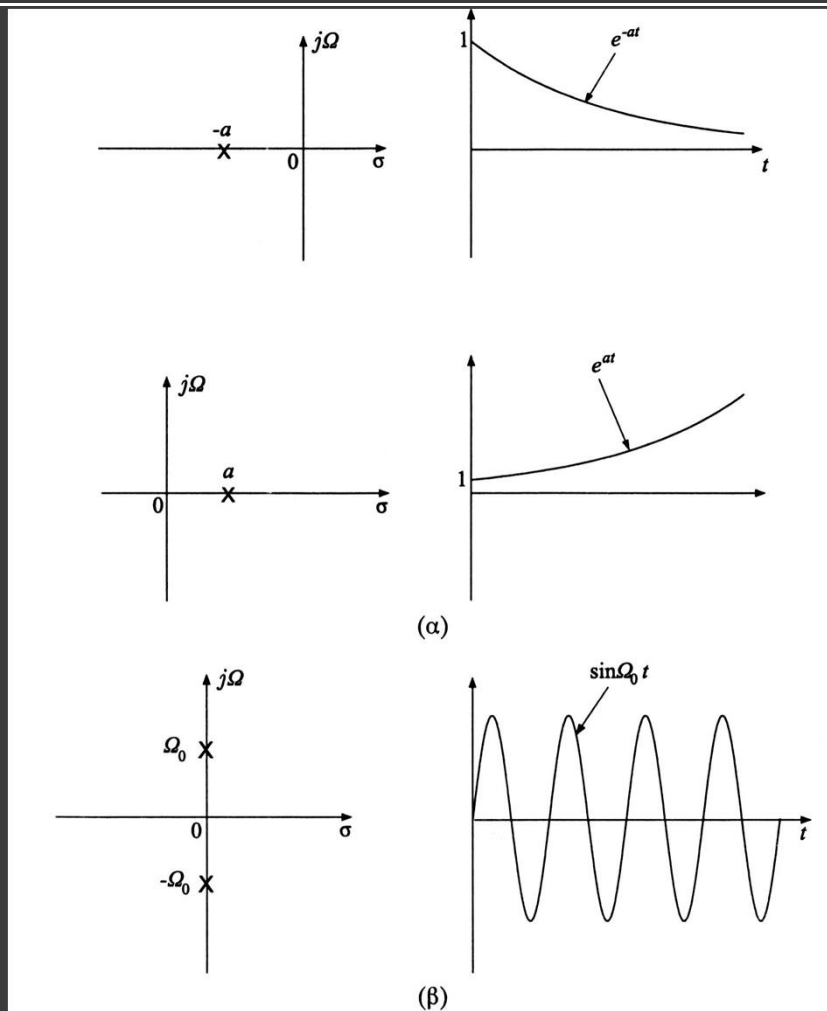
Απλοί πόλοι στο φανταστικό άξονα: αντιστοιχούν σε σήματα των οποίων το πλάτος ούτε αυξάνεται ούτε μειώνεται σε σχέση με το χρόνο

Πολλαπλοί πόλοι στο φανταστικό άξονα: αντιστοιχούν σε σήματα πολλαπλασιασμένα με δυνάμεις του t

Μιγαδικοί συζυγείς πόλοι: αντιστοιχούν σε συναρτήσεις που υφίστανται ταλάντωση (περιέχουν ημιτονοειδείς όρους)

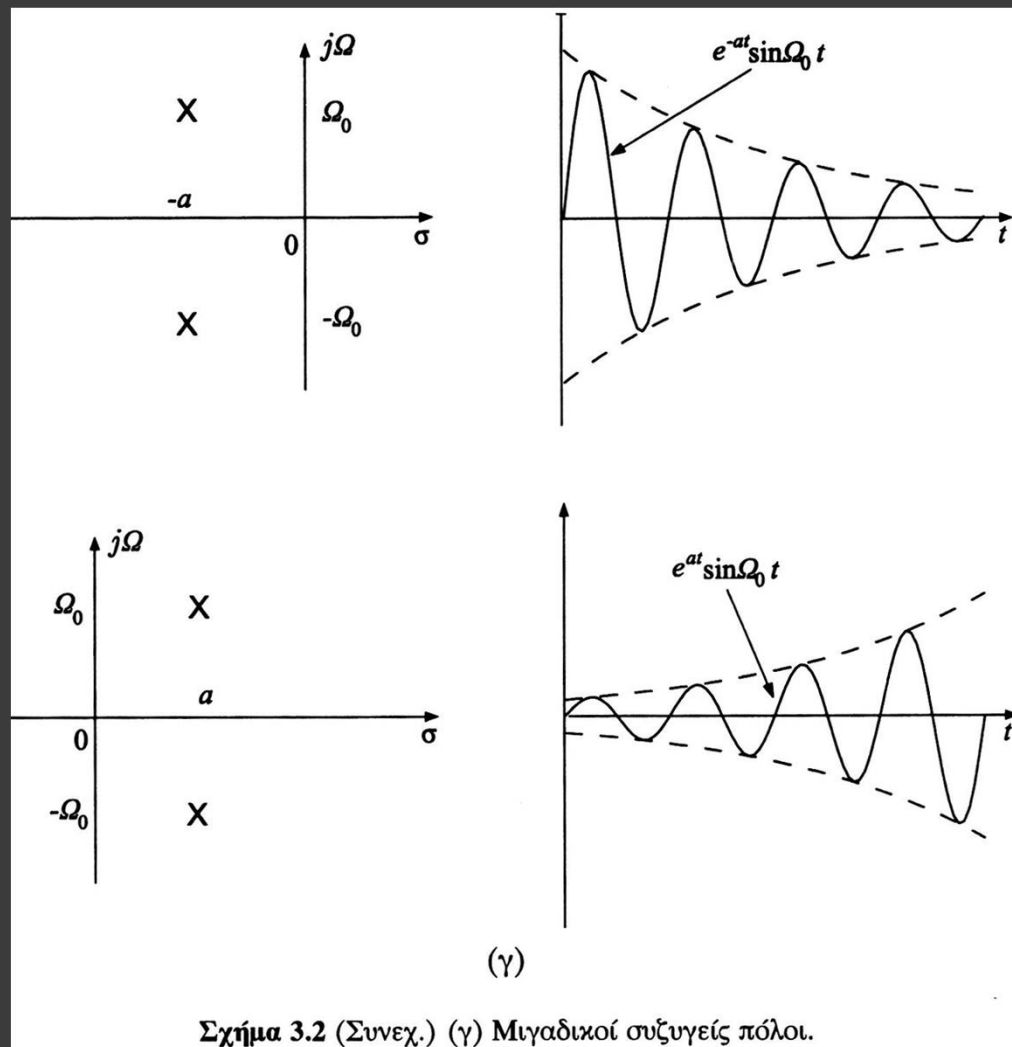
Η περιοχή σύγκλισης του ML μιας συνάρτησης δεν περιλαμβάνει πόλους.

Σύγκλιση ML



Σχήμα 3.2 Σχέση μεταξύ της θέσης των πόλων στο επίπεδο s και της μορφής του σήματος στο πεδίο του χρόνου. (α) Ένας πραγματικός πόλος. (β) Δύο συζυγείς φανταστικοί πόλοι.

Σύγκλιση ML



Ιδιότητες και Θεωρήματα ΜΛ

1. Γραμμικότητα

Αν $x_1(t) \leftrightarrow X_1(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_1$

και $x_2(t) \leftrightarrow X_2(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_2$

τότε

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \leftrightarrow a_1 X_1(s) + a_2 X_2(s), \operatorname{Re}(s) > \max(\sigma_1, \sigma_2)$$

$\operatorname{Re}(s) > \max(\sigma_1, \sigma_2)$: τομή των επιμέρους περιοχών σύγκλισης των $X_1(s)$ και $X_2(s)$

Αυτή η περιοχή σύγκλισης πρέπει να ληφθεί ως η ελάχιστη, καθώς στην πραγματικότητα μπορεί να είναι μεγαλύτερη.

π.χ. για $a_1 = a_2 = 1$, $X_1(s) = s/(s-1)$, $\operatorname{Re}(s) > 1$, και $X_2(s) = -1/(s-1)$, $\operatorname{Re}(s) > 1$

$$a_1 X_1(s) + a_2 X_2(s) = 1, \text{ με περιοχή σύγκλισης } \operatorname{Re}(s) > -\infty$$

Ιδιότητες και Θεωρήματα ΜΛ

2. Χρονική ολίσθηση

Αν $x(t)u(t) \leftrightarrow X(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$

τότε για $t_0 > 0$

$$x(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0}X(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$$

Η παρουσία της $u(t)$ στην παραπάνω ιδιότητα είναι απαραίτητη (όταν $t_0 > 0$), γιατί δεν αναφερόμαστε αναγκαστικά σε αιτιατά σήματα.

3. Μετατόπιση στη μιγαδική συχνότητα

Αν $x(t) \leftrightarrow X(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$

τότε

$$x(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow X(s-s_0), \operatorname{Re}(s) > \sigma_0 + \operatorname{Re}(s_0)$$

Ιδιότητες και Θεωρήματα ΜΛ

4. Κλιμάκωση στο χρόνο

Αν $x(t) \leftrightarrow X(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$

τότε

$$x(bt) \leftrightarrow \frac{1}{b} X\left(\frac{s}{b}\right), \operatorname{Re}(s) > b\sigma_0$$

για οποιοδήποτε $b > 0$.

5. Παραγωγή στη μιγαδική συχνότητα

Αν $x(t) \leftrightarrow X(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$

τότε

$$(-t)^n x(t) \leftrightarrow \frac{d^n X(s)}{ds^n}, \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$$

Ιδιότητες και Θεωρήματα ΜΛ

6. Ολοκλήρωση στη μιγαδική συχνότητα

Αν $x(t) \leftrightarrow X(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$

τότε

$$\frac{x(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^\infty X(u) du, \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$$

Ιδιότητες και Θεωρήματα ΜΛ

7. Μετασχηματισμός Laplace παραγώγου

Έστω $x(t)$ παραγωγίσιμη για $t \geq 0$ και εκθετικής τάξης a .

Ο ΜΛ της $x(t)$ υπάρχει και είναι:

$$x(t) \leftrightarrow X(s), \operatorname{Re}(s) > a$$

Ο ΜΛ της παραγώγου της $x(t)$ είναι:

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s) - x(0^-), \operatorname{Re}(s) > a$$

Ιδιότητες και Θεωρήματα ΜΛ

8. Μετασχηματισμός Laplace ολοκληρώματος

Αν $x(t) \leftrightarrow X(s), \operatorname{Re}(s) > a$

τότε

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{X(s)}{s} + \frac{y(0^-)}{s}$$

όπου

$$y(0^-) = \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau$$

Θα πρέπει η $y(t)$ να είναι παραγωγίσιμη και εκθετικής τάξης.

Η $y(t)$ θα είναι παραγωγίσιμη αν η $x(t)$ είναι συνεχής.

Ιδιότητες και Θεωρήματα ΜΛ

9. Θεώρημα αρχικής τιμής

Έστω $x(t)$, η οποία δεν περιέχει κρουστικές συναρτήσεις στο $t = 0$, και έστω

$$x(t) \leftrightarrow X(s), \operatorname{Re}(s) > a$$

Τότε ισχύει

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = x(0^+)$$

Υπολογίζουμε αρχικές τιμές όχι μέσω της ίδιας της $x(t)$, αλλά μέσω του ΜΛ αυτής.

Ιδιότητες και Θεωρήματα ΜΛ

10. Θεώρημα τελικής τιμής (προσδιορισμός τιμών ισορροπίας και μόνιμης κατάστασης στη μελέτη συστημάτων)

Έστω $x(t) \leftrightarrow X(s), \operatorname{Re}(s) > a$

και έστω ότι η $sX(s)$ είναι αναλυτική συνάρτηση στον φανταστικό άξονα και στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Τότε ισχύει $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$

Το Θεώρημα δεν ισχύει αν η $sX(s)$ έχει πόλους στο δεξιό ημιεπίπεδο ή στον φανταστικό άξονα.

Πόλοι στο δεξιό ημιεπίπεδο $\rightarrow$ συναρτήσεις της μορφής e^{at} , $a > 0$, των οποίων το όριο για $t \rightarrow \infty$ δεν υπάρχει

Πόλοι στον φανταστικό άξονα $\rightarrow$ όρια για $t \rightarrow \infty$ ορίζονται μόνο με χρήση της θεωρίας γενικευμένων συναρτήσεων

Αντίστροφος ML

ML αιτιατής συνάρτησης $\rightarrow$ MF της συνάρτησης $x(t)e^{-\sigma t}$, όπου $\sigma = \text{Re}(s)$.

$$\text{Δηλαδή } x(t)e^{-\sigma t} = F^{-1}\{X(\sigma + j\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} e^{\sigma t} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

όπου η περιοχή σύγκλισης του ML είναι $\text{Re} = \sigma > \sigma_0$.

Υποθέτοντας σ : σταθερά και αλλάζοντας μεταβλητή και όρια ολοκλήρωσης, προκύπτει ο ML.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds, \quad \sigma > \sigma_0$$

σ μεταβλητή: μπορεί να αποδειχτεί ότι ο ML έχει τιμή ανεξάρτητη του σ , αν η περιοχή ολοκλήρωσης περιέχεται στην περιοχή σύγκλισης, δηλ. $\sigma > \sigma_0$.

Αντίστροφος ML

Θεώρημα (Μοναδικότητα αντίστροφου ML)

Αν δύο συναρτήσεις $X_1(s)$ και $X_2(s)$ είναι ίσες, τότε για τις αιτιατές συναρτήσεις $x_1(t) = L^{-1}\{X_1(s)\}$ και $x_2(t) = L^{-1}\{X_2(s)\}$ θα ισχύει ότι $x_1(t) - x_2(t) = N(t)$, όπου $N(t)$ είναι μηδενική συνάρτηση.

Μηδενική συνάρτηση: κάθε συνάρτηση που είναι μηδέν παντού, εκτός από ένα αριθμήσιμο σύνολο σημείων που έχει πεπερασμένες τιμές

Αντίστροφος ML: δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένος

Διάφορες συναρτήσεις που έχουν τον ίδιο ML διαφέρουν κατά μια μηδενική συνάρτηση.

Αντίστροφοι ML συνεχείς συναρτήσεις $\rightarrow$ υπάρχει μονοσήμαντη αντιστοιχία

Υπολογισμός αντίστροφου ML

Απευθείας υπολογισμός αντίστροφου ML $\rightarrow$ απαιτεί εφαρμογή τεχνικών επικαμπύλιας ολοκλήρωσης μιγαδικών συναρτήσεων (π.χ. ολοκληρωτικά υπόλοιπα). Επίπονη διαδικασία

Έμμεσος τρόπος εύρεσης αντίστροφου ML (αν η μορφή του $X(s)$ είναι απλή):

- ανάλυση σε άθροισμα επιμέρους στοιχειωδών όρων
- χρήση πίνακα ζευγών και ιδιοτήτων για υπολογισμό αντίστροφου ML

Υπολογισμός αντίστροφου ΜΛ

Ανάπτυξη ρητής συνάρτησης σε απλά κλάσματα

Υποθέτουμε ότι ο ΜΛ έχει τη μορφή ρητής συνάρτησης, μπορεί δηλαδή να εκφραστεί ως λόγος δύο πολυωνύμων του s .

$$X(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

όπου a_i, b_j πραγματικοί αριθμοί

Υπολογισμός αντίστροφου ML

- Σε μορφή όπως την προηγούμενη καταλήγουμε στη συντριπτική πλειοψηφία των προβλημάτων της θεωρίας γραμμικών συστημάτων.
- Στην πράξη μας ενδιαφέρουν περισσότερα τα ΓΧΑ συστήματα με πραγματική κρουστική απόκριση.
- Για πραγματοποιήσιμα συστήματα : $m \leq n$ (ο ML δεν περιέχει όρους s, s^2 , κ.τ.λ., δεν περιέχει δηλαδή κρουστικές συναρτήσεις)

Υπολογισμός αντίστροφου ML

$$m < n$$

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι ρίζες του $a(s)$. Ισχύει δηλαδή:

$$a(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i)$$

(α) Ρίζες διακριτές και πραγματικές ($\lambda_i \in \mathbb{R}$ και $\lambda_i \neq \lambda_j$ για $i \neq j$)

Τότε η $X(s)$ μπορεί να εκφραστεί ως:

$$X(s) = \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \dots + \frac{c_n}{s - \lambda_n}$$

Οι σταθερές c_i , $i = 1, \dots, n$ υπολογίζονται από τον τύπο

$$c_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i) X(s), \quad i = 1, \dots, n$$

Ο αντίστροφος ML υπολογίζεται από τον πίνακα των απλών ML και ισχύει:

$$x(t) = \left(c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \right) u(t)$$

Υπολογισμός αντίστροφου ΜΛ

(β) Ύπαρξη πολλαπλών πραγματικών ριζών

Έστω ότι η λ_1 εμφανίζεται με πολλαπλότητα r , ενώ οι υπόλοιπες ρίζες είναι απλές.

$$a(s) = (s - \lambda_1)^r \prod_{i=r+1}^n (s - \lambda_i)$$

$$X(s) = \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_2}{(s - \lambda_1)^2} + \dots + \frac{c_r}{(s - \lambda_1)^r} + \frac{c_{r+1}}{s - \lambda_{r+1}} + \dots + \frac{c_n}{s - \lambda_n}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με $(s - \lambda_1)^r$ αποδεικνύεται ότι οι συντελεστές που αντιστοιχούν στην πολλαπλή ρίζα, c_i , $i=1, 2, \dots, r$ είναι:

$$c_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_1} \frac{1}{(r-i)!} \frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}} [(s - \lambda_1)^r X(s)], \quad i = 1, \dots, r$$

Υπολογισμός αντίστροφου ML

Οι υπόλοιποι συντελεστές c_i , $i = r+1, \dots, n$, υπολογίζονται όπως στην περίπτωση (α).

Η έκφραση για τον αντίστροφο ML είναι:

$$x(t) = \left[c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} + \dots + c_r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{\lambda_1 t} + c_{r+1} e^{\lambda_{r+1} t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \right] u(t)$$

Πόλοι με πολλαπλότητα μεγαλύτερη του 1 αντιστοιχούν σε εκθετικές αποκρίσεις πολλαπλασιασμένες με δυνάμεις του t .

Υπολογισμός αντίστροφου ΜΛ

(γ) Ύπαρξη μιγαδικών ριζών

Έστω ότι το $a(s)$ έχει ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών ριζών, τις $\lambda_1 = \sigma + j\Omega$ και $\lambda_2 = \lambda_1^* = \sigma - j\Omega$. Τότε:

$$X(s) = \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_2}{s - \lambda_1^*} + \dots + \frac{c_n}{s - \lambda_n}$$

Όλοι οι συντελεστές, είτε αντιστοιχούν σε μιγαδικές είτε σε πραγματικές ρίζες, υπολογίζονται από:

$$c_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i) X(s), \quad i = 1, \dots, n$$

Οι c_1 και c_2 θα είναι μιγαδικοί και θα ισχύει, $c_2 = c_1^*$.

$$x(t) = \left(c_1 e^{\lambda_1 t} + c_1^* e^{\lambda_1^* t} + \sum_{i=3}^n c_i e^{\lambda_i t} \right) u(t)$$

Εμφάνιση συζυγών μιγαδικών ριζών στο ΜΛ συνάρτησης $\rightarrow$ ύπαρξη ημιτονοειδών όρων στη συνάρτηση αυτή

Υπολογισμός αντίστροφου ML

$$m \geq n$$

Τότε: εκτελούμε τη διαίρεση $\frac{b(s)}{a(s)}$ οπότε: $X(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \Pi(s) + \frac{g(s)}{a(s)}$

όπου $\Pi(s)$ βαθμού $m-n$ και $g(s)$ βαθμού $n-1$ το πολύ, της μορφής:

$$\Pi(s) = (s^{m-n} + \pi_{m-n-1}s^{m-n-1} + \dots + \pi_1s + \pi_0)b_m$$

Ο αντίστροφος ML θα δίνεται από τη σχέση:

$$L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\{\Pi(s)\} + L^{-1}\left\{\frac{g(s)}{a(s)}\right\}$$

Για τον όρο $L^{-1}\left\{\frac{g(s)}{a(s)}\right\}$ (βαθμός $g(s) < \text{βαθμός } a(s)$) $\rightarrow$ διαδικασία που περιγράψαμε στα (α), (β), (γ)

Ο πρώτος όρος θα αποτελείται από άθροισμα κρουστικών συναρτήσεων.

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \operatorname{Re}(s) > -1$$

Εκφράζουμε σε απλά κλάσματα

$$X(s) = \frac{c_1}{(s+1)} + \frac{c_2}{(s+2)}$$

$$\text{όπου } c_1 = (s+1)X(s)\Big|_{s=-1} = 1$$

$$c_2 = (s+2)X(s)\Big|_{s=-2} = 1$$

Άρα,

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+2)} \quad \text{και} \quad x(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

Συνέλιξη στο χρόνο και τη συχνότητα

Συνέλιξη στο χρόνο

Έστω

$X_1(s)$: ΜΛ της $x_1(t)$ με $\Pi\Sigma \operatorname{Re}(s) > \sigma_1$, όπου $x_1(t) = 0$, για $t < 0$

$X_2(s)$: ΜΛ της $x_2(t)$ με $\Pi\Sigma \operatorname{Re}(s) > \sigma_2$, όπου $x_2(t) = 0$, για $t < 0$

Ο ΜΛ της συνέλιξης στο χρόνο t ισούται με το γινόμενο των αντίστοιχων συναρτήσεων στη μιγαδική συχνότητα, s .

$$L\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(s)X_2(s), \quad \operatorname{Re}(s) > \max(\sigma_1, \sigma_2)$$

Συνέλιξη στη μιγαδική συχνότητα

Ο ΜΛ του γινομένου δύο συναρτήσεων $x_1(t)$ και $x_2(t)$ μπορεί να εκφραστεί στο μιγαδικό επίπεδο ως η συνέλιξη των ΜΛ $X_1(s)$ και $X_2(s)$ των χρονικών συναρτήσεων.

Δηλαδή, αν

$X_1(s)$: ΜΛ της $x_1(t)$ με ΠΣ $\text{Re}(s) > \sigma_1$

$X_2(s)$: ΜΛ της $x_2(t)$ με ΠΣ $\text{Re}(s) > \sigma_2$

$$L\{x_1(t)x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} X_1(s) * X_2(s)$$

όπου

$$X_1(s) * X_2(s) \equiv \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_1(z)X_2(s-z)dz$$

με $\text{Re}(s) > \sigma_1 + \sigma_2$, $\sigma_1 < c < \text{Re}(s) - \sigma_2$

ML ημιπεριοδικών συναρτήσεων

Ημιπεριοδική συνάρτηση: μια κοινή περιοδική συνάρτηση με περίοδο T , η οποία επεκτείνεται περιοδικά μόνο στο θετικό ημιάξονα

$$x(t) = \begin{cases} x(t+T), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Έστω

$$x_0(t) = \begin{cases} x(t), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t < 0, t > T \end{cases}$$

το τμήμα της $x(t)$ στη βασική περίοδο και $X_0(s)$ ο ML αυτού για $\text{Re}(s) > \sigma_0$.

$\sigma_0 = -\infty$, γιατί $x_0(t)$ πεπερασμένης διάρκειας, άρα ο ML της συγκλίνει για κάθε $\text{Re}(s) > -\infty$.

ML ημιπεριοδικών συναρτήσεων

Η $x(t)$ μπορεί να γραφεί ως:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_0(t - kT) = x_0(t) + x_0(t - T) + x_0(t - 2T) + \dots$$

Παίρνοντας το ML και των δύο πλευρών, έχουμε:

$$X(s) = X_0(s)(1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \dots)$$

άρα

$$X(s) = \frac{X_0(s)}{1 - e^{-sT}}, \quad \operatorname{Re}(sT) > 0$$

Επειδή $T > 0$, η συνθήκη $\operatorname{Re}(sT) > 0$ είναι ισοδύναμη με τη $\operatorname{Re}(s) > 0$.

Περιοδικότητα στο χρόνο $\rightarrow$ δεν εισάγει κρουστικές συναρτήσεις στο ML, όπως συμβαίνει στην περίπτωση του MF.

$e^{-\sigma T} \rightarrow$ διευκολύνει τη σύγκλιση του ML ενός περιοδικού σήματος

Αμφίπλευρος ML

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt, \quad \sigma_1 > \operatorname{Re}(s) > \sigma_2 \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds, \quad \sigma_1 > \sigma > \sigma_2 \end{aligned}$$

$e^{-\sigma t} \rightarrow$ οδηγεί σε σύγκλιση το ολοκλήρωμα του μονόπλευρου ML συναρτήσεων εκθετικής τάξης, όταν ολοκληρώνουμε από 0 έως ∞ .

Αμφίπλευρος ML: αρνητικοί χρόνοι από 0 έως $-\infty$

Άρα αν $\sigma > 0$, $e^{-\sigma t} \rightarrow \infty$, καθώς $t \rightarrow -\infty$.

Συμπέρασμα: η ΠΣ του αμφίπλευρου ML είναι μια ζώνη στο μιγαδικό επίπεδο, δηλαδή ο αμφίπλευρος ML υπάρχει για κάθε $s : \sigma_1 > \operatorname{Re}(s) = \sigma > \sigma_2$.

Αμφίπλευρος ML

Μονόπλευρος ML

Αν μας δίνεται η $X(s)$, υπάρχει μοναδική $x(t)$ που αντιστοιχεί σε αυτή.

Η ΤΣ εκτείνεται πάντα δεξιά του πόλου της $X(s)$ με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος και μέχρι το άπειρο.

Αμφίπλευρος ML

Δεν ισχύει ό,τι ισχύει για το μονόπλευρο ML.

Εκτός από την $X(s)$ πρέπει πάντα να δίνεται η ΤΣ για να προσδιορίζεται μοναδικά η $x(t)$.

Για μια αναλυτική συνάρτηση $X(s)$ με πολλούς πόλους η ΤΣ μπορεί να είναι οποιαδήποτε περιοχή μεταξύ δύο πόλων.

Παραδειγματα

- Παράδειγμα 1

$$x_1(t) = e^{at} u(t) \xrightarrow{\text{Laplacebilateral}} X_1(s) = \frac{1}{s-a}, \operatorname{Re}(s) > a$$

$$x_2(t) = -e^{at} u(-t) \xrightarrow{\text{Laplacebilateral}} X_2(s) = \frac{1}{s-a}, \operatorname{Re}(s) < a$$

- Παράδειγμα 2

$$x(t) = \begin{cases} e^{bt}, & t < 0 \\ e^{-at}, & t > 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Laplacebilateral}} X(s) = \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s+a}, b > \operatorname{Re}(s) > a$$

Παραδειγματα

- Παράδειγμα 3

$$x_1(t) = e^{-3t}u(t) \xrightarrow{\text{Laplace unilateral}} X_1(s) = \frac{1}{s+3}, \operatorname{Re}(s) > -3$$

$$x_2(-t) = e^{-2t}u(t) \xrightarrow{\text{Laplace unilateral}} X_2(s) = \frac{1}{s+2}, \operatorname{Re}(s) > -2$$

Αρα,

$$x(t) = x_1(t) + x_2(-t) \xrightarrow{\text{Laplace bilateral}} X(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{-s+2} = \frac{5}{s^2 + s - 6}, 2 > \operatorname{Re}(s) > -3$$

Αμφίπλευρος ML

Ιδιότητες και Θεωρήματα για το μονόπλευρο ML $\rightarrow$ ισχύουν σχεδόν ως έχουν και για τον αμφίπλευρο

Διαφορές

- Οι περιοχές σύγκλισης πρέπει να τροποποιηθούν ανάλογα.
- Οι αρχικές συνθήκες θα αντιστοιχούν στο $t = -\infty$ και όχι στο $t = 0$. Από σύμβαση ισχύει $x(-\infty) = 0$.

Υπολογισμός αμφίπλευρου ML

Γίνεται εύκολα αν χωρίσουμε τη συνάρτηση σε δύο τμήματα (που αντιστοιχούν στο θετικό και τον αρνητικό χρόνο) και πάρουμε το μονόπλευρο ML αυτών των δύο τμημάτων.

Υπολογισμός αμφίπλευρου ML

Έστω $x(t)$ να εκτείνεται από $-\infty$ έως ∞ .

Μπορεί να γραφτεί ως $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, όπου:

$$x_1(t) = x(t)u(t), \quad x_2(t) = x(t)u(-t)$$

Τότε:

$$X(s) = X_1(s) + X_2(-s)$$

Άρα:

- Υπολογίζουμε τους μονόπλευρους ML $X_1(s)$ και $X_2(s)$ των $x_1(t)$ και $x_2(-t)$, αντίστοιχα.
- Υπολογίζουμε τη $X_2(-s)$
- Το άθροισμά τους δίνει τον αμφίπλευρο ML της $x(t)$.

Εύρεση αντίστροφου αμφίπλευρου ML

Κάνουμε ότι και στην περίπτωση του μονόπλευρου ML, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση

$$X(s) = X_1(s) + X_2(-s)$$

Επίσης χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι:

- Οι πόλοι που βρίσκονται αριστερά της περιοχής σύγκλισης αντιστοιχούν στο τμήμα θετικών χρόνων της αρχικής συνάρτησης $x(t)$.
- Οι πόλοι που βρίσκονται δεξιά της περιοχής σύγκλισης αντιστοιχούν στο τμήμα αρνητικών χρόνων.

Χρήση ML στην επίλυση Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων

Γενική μορφή γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (ΓΔΕ) με σταθερούς συντελεστές:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = g(t)$$

όπου $a_i, i = 0, 1, \dots, n$, είναι σταθερές.

Δίνονται οι αρχικές συνθήκες:

$$y(0) = b_0, \quad y^{(1)}(0) = b_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = b_{n-1}$$

Όπου ο συμβολισμός $y^{(i)}$ δηλώνει την παράγωγο i τάξης της $y(t)$.

Χρήση ML στην επίλυση Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων

Τα βήματα που ακολουθούμε για την επίλυση της ΓΔΕ είναι:

1. Παίρνουμε ML και στα δύο μέλη της ΓΔΕ.

Γραμμικότητα $\rightarrow$ ML αριστερού μέλους = άθροισμα ML των επιμέρους όρων

Ιδιότητα ML για παράγωγο συνάρτησης $\rightarrow$ υπολογισμός ML των επιμέρους όρων

ML της $g(t)$ $\rightarrow$ απευθείας ή με χρήση σχετικών πινάκων

2. Επίλυση της εξίσωσης που προκύπτει ως προς $Y(s)$

$Y(s)$: ML της ζητούμενης συνάρτησης

3. Υπολογισμός αντίστροφου ML για τη $Y(s)$, δηλαδή της $y(t)$

Χρήση ML στην ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων

Συνάρτηση μεταφοράς συστήματος

Αν το σύστημα είναι πρακτικά υλοποιήσιμο, περιγράφεται μέσω μιας ΓΔΕ με σταθερούς συντελεστές:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t)$$

όπου a_i, b_j είναι πραγματικές σταθερές.

Αν όλες οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές (το σύστημα βρίσκεται σε αρχική κατάσταση ηρεμίας), παίρνοντας το ML της ΓΔΕ καταλήγουμε στη σχέση:

$$H(s) \equiv \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$H(s)$: συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος

Χρήση ML στην ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων

Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να προκύψει και από το ML της συνέλιξης:

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad \text{ή} \quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Συνάρτηση μεταφοράς

- ο ML της κρουστικής απόκρισης $h(t)$
- αντιστοιχεί σε μηδενικές αρχικές συνθήκες
- είναι ανεξάρτητη από τη συγκεκριμένη είσοδο
- εξαρτάται μόνο από τις παραμέτρους που περιγράφουν το ΓΧΑ σύστημα
- για $s=j\Omega$ είναι η απόκριση συχνοτήτων του συστήματος (περιγράφει τη συμπεριφορά του στο πεδίο των συχνοτήτων)

Χρήση ML στην ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων

Ευστάθεια συστήματος και συνάρτηση μεταφοράς

Συνθήκες που πρέπει να ισχύουν για την $H(s)$ (ρητή) αιτιατού συστήματος, ώστε το σύστημα να είναι ΦΕΦΕ ευσταθές:

Πρέπει βαθμός πολυωνύμου αριθμητή $\leq$ βαθμό πολυωνύμου παρονομαστή

Διαφορετικά προκύπτουν όροι της μορφής cs^k , $k > 0$, οι οποίοι μπορούν να προκαλέσουν την παρουσία μη φραγμένων σημάτων στην έξοδο.

Όλοι οι πόλοι της $H(s)$ πρέπει να βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο (αρνητικό πραγματικό μέρος).

Πόλοι $H(s)$ στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο ή στον φανταστικό άξονα $\rightarrow$ ασταθές σύστημα