

# Σήματα και Συστήματα

---

## Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

# Διακριτός MF

---

MF διακριτού χρόνου: συνάρτηση περιοδική (περίοδος  $2\pi$ )

Υπολογισμός MF στον υπολογιστή για κάθε τιμή της συνεχούς μεταβλητής  $\omega$ : «άπειρος» χρόνος

Τρόπος υπολογισμού

Έχοντας στη διάθεσή μας πεπερασμένο αριθμό δειγμάτων στο πεδίο συχνοτήτων.

Υπόθεση: σήμα διακριτού χρόνου πεπερασμένης χρονικής διάρκειας

# Δειγματοληψία MF σήματος διακριτού χρόνου πεπερασμένης διάρκειας

---

$x(n)$ : σήμα διάρκειας  $N$  δειγμάτων, με  $x(n) = 0$ ,  $n < 0$  και  $n \geq N$ .

MF του  $x(n)$ : 
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n}$$

Θα υπολογίσουμε:

- περίοδο δειγματοληψίας,  $\omega_s$ , στο πεδίο των συχνοτήτων
- αριθμό  $M$  δειγμάτων του  $X(e^{j\omega})$

από τα οποία θα είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το  $X(e^{j\omega})$  για κάθε  $\omega$ .

Τα δείγματα που θα προκύψουν πρέπει να είναι αρκετά, ώστε να μπορούμε να ανακτήσουμε το MF για κάθε συχνότητα.

# Δειγματοληψία ΜF σήματος διακριτού χρόνου πεπερασμένης διάρκειας

---

Για τις  $M$  συχνότητες (δείγματα) ισχύει:

$$X(k) = X(e^{jk\omega_s}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega_s kn}, \quad 0 \leq k \leq M-1$$

Θεώρημα Nyquist: ισχύει και για δειγματοληψία στο πεδίο συχνοτήτων του ΜF σήματος διακριτού χρόνου

Προϋπόθεση: το σήμα στο πεδίο του χρόνου είναι πεπερασμένης διάρκειας  $N$

Πρέπει:  $\omega_s \leq 2\pi/N$

$$\text{Για } \omega_s = 2\pi/N, \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 0 \leq k \leq M-1$$

$X(k)$ : περιοδική (περίοδος  $N$ )

# Δειγματοληψία MF σήματος διακριτού χρόνου πεπερασμένης διάρκειας

---

Επιλέγοντας  $M=N$ , τα  $N$  δείγματα καλύπτουν μια πλήρη περίοδο της  $X(e^{j\omega})$

και αποτελούν δείγματα στις συχνότητες  $0, 2\pi/N, \dots, 2\pi(N-1)/N$ , από τα οποία μπορούμε να αναπαράγουμε τη  $X(e^{j\omega})$ , για κάθε τιμή του  $\omega$ .

- Τα δείγματα  $X(k)$  αναπαράγουν το MF της  $X(e^{j\omega})$ .
- Υπάρχει σχέση μέσω της οποίας μπορούμε να υπολογίσουμε την αρχική ακολουθία  $x(n)$ , απευθείας από τα δείγματα  $X(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

# Διακριτός ΜF (DFT)

---

Σχέσεις ανάλυσης και σύνθεσης του DFT (Discrete Fourier Transform) της ακολουθίας  $x(n)$ :

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, & k = 0, 1, \dots, N-1 \\ x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, & n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

FFT (Fast Fourier Transform): πολύ γρήγορος υπολογιστικός αλγόριθμος

-> υπολογίζει το DFT μιας ακολουθίας σε πολύ μικρότερο χρόνο από ότι θα απαιτούσε ο απευθείας υπολογισμός του

# Ιδιότητες DFT

---

## 1. Γραμμικότητα

Αν  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$  ακολουθίες πεπερασμένου μήκους  $N$  και

$$x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

όπου  $a$ ,  $b$  σταθερές, τότε:

$$X_3(k) = aX_1(k) + bX_2(k), \quad 0 \leq k \leq N-1$$

## 2. Ιδιότητες συμμετρίας

Αν  $x(n)$  πραγματική ακολουθία πεπερασμένου μήκους  $N$ ,

$$\operatorname{Re}[X(k)] = \operatorname{Re}[X(N-k)]$$

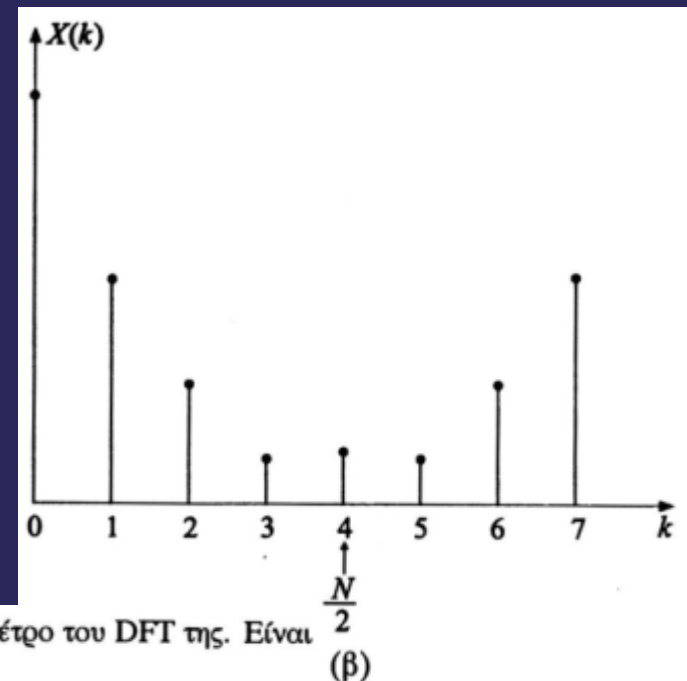
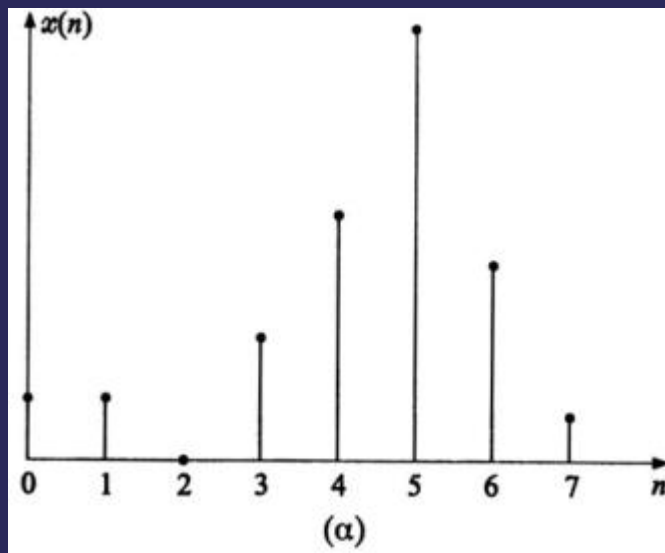
$$\operatorname{Im}[X(k)] = -\operatorname{Im}[X(N-k)]$$

# Ιδιότητες DFT

Μέτρο DFT: συμμετρική (ως προς  $N/2$ ) ακολουθία

Φάση DFT: αντισυμμετρική ακολουθία

Τιμές DFT για  $k \geq N/2$ : τα δείγματα του  $X(e^{j\omega})$  για αρνητικές τιμές του  $\omega$ , λόγω περιοδικότητας του ΜΦ της  $x(n)$



Σχήμα 6.1 (α) Πραγματική ακολουθία μήκους  $N = 8$ . (β) Το μέτρο του DFT της. Είναι συμμετρικό ως προς το  $\frac{N}{2} = 4$ .



# Ιδιότητες DFT

## 3. Πραγματικές και συμμετρικές ακολουθίες

Από το ορισμό του ζεύγους DFT, μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στα ακόλουθα:

$$\operatorname{Re}[X(k)] = \sum_{n=0}^N \left[ \operatorname{Re}[x(n)] \cos \frac{2\pi kn}{N} + \operatorname{Im}[x(n)] \sin \frac{2\pi kn}{N} \right]$$

$$\operatorname{Im}[X(k)] = -\sum_{n=0}^N \left[ \operatorname{Re}[x(n)] \sin \frac{2\pi kn}{N} - \operatorname{Im}[x(n)] \cos \frac{2\pi kn}{N} \right]$$

και

$$\operatorname{Re}[x(n)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \left[ \operatorname{Re}[X(k)] \cos \frac{2\pi kn}{N} - \operatorname{Im}[X(k)] \sin \frac{2\pi kn}{N} \right]$$

$$\operatorname{Im}[x(n)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \left[ \operatorname{Re}[X(k)] \sin \frac{2\pi kn}{N} + \operatorname{Im}[X(k)] \cos \frac{2\pi kn}{N} \right]$$

# Ιδιότητες DFT

---

Αν  $x(n)$ : πραγματική και συμμετρική,  $x(n) = x(N-n)$ ,  $0 < n \leq N-1$   
και επειδή η  $s(n) = \sin(2\pi kn/N)$  είναι αντισυμμετρική,  $s(n) = -s(N-n)$

προκύπτει από τις προηγούμενες σχέσεις:  $\text{Im}[X(k)] = 0$

Άρα και ο DFT: πραγματική ακολουθία και αντιστοιχεί στο μετασχηματισμό συνημιτόνου

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \frac{2\pi kn}{N}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cos \frac{2\pi kn}{N}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

# Ιδιότητες DFT

---

## 4. Πραγματικές αντισυμμετρικές ακολουθίες

Αν  $x(n)$ : πραγματική και αντισυμμετρική,  $x(n) = -x(N-n)$ ,  $0 \leq n \leq N-1$ ,

προκύπτει ότι  $\text{Re}[X(k)] = 0$

και

$$X(k) = -j \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin \frac{2\pi kn}{N}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$x(n) = \frac{j}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sin \frac{2\pi kn}{N}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

# Ιδιότητες DFT

## 5. Κυκλική ολίσθηση ακολουθίας

$x(n)$ : σήμα διακριτού χρόνου ορισμένο στο διάστημα  $0 \leq n \leq N-1$

**Χρονική ολίσθηση (γραμμική ολίσθηση)**: υπό τη συνήθη έννοια δεν θα είχε νόημα για σήματα σε πεπερασμένο διάστημα  $[0, N-1]$

Έστω ότι υπάρχει πληροφορία εκτός του παραθύρου  $[0, N-1]$   
→ μετά από κάθε ολίσθηση, το τμήμα του σήματος μέσα στο παράθυρο θα είναι διαφορετικό

**Κυκλική ολίσθηση**: του  $x(n)$  κατά  $m$  δείγματα είναι το σήμα  $x_{c,m}(n)$  που ορίζεται ως

$$x_{c,m}(n) \equiv ((n - m))_N$$

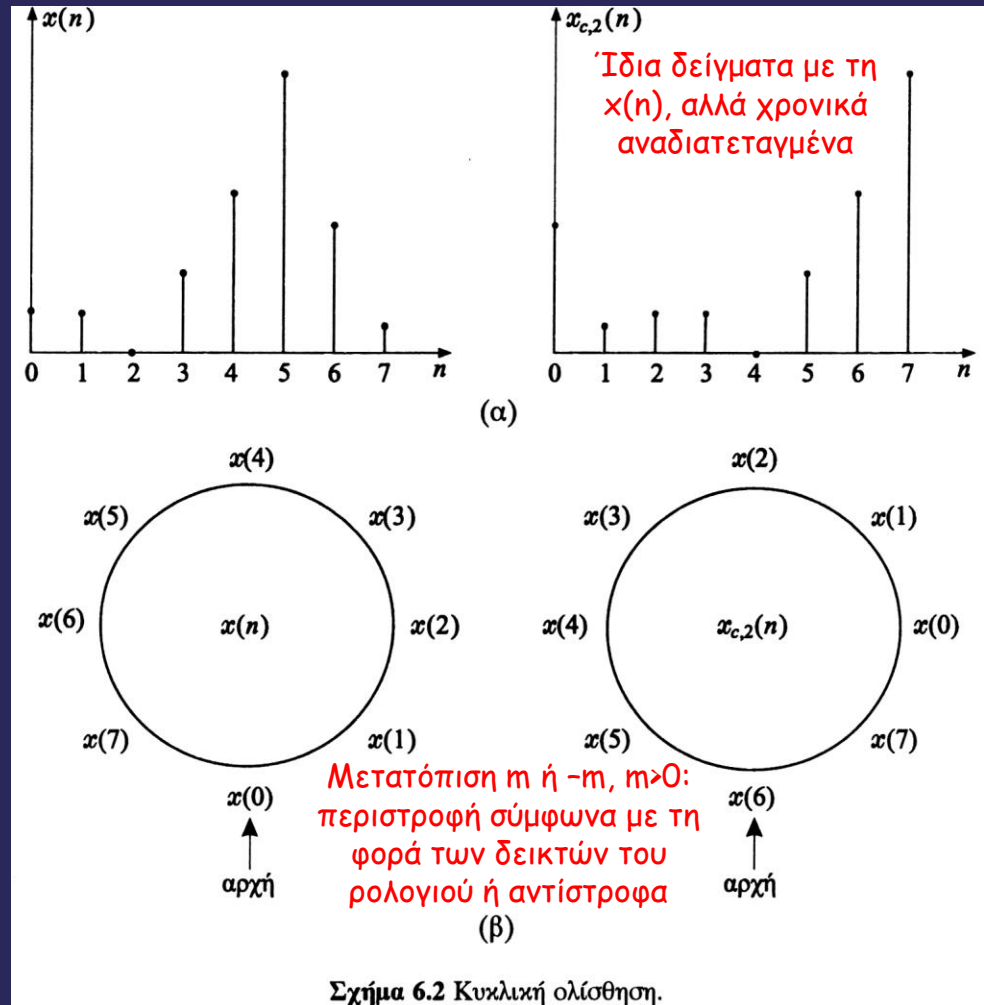
όπου

$$((n - m))_N = (n - m) \bmod N$$

# Ιδιότητες DFT

## Κυκλική ολίσθηση

ολίσθηση modulo  $N$ , που εξασφαλίζει πάντα ότι και μετά την ολίσθηση οι χρονικές στιγμές (δείκτες της ακολουθίας) παίρνουν τιμές πάνω στο διάστημα  $[0, N-1]$



# Ιδιότητες DFT

---

Από τις ιδιότητες της modulo  $N$  πράξης:

$$x_{c,m}(n) = x_{c,m+N}(n)$$

δηλαδή μετά από  $N$  διαδοχικές κυκλικές ολισθήσεις αναπαράγουμε την ίδια ακολουθία

Άλλη φυσική ερμηνεία της κυκλικής ολίσθησης:

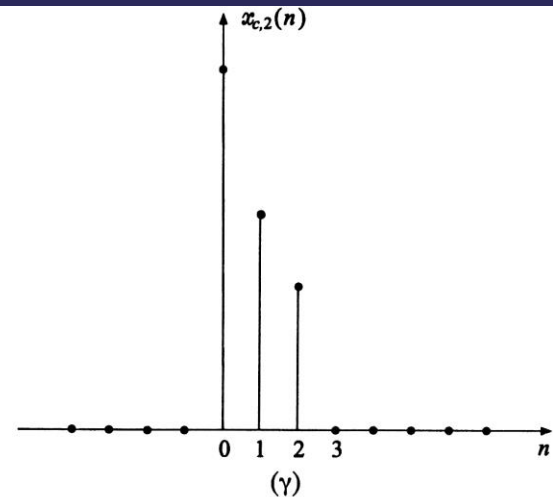
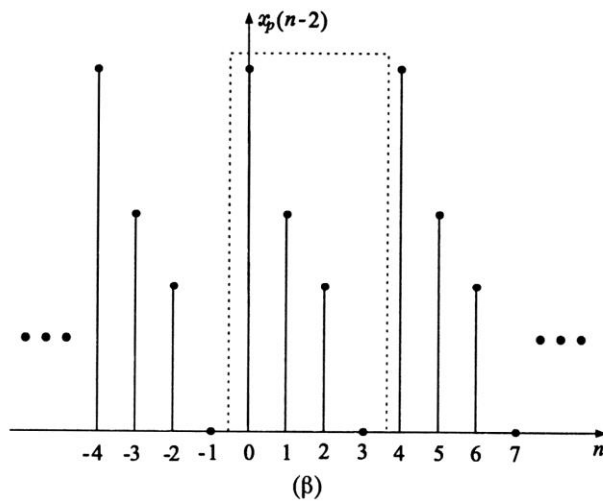
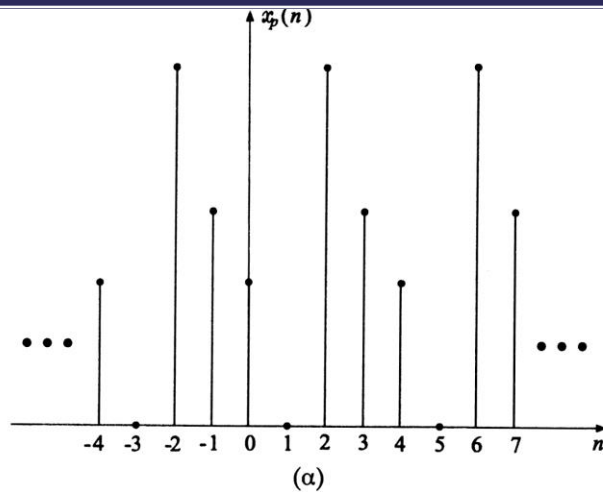
Έστω  $x(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$  η βασική περίοδος μιας περιοδικής ακολουθίας με περίοδο  $N$ :

$$x_p(n+rN) = x(n), 0 \leq n \leq N-1, r = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

Αν ολισθήσουμε τη  $x_p(n)$  κατά  $m$  δείγματα και κρατήσουμε τα δείγματα στο διάστημα  $[0, N-1] \rightarrow$  κυκλική ολίσθηση

$$x_{c,m}(n) = x_p(n-m), 0 \leq n \leq N-1$$

# Ιδιότητες DFT



**Σχήμα 6.3** (Συνεχ.) (γ) Η βασική περίοδος της  $x_p(n-2)$  είναι η  $x(n)$  κυκλικά ολισθημένη κατά 2, δηλαδή η  $x_{c,2}(n)$ .

**Σχήμα 6.3** (α) Περιοδική επέκταση  $x_p(n)$  ακολουθίας  $x(n)$  μήκους  $N=4$ . (β) Η  $x_p(n)$  ολισθημένη κατά 2:  $x_p(n-2)$ .

# Ιδιότητες DFT

---

Αν  $x(n) \leftrightarrow X(k)$

τότε  $x_{c,m}(n) \leftrightarrow X(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$

6. Κυκλική ολίσθηση στη συχνότητα

Αν  $x(n) \leftrightarrow X(k)$

τότε  $x(n)e^{j\frac{2\pi}{N}nm} \leftrightarrow X((k-m))_N$

7. Μιγαδική συζυγής ιδιότητα

Αν  $x(n) \leftrightarrow X(k)$

τότε  $x^*(n) \leftrightarrow X^*((-k))_N = X^*(N-k)$



# Κυκλική συνέλιξη

Έστω  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$ : ακολουθίες σημάτων που ορίζονται στο διάστημα  $[0, N-1]$ , με DFT  $X_1(k)$  και  $X_2(k)$ .

$$z(n) \leftrightarrow X_1(k)X_2(k)$$

Αποδεικνύεται ότι

$$z(n) = x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N$$

Το  $z(n)$  δεν αντιστοιχεί στην συνέλιξη των ακολουθιών, αλλά σε μία άλλη ακολουθία, την **κυκλική συνέλιξη**.

Κυκλική συνέλιξη: έχει τον ίδιο αριθμό δειγμάτων  $N$  με τις ακολουθίες  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$

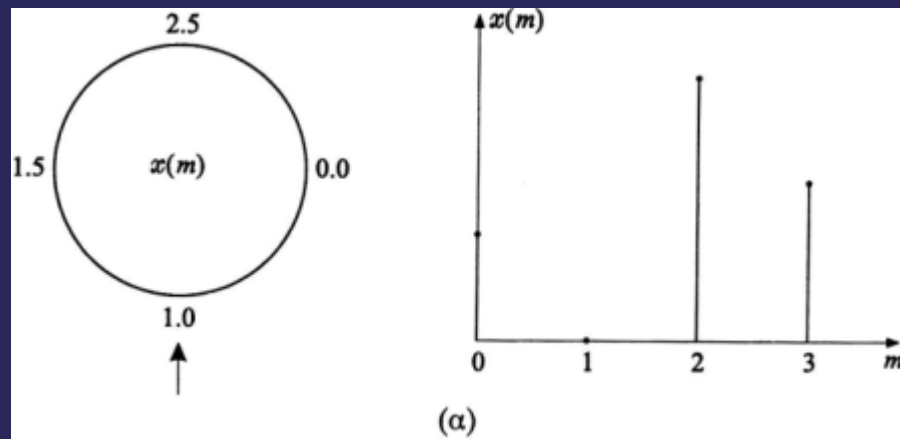
Υπολογισμός για  $n \geq N \rightarrow$  αναπαράγει περιοδικά τα δείγματα, λόγω της modulo  $N$  πράξης

# Κυκλική συνέλιξη

Να υπολογιστεί η κυκλική συνέλιξη,  $z(n)$ , των ακολουθιών:

$x(n)$ : 1, 0, 2.5, 1.5       $y(n)$ : 1, 1, 0.5, 2

$$z(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) y((n-m))_N$$

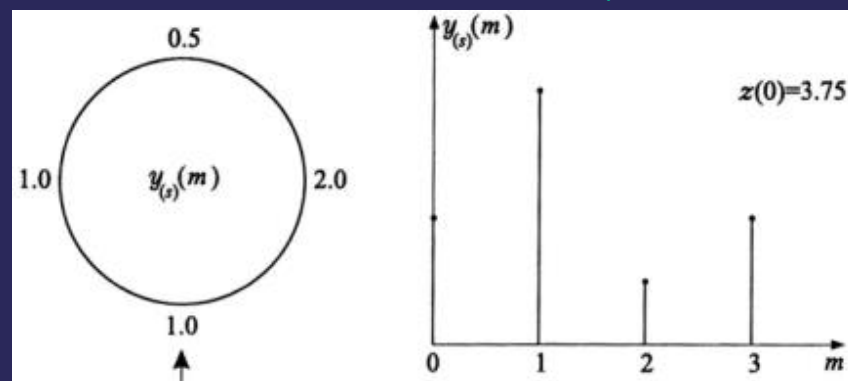
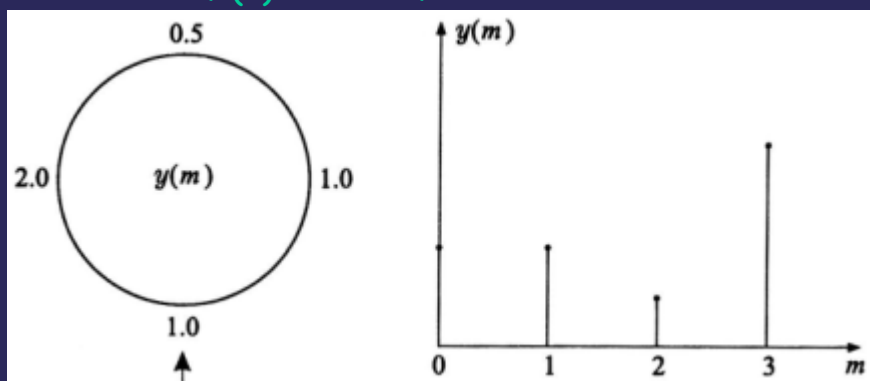


# Κυκλική συνέλιξη

## Υπολογισμός $z(n)$ για κάθε τιμή του $n$

- υπολογισμός  $y((n-m))_N$  για κάθε  $n \rightarrow$  η ακολουθία  $y((-m))_N$  ολισθημένη κάθε φορά κυκλικά κατά  $n$

$y_{(s)}(m) = y((-m))_N$ : κυκλικά κατοπτρική ακολουθία της  $y(m)$



$$y_{(s)}(0) = y((0))_4 = y(0) = 1$$

$$y_{(s)}(1) = y((-1))_4 = y(3) = 2$$

$$y_{(s)}(2) = y((-2))_4 = y(2) = 0.5$$

$$y_{(s)}(3) = y((-3))_4 = y(1) = 1$$

$$((-m))_N = N-m, \text{ για } m=1,2,3$$

$$((-m))_N = 0, \text{ για } m=0$$

# Κυκλική συνέλιξη

Υπολογισμός κυκλικής συνέλιξης για  $n = 0$

Πολλαπλασιασμός δειγμάτων των  $x(m)$ ,  $y_{(s)}(m)$  και άθροισμα

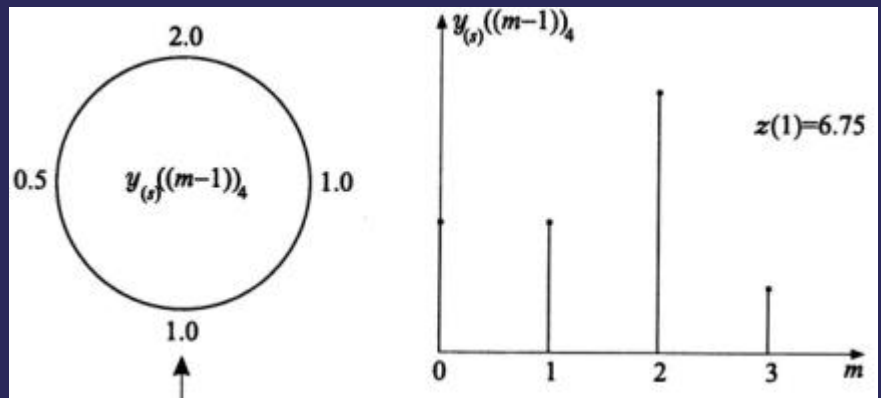
$$z(0) = 1 \times 1 + 0 \times 2 + 2.5 \times 0.5 + 1.5 \times 1 = 3.75$$

Υπολογισμός κυκλικής συνέλιξης για  $n = 1$

Κυκλική ολίσθηση της  $y_{(s)}(m)$ , στρέφοντας τον κύκλο μία θέση με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού

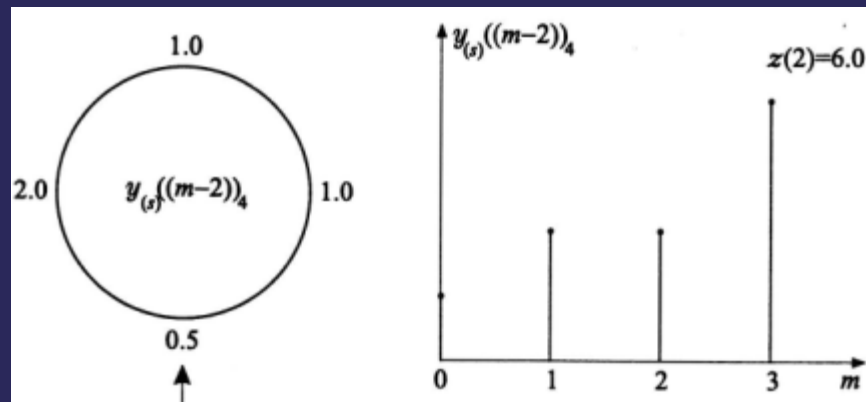
Πολλαπλασιασμός δειγμάτων  $x(m)$ ,  $y_{(s)}((m-1))_4$  και άθροισμα

$$\begin{aligned} z(1) &= 1 \times 1 + 0 \times 1 + \\ &\quad 2.5 \times 2 + 1.5 \times 0.5 \\ &= 6.75 \end{aligned}$$

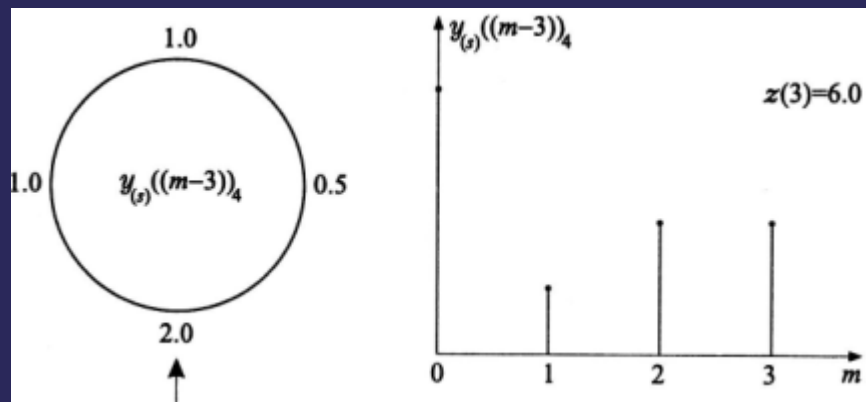


# Κυκλική συνέλιξη

## Υπολογισμός κυκλικής συνέλιξης για $n = 2, 3$



$$z(2) = 1 \times 0.5 + 0 \times 1 + 2.5 \times 1 + 1.5 \times 2 = 6$$



$$z(3) = 1 \times 2 + 0 \times 0.5 + 2.5 \times 1 + 1.5 \times 1 = 6$$

# Θεώρημα Parseval

Ο υπολογισμός της ενέργειας (ή ισχύος) στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο του εκάστοτε μετασχηματισμού δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Αποδεικνύεται ότι αν  $x(n) \leftrightarrow X(k)$  και  $y(n) \leftrightarrow Y(k)$

τότε

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$$

Θέτοντας  $x(n) = y(n)$ , προκύπτει η ακόλουθη μορφή του Θεωρήματος Parseval:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

Η ενέργεια του σήματος ισούται με την ενέργεια των δειγμάτων του DFT διαιρεμένη με το N.

# Σχέση κυκλικής και γραμμικής συνέλιξης

---

Έστω δύο ακολουθίες  $x(n)$  και  $y(n)$ , πεπερασμένου μήκους  $N$ .

MF: 
$$x(n) * y(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$$

DFT: 
$$x(n) \otimes y(n) \leftrightarrow X(k)Y(k)$$

Τα  $N$  δείγματα του γινομένου  $X(k)Y(k)$  δεν έχουν αντίστροφο DFT τη γραμμική συνέλιξη, αλλά την κυκλική.

$N$  δείγματα των DFT των  $x(n)$  και  $y(n)$ : αρκετά για αναπαραγωγή των MF  $X(e^{j\omega})$  και  $Y(e^{j\omega})$ , αλλά και των αρχικών ακολουθιών

Μήκος γραμμικής συνέλιξης:  $2N-1$  ( $M+N-1$  για ακολουθίες μήκους  $M$  και  $N$ )

# Σχέση κυκλικής και γραμμικής συνέλιξης

---

Δειγματοληψία MF συνέλιξης  $X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$ : απόσταση δειγμάτων το πολύ  $2\pi/(2N-1)$

$N$  δείγματα  $X(k)Y(k)$ : αντιστοιχούν σε συχνότητα δειγματοληψίας  $\omega_s = 2\pi/N$

-> υποδειγματοληψία (τα δείγματα έχουν μεταξύ τους απόσταση σχεδόν διπλάσια από τη μέγιστη που επιτρέπει το θεώρημα του Nyquist)

-> απώλεια πληροφορίας

Άρα αντίστροφος μετασχηματισμός -> όχι την αρχική ακολουθία της συνέλιξης, αλλά την κυκλική συνέλιξη

Κυκλική συνέλιξη: αποτέλεσμα επικάλυψης περιοδικών επαναλήψεων (με περίοδο  $N$ ) στο πεδίο του χρόνου της αρχικής ακολουθίας της γραμμικής συνέλιξης



# Σχέση κυκλικής και γραμμικής συνέλιξης

## Αντιμετώπιση

Πριν τον υπολογισμό των MF των  $x(n)$  και  $y(n)$ , αυξάνουμε το μήκος τους κατά  $N$  (ή  $N-1$ ), με την προσθήκη μηδενικών (**zero-padding**).

π.χ.  $x_e(n)$ :  $x(0), x(1), \dots, x(N-1), \underbrace{0, 0, \dots, 0}_N$

Προσθήκη μηδενικών:  $N$

-> δεν αλλάζει τους αντίστοιχους MF

-> οι αντίστοιχοι DFT διαφοροποιούνται και η περίοδος δειγματοληψίας είναι τώρα  $2\pi/2N$  (σε αρμονία με το κριτήριο του Nyquist) και δεν δημιουργούνται επικαλύψεις

$$x(n) * y(n) = x_e(n) \otimes y_e(n) \leftrightarrow X_e(k)Y_e(k)$$