

Σήματα και Συστήματα

Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου
Δειγματοληψία

ΜΕ διακριτού χρόνου

Ειδική περίπτωση του μετασχηματισμού Ζ

Έστω ΓΧΑΣ διακριτού χρόνου με κρουστική απόκριση $h(n)$ και είσοδο το εκθετικό μιγαδικό σήμα:

$$e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j\sin(\omega n)$$

Η έξοδος του συστήματος θα είναι

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\omega(n-k)} \quad \text{ή} \quad y(n) = e^{j\omega n} H(e^{j\omega})$$

όπου

$$H(e^{j\omega}) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}$$

Έξοδος: το ίδιο σήμα πολλαπλασιασμένο με μια μιγαδική ποσότητα $H(e^{j\omega})$, η οποία απλά αλλάζει το πλάτος και τη φάση του σήματος εισόδου

ΜF διακριτού χρόνου

$H(e^{j\omega})$: μιγαδική συνάρτηση του ω , περιοδική, με περίοδο 2π
($e^{-j(\omega+2\pi)k} = e^{-j\omega k}$)

Εύκολα αποδεικνύεται ότι:
$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Η ακολουθία $h(n)$ αναπτύσσεται σε άπειρο άθροισμα (ολοκλήρωμα) απλών εκθετικών μιγαδικών σημάτων $e^{j\omega n}$, κυκλικής συχνότητας $\omega \in [-\pi, \pi]$.

Μπορούμε να ορίσουμε ανάλογες σχέσεις για κάθε σχήμα διακριτού χρόνου $x(n) \rightarrow$ ζεύγος μετασχηματισμού Fourier

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \\ x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \end{aligned}$$

MF διακριτού χρόνου

Αν ο δείκτης της ακολουθίας δίνεται σε μονάδες χρόνου, $x(nT)$, το ανάπτυγμα πρέπει να γίνει σε εκθετικά μιγαδικά σήματα της μορφής $e^{j\Omega nT}$.

Ω : σε μονάδες συχνότητας (rad/sec) ώστε συνολικά ο εκθέτης να είναι καθαρός αριθμός

Ζεύγος μετασχηματισμού Fourier:

$$\begin{aligned} X(e^{j\Omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega nT} \\ x(nT) &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega nT} d\Omega \end{aligned}$$

$$\omega = \Omega T$$

MF: συνάρτηση περιοδική με περίοδο $2\pi/T$

MF διακριτού χρόνου

- MF σημάτων διακριτού χρόνου $x(n)$: είναι πάντα περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π
- MF, $X(e^{j\omega})$: συμπίπτει με το μετασχηματισμό Z, $X(z)$, για $z=e^{j\omega}$, δηλαδή πάνω στο μοναδιαίο κύκλο (υπό την προϋπόθεση ότι ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στην περιοχή σύγκλισής του)
- Ύπαρξη MF ακολουθίας $x(n)$: αν η ακολουθία είναι απολύτως αθροίσιμη (ικανή συνθήκη)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| < \infty$$

- Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ΓΧΑΣ ΦΕΦΕ ευσταθής: η κρουστική απόκριση $h(n)$ να είναι απολύτως αθροίσιμη $\rightarrow$ Άρα, ο MF $H(e^{j\omega})$ της κρουστικής απόκρισης ΦΕΦΕ ΓΧΑ συστημάτων υπάρχει πάντα.

Ιδιότητες MF διακριτού χρόνου

Πίνακας 5.2 Βασικές ιδιότητες του MF διακριτού χρόνου

Ιδιότητα	Πεδίο του Χρόνου	Πεδίο της Συχνότητας
Περιοδικότητα	$x(n)$	$X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$
Συζυγία στο χρόνο	$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
Συζυγία στη συχνότητα	$x^*(-n)$	$X^*(e^{j\omega})$
Ανάκλαση	$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
Γραμμικότητα	$ax(n) + by(n)$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
Χρονική Μετατόπιση	$x(n - n_0)$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
Ολίσθηση Συχνότητας	$e^{j\omega_0 n} x(n)$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
Πραγματικό Σήμα	$x(n) \equiv x^*(n)$	$\text{Re}[X(e^{j\omega})] = \text{Re}[X(e^{-j\omega})]$
”	”	$\text{Im}[X(e^{j\omega})] = -\text{Im}[X(e^{-j\omega})]$
”	”	$ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $
”	”	$\arg[X(e^{j\omega})] = -\arg[X(e^{-j\omega})]$
Συνέλιξη	$x(n) * y(n)$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
Διαμόρφωση	$x(n)y(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j(\omega-\theta)})Y(e^{j\theta})d\theta$
Διαφόριση	$(-j)^k n^k x(n)$	$\frac{d^k}{d\omega^k} X(e^{j\omega})$
Θεώρημα Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2$	$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$

Πρόβλημα 11 (βιβλίο σελίδα 298)

Να υπολογιστεί

ο αντίστροφος MF διακριτού χρόνου της $X(e^{j\omega})$ που έχει μορφή ορθογώνιου παλμού και που στα πλαίσια της βασικής περιόδου $[-\pi, \pi]$ ορίζεται ως

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq W \\ 0, & W \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

Λύση:

Αν εφαρμόσουμε τον ορισμό του αντίστροφου MF διακριτού χρόνου απευθείας στην παραπάνω συνάρτηση φάσματος, παίρνουμε

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin Wn}{\pi n}$$

Πρόβλημα 12 (βιβλίο σελίδα 298)

Να υπολογιστεί ο MF της ακολουθίας

$$x(n) = \cos(\omega_0 n)$$

με $|\omega_0| \leq \pi$.

Λύση:

Από τη σχέση του Euler έχουμε

$$\cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})$$

Όπως μπορούμε να αποδείξουμε απευθείας από τον ορισμό του MF διακριτού χρόνου, εάν $x(n) = 1, \forall n$, τότε $X(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega), |\omega| \leq \pi$.

Πρόβλημα 12 (βιβλίο σελίδα 298)

Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα καθώς και τις ιδιότητες της ολίσθησης στη συχνότητα και αυτή της γραμμικότητας, μπορούμε, ξεκινώντας από τη σχέση του Euler, να δείξουμε εύκολα ότι ο ζητούμενος MF είναι

$$X(e^{j\omega}) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)], \quad |\omega|, |\omega_0| \leq \pi$$

Πρόβλημα 13 (βιβλίο σελίδα 299)

Δίνεται η ακολουθία

$$x(n) : \{2, 1, -1, 0, 3, 2, 0, -3, 4\}$$

με μήκος $N = 9$. Να υπολογιστεί απευθείας από τα δείγματα:

1. $X(e^{j0}), X(e^{j\pi})$

Λύση:

Από τον ορισμό του MF έχουμε

$$X(e^{j0}) = \sum_{n=0}^8 x(n)e^{-jn0} = \sum_{n=0}^8 x(n) = 8$$

Πρόβλημα 13 (βιβλίο σελίδα 299)

$$\begin{aligned}X(e^{j\pi}) &= \sum_{n=0}^8 x(n)e^{-jn\pi} \\&= \sum_{n=0}^8 (-1)^n x(n) \\&= [x(0) + x(2) + x(4) + x(6) + x(8)] - [x(1) + x(3) + x(5) + x(7)] \\&= 8 - 0 = 8\end{aligned}$$

Πρόβλημα 13 (βιβλίο σελίδα 299)

Δίνεται η ακολουθία

$$x(n) : \{2, 1, -1, 0, 3, 2, 0, -3, 4\}$$

με μήκος $N = 9$. Να υπολογιστούν απευθείας από τα δείγματα:

2. $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$

Λύση:

Από τον ορισμό του αντίστροφου MF έχουμε

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{-j\omega n} d\omega$$

άρα

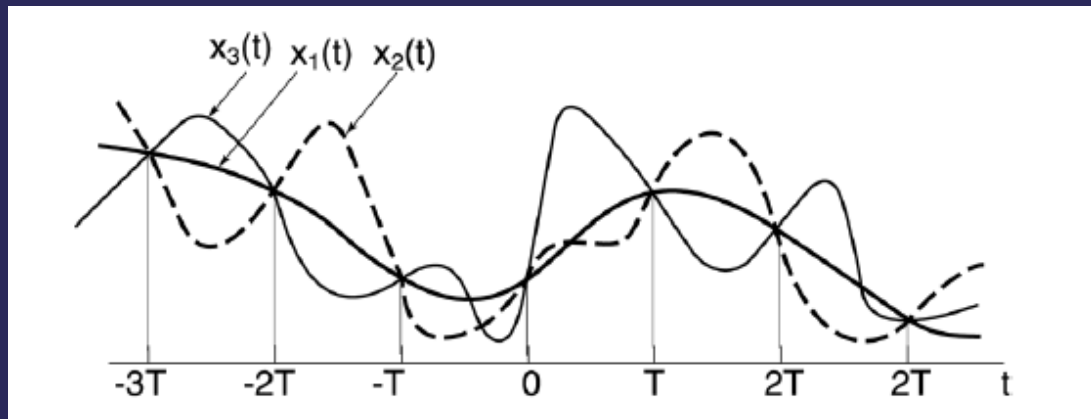
$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega = 2\pi x(0) = 4\pi$$



ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

Παραδείγματα 'κακής' δειγματοληψίας

- Διαφορετικά σήματα παράγουν το ίδιο DT σήμα



- Με τη δειγματοληψία χάνουμε πολλή πληροφορία. Όλες οι τιμές του $x(t)$ μεταξύ των δειγμάτων χάνονται.

Δειγματοληψία

Δειγματοληψία (sampling): το πρώτο στάδιο στη διαδικασία ψηφιοποίησης αναλογικού σήματος

Οι μετρούμενες τιμές καλούνται δείγματα (samples) του σήματος.

Μέτρηση σε τακτά διαστήματα διάρκειας T sec

$$x(n) \equiv x_a(nT)$$

T : περίοδος δειγματοληψίας

$f_s = 1/T$: συχνότητα (ή ρυθμός) δειγματοληψίας

Ποια είναι η κατάλληλη τιμή για την περίοδο (ή το ρυθμό) δειγματοληψίας;

Δειγματοληψία

Πρέπει:

- να μη χάνεται η πληροφορία που περιέχεται στο σήμα συνεχούς χρόνου
- να μην αυξάνεται χωρίς λόγο η απαιτούμενη μνήμη και ταχύτητα των χρησιμοποιούμενων κυκλωμάτων (με αντίστοιχη αύξηση του κόστους)

Υπάρχει σχέση που συνδέει τη μέγιστη επιτρεπτή περίοδο (συχνότητα) δειγματοληψίας με τη μέγιστη συχνότητα στο σήμα συνεχούς χρόνου.

Πρέπει να κατανοήσουμε πώς η ακολουθία των δειγμάτων, $x(n)$, συνδέεται με το αρχικό σήμα, $x_a(t)$.

Η σχέση τους προκύπτει αν περάσουμε στο πεδίο των συχνοτήτων.

Δειγματοληψία

Κάνοντας χρήση του ζεύγους MF συνεχούς χρόνου:

$$\begin{aligned}x_a(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \\X_a(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt\end{aligned}$$

Οπότε, από τις παραπάνω προκύπτει:

$$x(n) = x_a(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega) e^{jn\Omega T} d\Omega$$

Δειγματοληψία

Η σχέση τους προκύπτει αν περάσουμε στο πεδίο των συχνοτήτων:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\omega}{T} + \frac{2\pi}{T}r\right)$$

ή, αν χρησιμοποιήσουμε τη μεταβλητή $\Omega = \omega/T$

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a\left(\Omega + \frac{2\pi}{T}r\right)$$

Ο ΜF σήματος διακριτού χρόνου $x(n)$, που αντιστοιχεί στην περιοδική δειγματοληψία του αναλογικού σήματος $x_a(t)$ με περίοδο T , προκύπτει από την περιοδική επανάληψη του ΜF του αναλογικού σήματος με περίοδο επανάληψης $2\pi/T$.

Δειγματοληψία

MF σήματος συνεχούς χρόνου

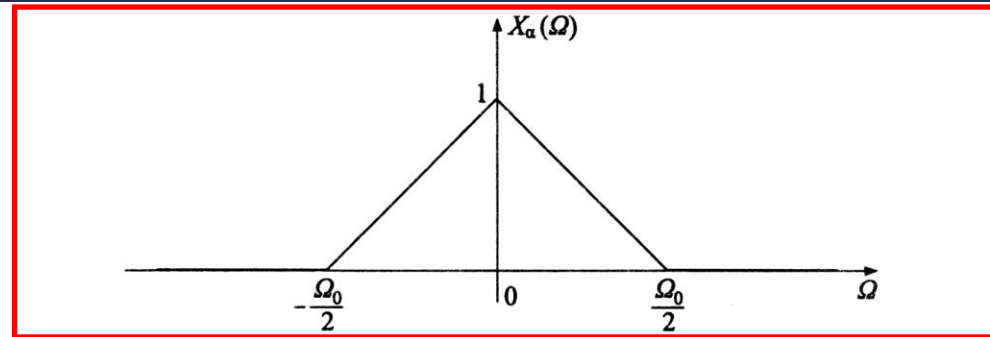
$\Omega_0/2$: μέγιστη συχνότητα

$X_a(\Omega)=0, |\Omega|>\Omega_0/2$

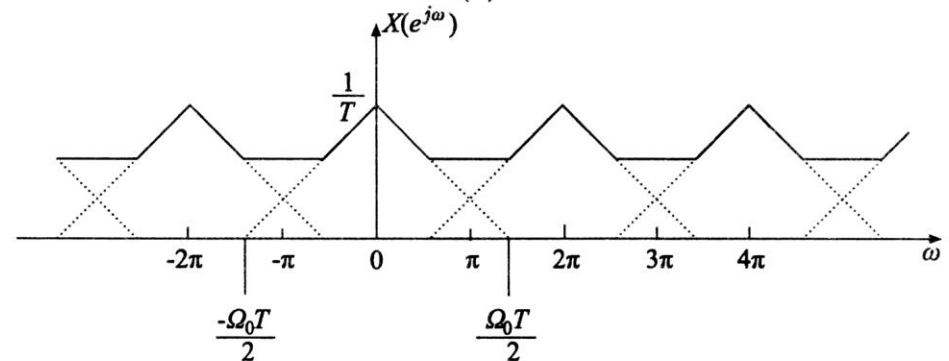
$\Omega_0/2$: εύρος ζώνης (bandwidth) του σήματος

Υποθέτουμε ότι υπάρχει πεπερασμένη μέγιστη συχνότητα $\Omega_0/2$

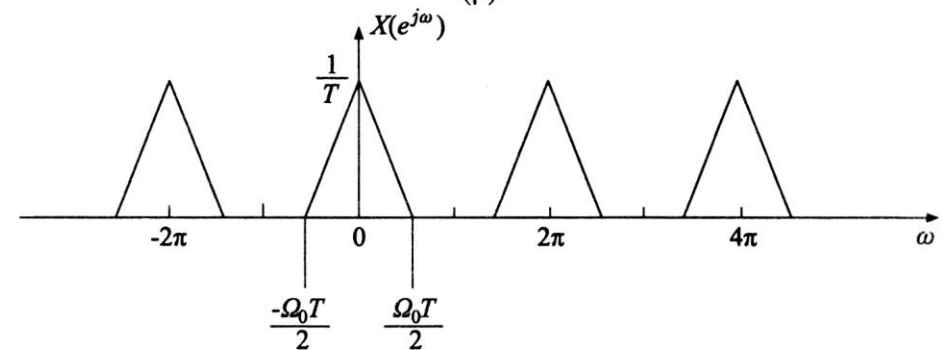
-> σήματα περιορισμένου εύρους ζώνης (band-limited)



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 5.16 Σχέση μεταξύ των MF ενός σήματος συνεχούς χρόνου και της ακολουθίας δειγμάτων του. (α) MF του σήματος συνεχούς χρόνου. (β) MF του σήματος διακριτού χρόνου που προκύπτει με δειγματοληψία. Η περίοδος δειγματοληψίας είναι μεγάλη με αποτέλεσμα η περιοδική επανάληψη του MF συνεχούς χρόνου να οδηγεί σε επικάλυψη. (γ) Όπως στο (β) αλλά με περίοδο δειγματοληψίας αρκετά μικρή ώστε ν' αποφεύγεται το φαινόμενο της επικάλυψης.

Δειγματοληψία

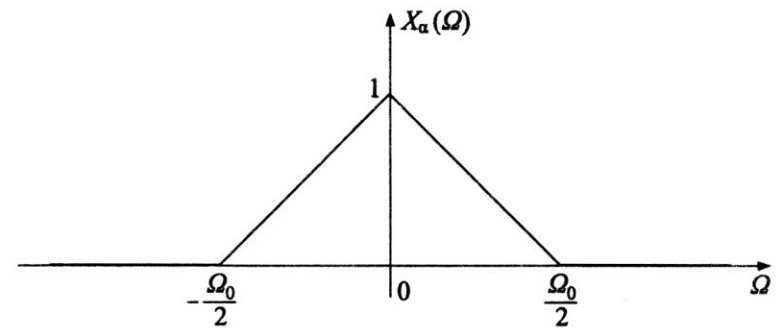
MF σήματος διακριτού χρόνου, αν:

$$\frac{\Omega_0}{2} > \frac{\pi}{T}$$

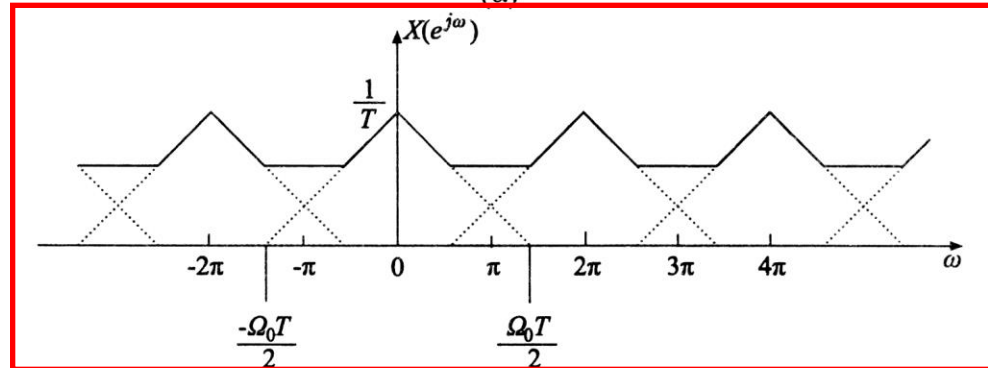
Διαδοχικές επαναλήψεις του $X_a(\Omega)$:

επικαλύπτονται και αθροιζόμενες δημιουργούν τον $X(e^{j\omega})$, στον οποίο έχει χαθεί η αρχική μορφή του $X_a(\Omega)$ από τον οποίο προέκυψε

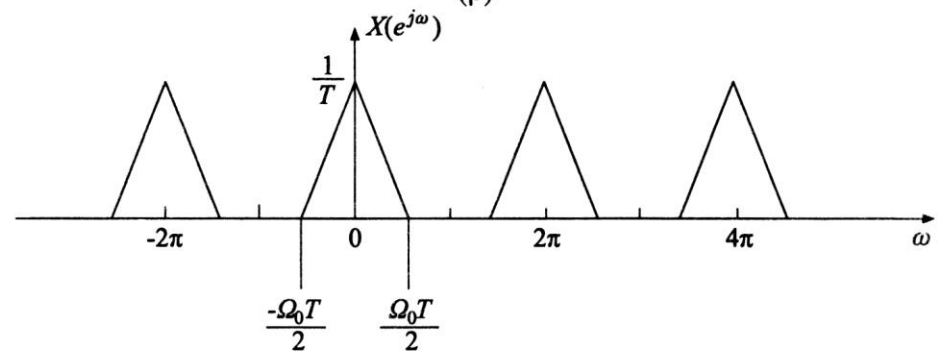
Δεν είναι δυνατή η ανάκτηση του $X_a(\Omega)$ από τον $X(e^{j\omega})$.



(α)



(β)



(γ)

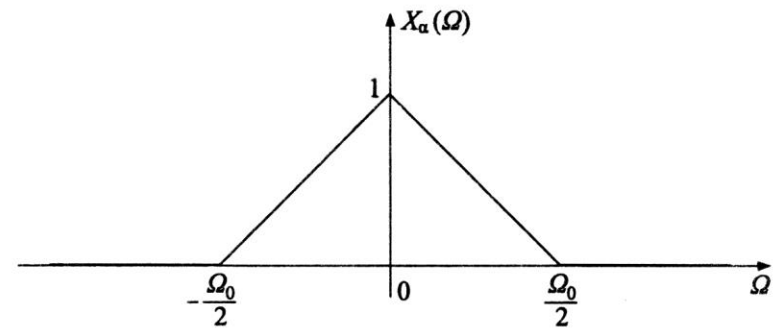
Σχήμα 5.16 Σχέση μεταξύ των MF ενός σήματος συνεχούς χρόνου και της ακολουθίας δειγμάτων του. (α) MF του σήματος συνεχούς χρόνου. (β) MF του σήματος διακριτού χρόνου που προκύπτει με δειγματοληψία. Η περίοδος δειγματοληψίας είναι μεγάλη με αποτέλεσμα η περιοδική επανάληψη του MF συνεχούς χρόνου να οδηγεί σε επικάλυψη. (γ) Όπως στο (β) αλλά με περίοδο δειγματοληψίας αρκετά μικρή ώστε ν' αποφεύγεται το φαινόμενο της επικάλυψης.

Δειγματοληψία

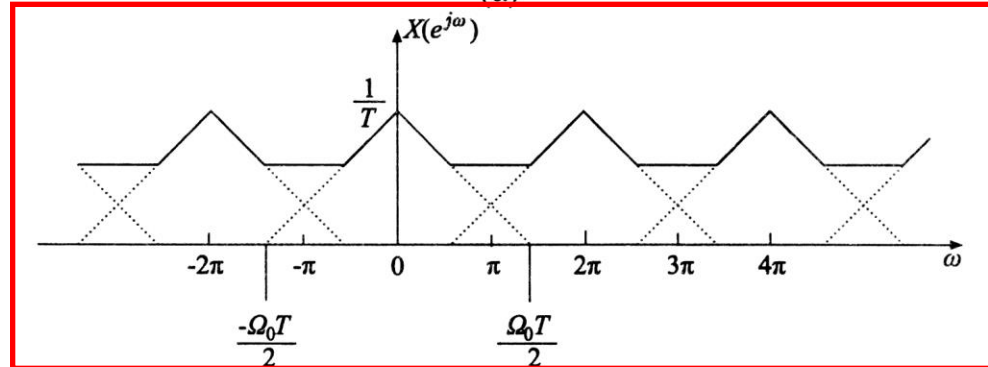
Δεν είναι δυνατή η ανάκτηση του αρχικού σήματος $x_a(t)$ από τα δείγματά του, $x(n)$.

Άρα, σε αυτή την περίπτωση δειγματοληψία
→ απώλεια πληροφορίας

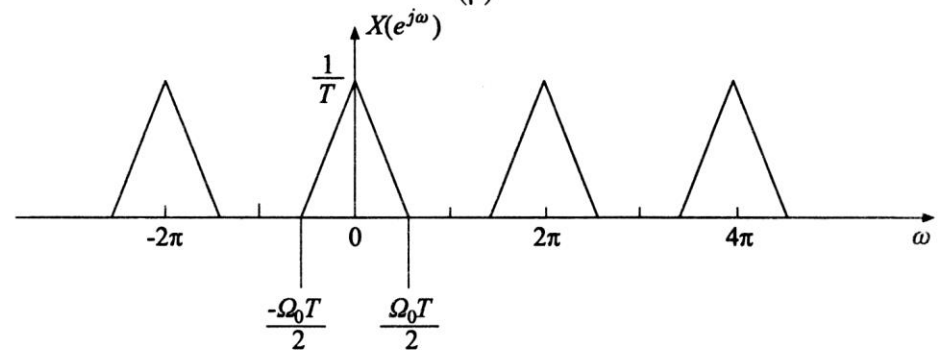
Λόγω της επικάλυψης μεταξύ των περιοδικών επαναλήψεων του $X_a(\Omega)$, αναφερόμαστε στο φαινόμενο αυτό ως επικάλυψη ή αναδίπλωση (wrap-around).



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 5.16 Σχέση μεταξύ των MF ενός σήματος συνεχούς χρόνου και της ακολουθίας δειγμάτων του. (α) MF του σήματος συνεχούς χρόνου. (β) MF του σήματος διακριτού χρόνου που προκύπτει με δειγματοληψία. Η περίοδος δειγματοληψίας είναι μεγάλη με αποτέλεσμα η περιοδική επανάληψη του MF συνεχούς χρόνου να οδηγεί σε επικάλυψη. (γ) Όπως στο (β) αλλά με περίοδο δειγματοληψίας αρκετά μικρή ώστε ν' αποφεύγεται το φαινόμενο της επικάλυψης.

Δειγματοληψία

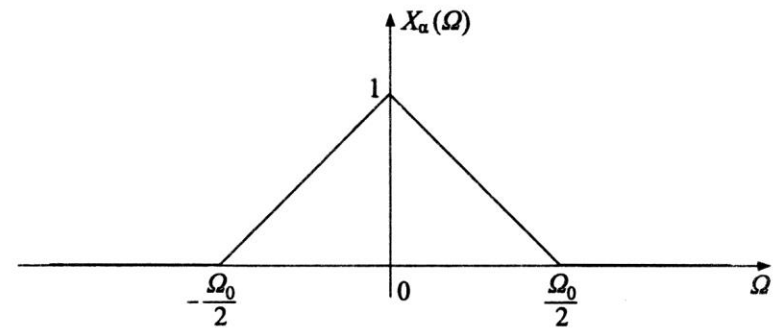
MF σήματος διακριτού χρόνου, αν:

$$\frac{\Omega_0}{2} \leq \frac{\pi}{T}$$

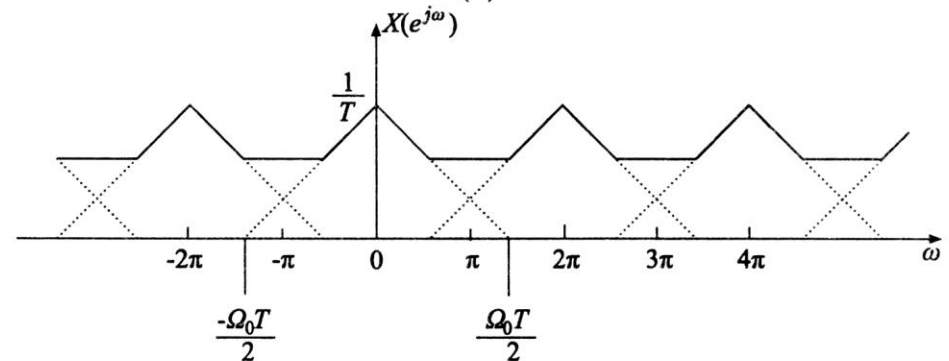
Ο $X(e^{j\omega})$ ταυτίζεται με τον $X_a(\Omega)$, στο διάστημα $-\pi \leq \omega \leq \pi$.

Είναι δυνατή η ανάκτηση του $X_a(\Omega)$ από τον $X(e^{j\omega})$.

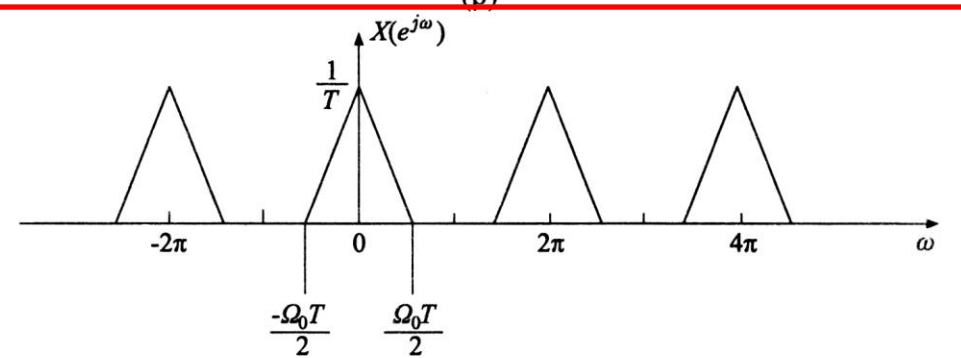
Είναι δυνατή η ανάκτηση του αρχικού σήματος $x_a(t)$ από τα δείγματά του, $x(n)$.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 5.16 Σχέση μεταξύ των MF ενός σήματος συνεχούς χρόνου και της ακολουθίας δειγμάτων του. (α) MF του σήματος συνεχούς χρόνου. (β) MF του σήματος διακριτού χρόνου που προκύπτει με δειγματοληψία. Η περίοδος δειγματοληψίας είναι μεγάλη με αποτέλεσμα η περιοδική επανάληψη του MF συνεχούς χρόνου να οδηγεί σε επικάλυψη. (γ) Όπως στο (β) αλλά με περίοδο δειγματοληψίας αρκετά μικρή ώστε ν' αποφεύγεται το φαινόμενο της επικάλυψης.

Δειγματοληψία

$$\Omega_0 \leq \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_s$$

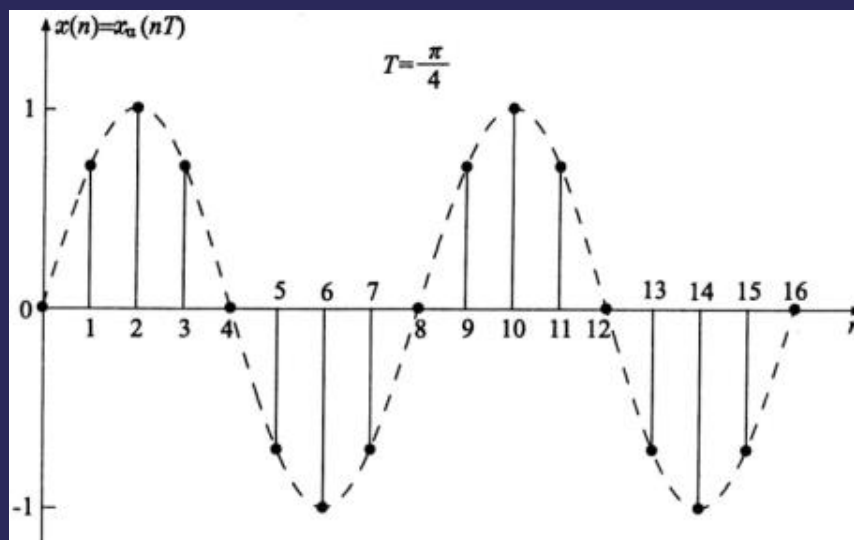
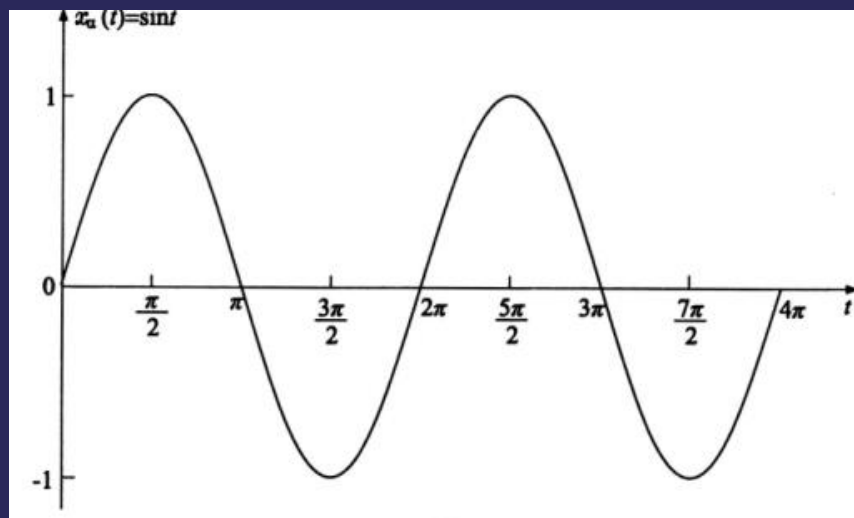
ή αν $\Omega_s = 2\pi f_s$ είναι η συχνότητα δειγματοληψίας σε rad/sec

$$\boxed{\Omega_s \geq \Omega_0}$$

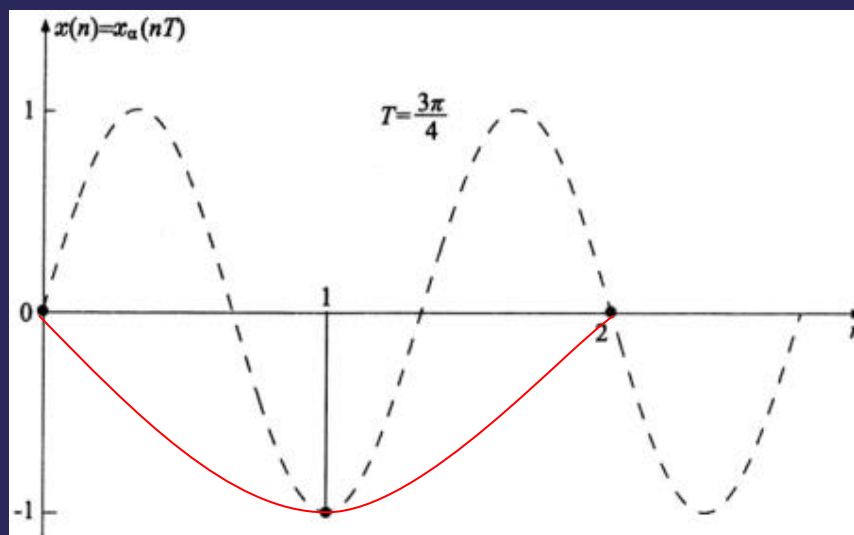
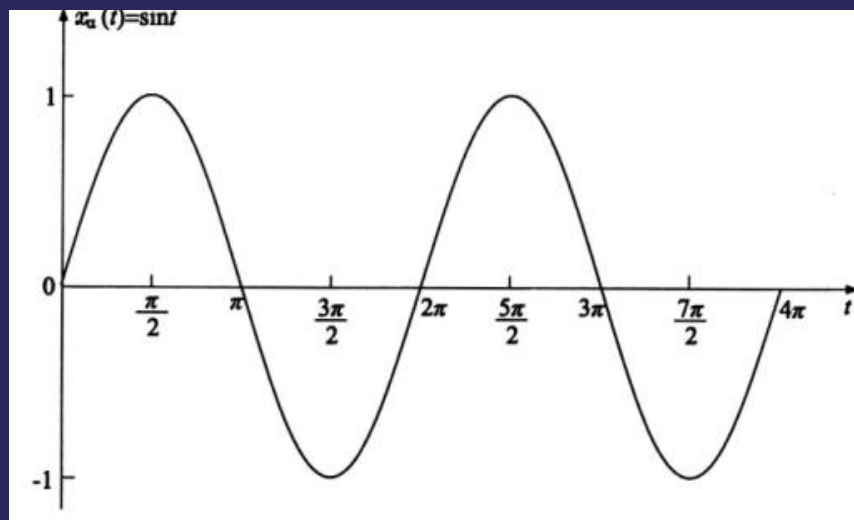
Θεώρημα ή κριτήριο του Nyquist

Η ελάχιστη συχνότητα με την οποία πρέπει να ληφθούν δείγματα από ένα σήμα συνεχούς χρόνου, $x_a(t)$, ώστε να είναι δυνατή η ανάκτησή του από τα δείγματά του, $x(n)$ (δηλαδή να μην υπάρχει επικάλυψη), ισούται με το διπλάσιο της μέγιστης συχνότητας που υπάρχει στο $x_a(t)$.

Δειγματοληψία



Δειγματοληψία

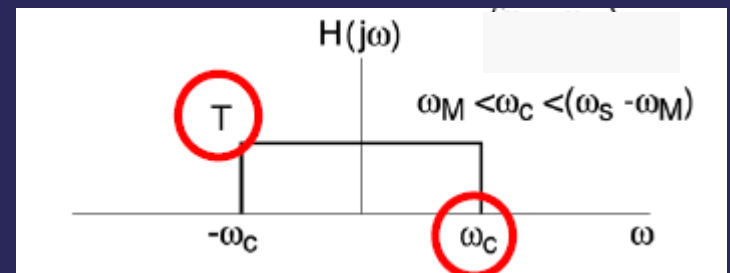
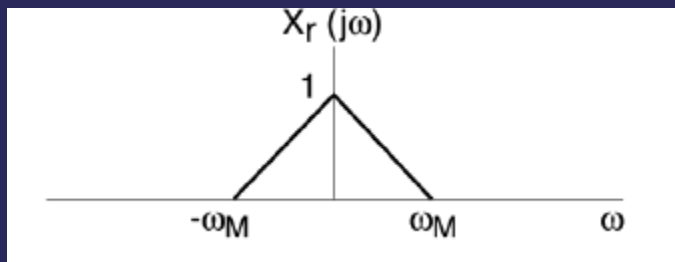
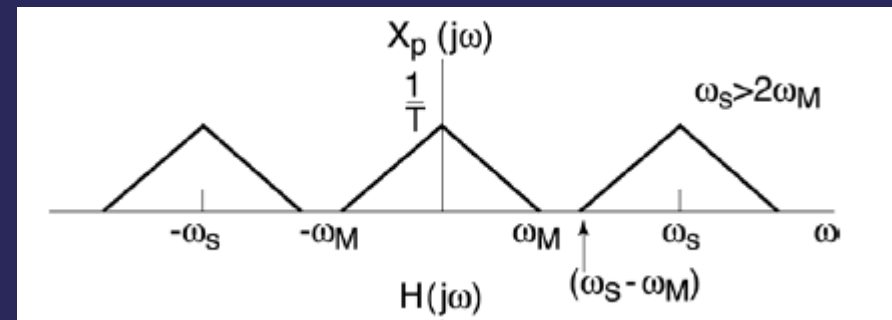
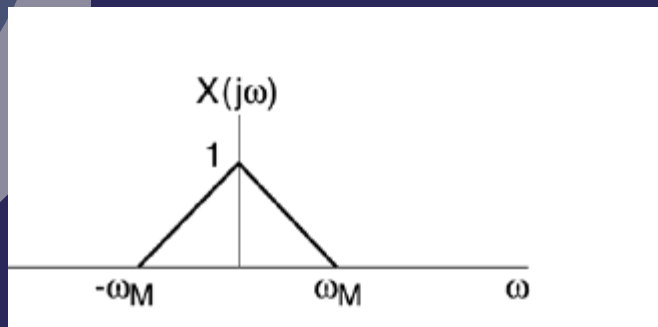


Παράδειγμα

- $x_a(t) = \cos(2\pi 500t) + \cos(2\pi 700t)$
- $A \nu \cos(\Omega_0 t)$
 - $X(\Omega) = \pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$

Αρα, $\Omega_s \geq 2\pi 1400 \text{ rad/sec}$ ή $f_s \geq 1400 \text{ Hz}$

Ανακατασκευή του αρχικού σήματος



Ανάκτηση σήματος συνεχούς χρόνου από τα δείγματά του

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει επικάλυψη, το αναλογικό σήμα, $x_a(t)$, αναπαράγεται από τα δείγματά του, $x(n)$, ως εξής:

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T}(t - nT)\right]}{\frac{\pi}{T}(t - nT)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) S_s(t - nT) \end{aligned}$$

όπου

$$S_s(t) \equiv Sa\left(\frac{\pi}{T}t\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)}{\frac{\pi}{T}t}$$

και $Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$

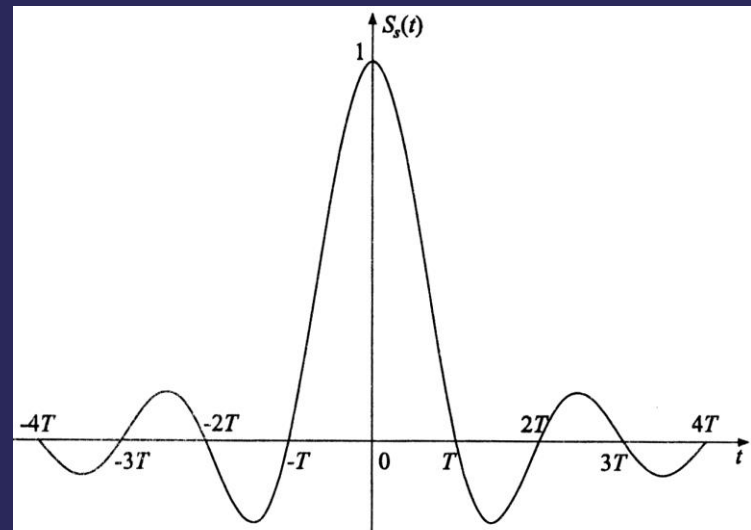
Ανάκτηση σήματος συνεχούς χρόνου από τα δείγματά του

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)S_s(t - nT)$$

Αν η περίοδος δειγματοληψίας ικανοποιεί το κριτήριο του Nyquist, το αρχικό αναλογικό σήμα μπορεί να προκύψει ως άθροισμα συναρτήσεων S_s , ολισθημένων στις στιγμές δειγματοληψίας και πολλαπλασιασμένων με τα αντίστοιχα δείγματα.

$S_s(t)$:

- μηδενική στα σημεία $t=nT$ (στιγμές δειγματοληψίας), $n \neq 0$
- στο $t=0$, $S_s(0) = 1$ (ορίζεται ως το όριό της)



Σχήμα 5.19 Η συνάρτηση $S_s(t) = \sin(\pi t/T)/(\pi t/T)$.

Ανάκτηση σήματος συνεχούς χρόνου από τα δείγματά του

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)S_s(t - nT)$$

Υπολογισμός $x_a(t)$ τη στιγμή δειγματοληψίας $t = n_1T$

Ο μόνος όρος που συνεισφέρει στο άθροισμα: $x(n_1)S_s(t - n_1T)$

Άρα: $x_a(n_1T) = x(n_1)S_s(n_1T - n_1T) = x(n_1)$

Το ανακατασκευασμένο σήμα θα συμπίπτει ακριβώς με το αρχικό $x_a(t)$ στις στιγμές δειγματοληψίας.

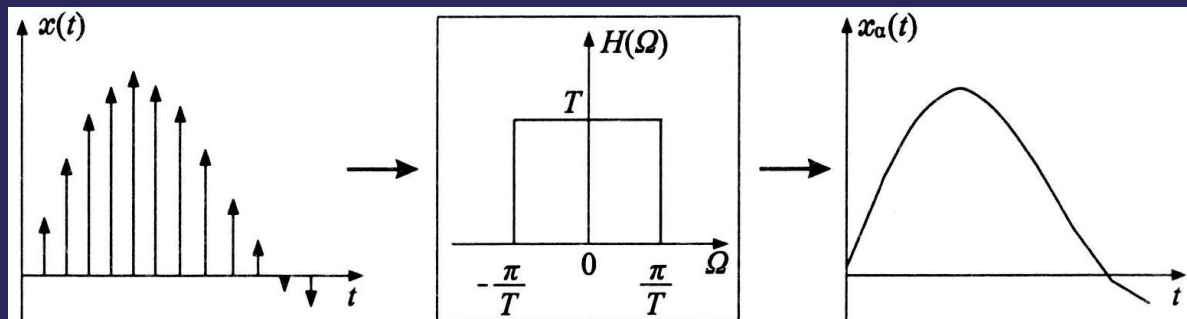
Ανάκτηση σήματος συνεχούς χρόνου από τα δείγματά του

Αποδεικνύεται ότι η σχέση ανακατασκευής του σήματος $x_a(t)$ από τα δείγματά του

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)S_s(t - nT)$$

εκφράζει το σήμα $x_a(t)$ ως την έξοδο ιδανικού αναλογικού κατωπερατού φίλτρου, με είσοδο την ακολουθία των δειγμάτων.

Η κρουστική απόκριση αυτού του φίλτρου είναι $h(t)=S_s(t)$.



Σχήμα 5.21 Ανάκτηση αναλογικού σήματος από τα δείγματά του με τη βοήθεια ιδανικού κατωπερατού φίλτρου.

Πρόβλημα 16 (βιβλίο σελίδα 302)

Ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x_a(t)$ δημιουργείται ως γραμμικός συνδυασμός ημιτονοειδών σημάτων με συχνότητες

$f_1 = 300\text{Hz}$, $f_2 = 400\text{Hz}$, $f_3 = 1.3\text{kHz}$, $f_4 = 3.6\text{kHz}$ και $f_5 = 4.3\text{kHz}$.

Το σήμα $x_a(t)$ δειγματοληπτείται με ρυθμό $f_s = 2\text{kHz}$ και η ακολουθία των δειγμάτων που προκύπτει περνάει από ένα ιδανικό κατωπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_s = 900\text{Hz}$.

Ποιές συχνότητες υπάρχουν στην έξοδο του φίλτρου;

Λύση:

Είναι γνωστό ότι το φάσμα του σήματος, $x(t)$, που εισάγεται στο κατωπερατό φίλτρο προκύπτει από το άθροισμα των περιοδικών επαναλήψεων του $X_a(\Omega)$ με περίοδο (σε Hz) f_s .

Πρόβλημα 16 (βιβλίο σελίδα 302)

Θα περιέχει λοιπόν τις συχνότητες $F_i = f_i + f_s k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
Αυτές είναι:

$$F_1 = 300, 1700, 2300, \dots, \text{Hz}$$

$$F_2 = 400, 1600, 2400, \dots, \text{Hz}$$

$$F_3 = 700, 1300, 3300, \dots, \text{Hz}$$

$$F_4 = 400, 1600, 3600, \dots, \text{Hz}$$

$$F_5 = 300, 2300, 4300, \dots, \text{Hz}$$

Έτσι, αφού το φίλτρο απορροφά όλες τις συχνότητες που είναι μεγαλύτερες από 900 Hz , στην έξοδό του θα υπάρχουν οι συχνότητες $300, 400$ και 700 Hz .