

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ»

1. Εισαγωγικές έννοιες – Μετασχηματισμός Fourier

Άσκηση 1: Το Gaussian φάσμα

Ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα εκπέμπει Gaussian παλμούς της μορφής $x(t)=P_0^{1/2}\exp(-t^2/t_0^2/2)$. Οι παλμοί έχουν πλήρες χρονικό εύρος στα 3dB ίσο με 10ns ενώ η ισχύς κορυφής είναι $P_0=100\text{mW}$.

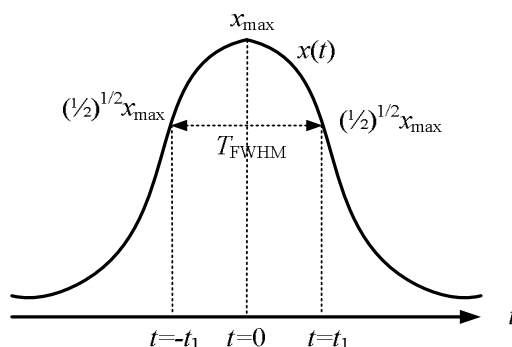
α) να υπολογιστεί η παράμετρος t_0 των παλμών.

β) να υπολογιστεί το πλήρες φασματικό εύρος στα 3dB του σήματος.

γ) να βρεθεί ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης έτσι ώστε η ενέργεια παρεμβολής κάθε ένα από τα γειτονικά bit να μην ξεπερνά το 1% της ενέργειας του παλμού στο τρέχον bit.

Λύση:

α) Δίνεται πως το πλήρες χρονικό εύρος στα 3dB των παλμών είναι $T_{\text{FWHM}}=10\text{ns}$.



Το TFWHM είναι η διάρκεια που μεσολαβεί μεταξύ των δύο χρονικών στιγμών όπου η ισχύς του σήματος είναι 50% της μέγιστης ισχύος. Ο Gaussian παλμός είναι συμμετρικός και έχει το μέγιστο του στο $t=0$.

Αυτό σημαίνει ότι αν $t_1=T_{\text{FWHM}}/2$ τότε

$$x^2(t_1) = x^2(-t_1) = \frac{1}{2} x_{\text{max}}^2 \quad (1)$$

όπου x_{max} είναι το μέγιστο πλάτος του παλμού που στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι το $x(0)=P_0^{1/2}$. Αντικαθιστώντας την εξίσωση του Gaussian παλμού που δίνεται από την εκφώνηση έχουμε

$$P_0 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{P_0} \exp(-t_1^2 / t_0^2 / 2) \right]^2 = \frac{1}{2} P_0 \exp(-t_1^2 / t_0^2) \quad (2)$$

και επομένως,

$$\frac{t_1}{t_0} = \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow t_1 = \frac{t_0}{\ln 2} = 14,42\text{ns} \quad (3)$$

Η διάρκεια T_{FWHM} είναι $T_{\text{FWHM}}=2t_1=28,84\text{ns}$.

β) Για να υπολογίσουμε το πλήρες φασματικό εύρος του σήματος στα 3dB θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το φάσμα του σήματος μέσω του μετασχηματισμού Fourier. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τους πίνακες. Δείτε π.χ. τον πίνακα στη διαφάνεια 25 ο οποίος μας υποδεικνύει ότι ο μετασχηματισμός Fourier του $y(t)=\exp(-\pi t^2)$ είναι ο $Y(f)=\exp(-\pi f^2)$. Δεδομένου ότι

$$x(t) = \sqrt{P_0} \exp(-t^2 / 2 / t_0^2) = \sqrt{P_0} \exp\left(-\pi t^2 \frac{1}{2\pi t_0^2}\right) = \sqrt{P_0} y\left(\frac{t}{t_0 \sqrt{2\pi}}\right) \quad (4)$$

μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της χρονικής κλίμακας για το μετασχηματισμό Fourier η οποία λέει ότι

$$X(f) = F\{bx(t)\} = bF\{y(at)\} = \frac{b}{|a|} Y\left(\frac{f}{a}\right) \quad (5)$$

όπου στην περίπτωση μας σύμφωνα με την (4) έχουμε

$$a = \frac{1}{t_0 \sqrt{2\pi}} \quad (6)$$

$$b = \sqrt{P_0} \quad (7)$$

οπότε βρίσκουμε

$$X(f) = \frac{b}{|a|} Y\left(\frac{f}{a}\right) = t_0 \sqrt{2\pi P_0} \exp(-2\pi t_0^2 f^2) \quad (8)$$

Επομένως το φάσμα του Gaussian παλμού είναι

$$X(f) = t_0 \sqrt{2\pi P_0} \exp(-2\pi t_0^2 f^2) \quad (9)$$

και είναι συμμετρικό ως προς το $f=0$ στο οποίο λαμβάνει την μέγιστη τιμή του $X_{\max}=t_0(2\pi P_0)^{1/2}$. Το φασματικό εύρος 3dB βρίσκεται με την ίδια λογική όπως και την περίπτωση του ερωτήματος (α). Δηλαδή βρίσκουμε το f_1 για το οποίο

$$|X(f_1)|^2 = |X(-f_1)|^2 = \frac{1}{2} X_{\max}^2 \quad (10)$$

το οποίο στην περίπτωση μας μεταφράζεται σε

$$X_{\max}^2 = 2\pi t_0^2 P_0 = \frac{1}{2} |X(f_1)|^2 = \pi P_0 t_0^2 \exp(-4\pi t_0^2 f_1^2) \quad (11)$$

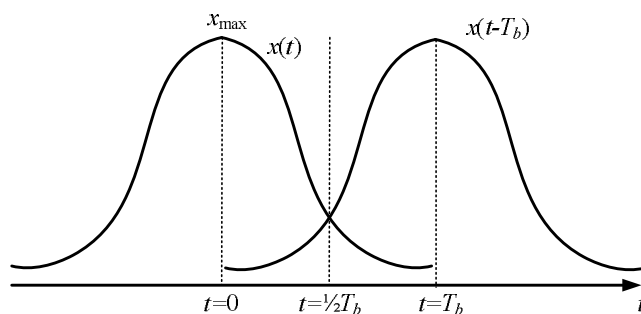
από όπου βρίσκουμε

$$\exp(-4\pi t_0^2 f_1^2) = \frac{1}{2} \Rightarrow 4\pi t_0^2 f_1^2 = \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow f_1^2 = \frac{1}{4\pi t_0^2 \ln 2} \quad (12)$$

και επομένως

$$f_1 = 33,88\text{MHz} \quad (13)$$

οπότε το πλήρες εύρος φασματικής ισχύος στα 3dB είναι $B_{\text{FWHM}}=2f_1=67,76\text{MHz}$.



γ) Θα πρέπει να υπολογίσουμε την ενέργεια του παλμού η οποία προέρχεται από το γειτονικό bit. Αν υποθέσουμε πως η διάρκεια bit είναι ίση με T_b τότε είναι προφανές πως η ενέργεια του παλμού που αντιστοιχεί στο bit $i=0$ είναι δίνεται από την σχέση

$$E_0 = \int_{-T_b/2}^{T_b/2} x^2(t) dt = 2 \int_0^{T_b/2} x^2(t) dt = 2P_0 \int_0^{T_b/2} \exp\left(-\frac{t^2}{t_0^2}\right) dt \quad (14)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό μπορεί να υπολογιστεί μέσω της συνάρτησης $Q(x)$ η οποία ορίζεται ως

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \quad (15)$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\int_c^d \exp\left(-\frac{t^2}{t_0^2}\right) dt = \frac{2\sqrt{\pi}}{t_0} \int_{c\sqrt{2}/t_0}^{d\sqrt{2}/t_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{2\sqrt{\pi}}{t_0} \left(Q\left(\frac{c\sqrt{2}}{t_0}\right) - Q\left(\frac{d\sqrt{2}}{t_0}\right) \right) \quad (16)$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει:

$$x = \frac{t\sqrt{2}}{t_0} \quad (17)$$

Επομένως σύμφωνα με την (14),

$$E_0 = \frac{8P_0\sqrt{\pi}}{t_0} \left(Q(0) - Q\left(\frac{T_b\sqrt{2}}{t_0}\right) \right) = \frac{8P_0\sqrt{\pi}}{t_0} \left(\frac{1}{2} - Q\left(\frac{T_b\sqrt{2}}{t_0}\right) \right) \quad (18)$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε την ενέργεια του παλμού του bit $i=0$ η οποία εισέρχεται στο bit $i=1$ το οποίο διαρκεί από $T_b/2$ έως $3T_b/2$,

$$E_1 = \int_{T_b/2}^{3T_b/2} x^2(t) dt = \frac{4P_0\sqrt{\pi}}{t_0} \left(Q\left(\frac{T_b\sqrt{2}}{t_0}\right) - Q\left(\frac{3T_b\sqrt{2}}{t_0}\right) \right) \quad (19)$$

Για ευκολία μπορούμε να θεωρήσουμε ότι

$$Q\left(\frac{3T_b\sqrt{2}}{t_0}\right) \cong 0 \quad (20)$$

δηλαδή ότι ο παλμός του bit $i=0$ έχει σχεδόν “σβήσει” όταν στο τέλος του bit $i=1$. Η απαίτηση να έχουμε 1% της ενέργειας του παλμού στο γειτονικό bit μεταφράζεται σε $E_1/E_0=0.01$. Θέτοντας

$$Q\left(\frac{T_b\sqrt{2}}{t_0}\right) = q \quad (21)$$

παίρνουμε

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{q}{1-2q} = 0.01 \quad (22)$$

από όπου βρίσκουμε ότι

$$Q\left(\frac{T_b\sqrt{2}}{t_0}\right) = q = 0.0102 \quad (23)$$

και επομένως χρησιμοποιώντας τους πίνακες της συνάρτησης Q (π.χ. δείτε διαφάνεια 41), βρίσκουμε ότι

$$\frac{T_b\sqrt{2}}{t_0} \cong 2.5 \Rightarrow R_b = \frac{1}{T_b} = \frac{\sqrt{2}}{2.5t_0} \cong 56,6 \text{ Mb/s} \quad (24)$$

Άσκηση 2: Φάσμα διαμόρφωσης

Θεωρούμε έναν ορθογώνιο παλμό $x(t)$ με πλάτος $A=1V$ ο οποίος έχει διάρκεια $T_a=100ns$ και ο οποίος αποτυπώνεται σε ένα φέρον $B\cos(2\pi f_c t)$ με $f_c=500MHz$ και πλάτος $B=0,4V$.

α) να σχεδιαστεί γραφικά το φάσμα του σήματος $y(t)$ που περιγράφει την αποτύπωση του σήματος $x(t)$ στο εν λόγω φέρον.

β) να βρεθεί η συχνότητα στην οποία η φασματική ισχύς του σήματος μεγιστοποιείται καθώς και οι πλησιέστερες συχνότητες μηδενισμού του φάσματος δεξιά και αριστερά της συχνότητας αυτής.

Λύση:

Για να βρούμε το φάσμα του σήματος $y(t)$ χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι

$$y(t) = Bx(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (25)$$

Το συνημίτονο αναλύεται ως:

$$\cos(2\pi f_c t) = \frac{e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}}{2} \quad (26)$$

και επομένως

$$y(t) = \frac{1}{2} Bx(t) \exp(j2\pi f_c t) + \frac{1}{2} Bx(t) \exp(-j2\pi f_c t) \quad (27)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier, έχουμε:

$$F\{x(t)e^{j2\pi f_c t}\} = X(f - f_c) \quad (28)$$

$$F\{x(t)e^{-j2\pi f_c t}\} = X(f + f_c) \quad (29)$$

όπου

$$X(f) = F\{x(t)\} \quad (30)$$

και επομένως:

$$Y(f) = \frac{1}{2} BX(f - f_c) + \frac{1}{2} BX(f + f_c) \quad (31)$$

Το φάσμα του σήματος $x(t)$ θα είναι της μορφής sinc. Για να το υπολογίσουμε ακριβώς, γράφουμε το $x(t)$ ως εξής:

$$x(t) = A\Pi(t/T_a) \quad (32)$$

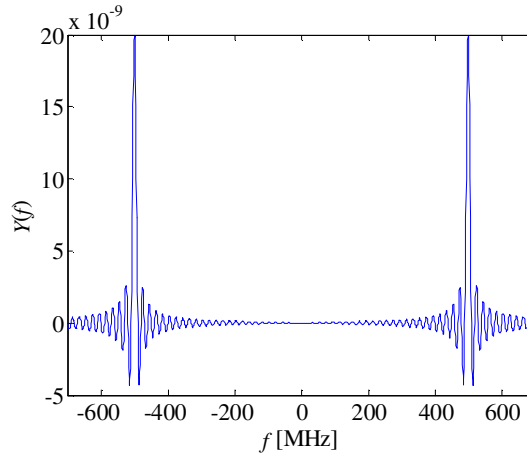
Δεδομένου η συνάρτηση $\Pi(t)$ έχει φάσμα $\text{sinc}(f)$ έπεται από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier ότι:

$$X(f) = AT_a \text{sinc}(T_a f) \quad (33)$$

Επομένως

$$Y(f) = \frac{1}{2} BAT_a \text{sinc}(T_a (f - f_c)) + \frac{1}{2} BAT_a \text{sinc}(T_a (f + f_c)) \quad (34)$$

Η γραφική παράσταση του φάσματος προκύπτει από την (34) και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



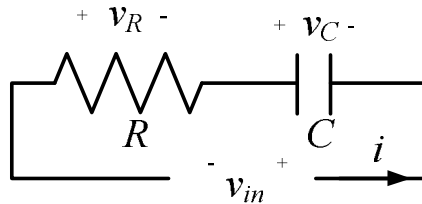
Το φάσμα του σήματος αποτελείται όπως αναμενόταν από δύο μετατοπισμένες συναρτήσεις sinc οι οποίες έχουν τα μέγιστα τους στο $f = \pm f_c = \pm 500 \text{ MHz}$.

β) Ο πρώτος μηδενισμός αριστερά και δεξιά του κάθε μέγιστου προκύπτει από τους μηδενισμούς του sinc. Δεδομένου ότι $\text{sinc}(x-a) = \sin(\pi(x-a))/(\pi(x-a))$ για $x \neq a$, έχουμε ότι ο πρώτος μηδενισμός του $\text{sinc}(x-a)$ δεξιά του a συμβαίνει στο $x=a+1$ ενώ ο πρώτος μηδενισμός δεξιά του a βρίσκεται στο $x=a-1$. Επομένως εφόσον στην περίπτωση μας $x=T_d f$ και $a=T_d f_c$ έχουμε

$$T_d f - T_d f_c = \pm 1 \Rightarrow f = f_c \pm 1/T_d = 500 \text{ MHz} \pm 10 \text{ MHz} \quad (35)$$

Άσκηση 3: Φίλτρο RC

Δίνεται ένα κύκλωμα που αποτελείται από μία αντίσταση $R=1\text{k}\Omega$ και έναν πυκνωτή $C=1/(2\pi) \mu\text{F}$. Υποθέτουμε πως η τάση εισόδου $v_{in}(t)$ εισάγεται στα άκρα του πυκνωτή και της αντίστασης ενώ η δε έξοδος $v_c(t)$ λαμβάνεται πάνω στον πυκνωτή.



Να υπολογιστούν:

α) Η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος.

β) Η έξοδος του κυκλώματος όταν η τάση εισόδου είναι $v_{in}(t) = V_0 \cos(2\pi f_c t + \pi/3)$ όπου $V_0=3\text{V}$ και $f_c=1\text{kHz}$.

γ) Η κρουστική απόκριση του συστήματος.

Λύση:

α) Δεδομένου ότι ο πυκνωτής και η αντίσταση διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα i θα έχουμε:

$$i = C \frac{dv_c}{dt} = \frac{v_R}{R} = \frac{v_{in} - v_c}{R} \quad (36)$$

επομένως η εξίσωση που διέπει την είσοδο και την έξοδο είναι η:

$$RC \frac{dv_c}{dt} + v_c = v_{in} \quad (37)$$

Για να υπολογίσουμε την συνάρτηση μεταφοράς $H(f)$ του κυκλώματος χρησιμοποιούμε την σχέση:

$$H(f) = \frac{V_c(f)}{V_{in}(f)} \quad (38)$$

όπου $V_c(f)$ και $V_{in}(f)$ είναι τα φάσματα των v_c και $v_{in}(t)$ αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το φάσμα του dv_c/dt είναι ίσο με

$$F\left\{\frac{dv_c}{dt}\right\} = j2\pi f V_c(f) \quad (39)$$

έπεται ότι

$$F\left\{RC\frac{dv_c}{dt} + v_c\right\} = F\{v_{in}\} \Rightarrow RCF\left\{\frac{dv_c}{dt}\right\} + F\{v_c\} = F\{v_{in}\} \Rightarrow (j2\pi fRC + 1)V_c(f) = V_{in}(f) \quad (40)$$

από όπου προκύπτει ότι

$$H(f) = \frac{V_c(f)}{V_{in}(f)} = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} \quad (41)$$

όπου $RC = 1\text{k}\Omega \times 1\mu\text{F} / (2\pi) = 10^{-3}\text{s} / (2\pi) = 1/(2\pi) \text{ ms}$.

β) Υπολογίζουμε καταρχήν το φάσμα του σήματος εισόδου. Έχουμε:

$$V_{in}(f) = F\{v_{in}(t)\} = F\{V_0 \cos(2\pi f_c t + \pi/3)\} \quad (42)$$

Δεδομένου ότι

$$\cos(at + b) = \frac{1}{2} \{e^{jat + jb} + e^{-jat - jb}\} \quad (43)$$

έχουμε

$$F\{\cos(2\pi at + b)\} = \frac{1}{2} \{F\{e^{j2\pi at + jb}\} + F\{e^{-j2\pi at - jb}\}\} = \frac{e^{jb}}{2} \delta(f - a) + \frac{e^{-jb}}{2} \delta(f + a) \quad (44)$$

επομένως

$$V_{in}(f) = V_0 \frac{e^{j\pi/3}}{2} \delta(f - f_c) + V_0 \frac{e^{-j\pi/3}}{2} \delta(f + f_c) \quad (45)$$

Το φάσμα εξόδου σύμφωνα με την (41) είναι

$$V_c(f) = H(f)V_{in}(f) = H(f) \left[V_0 \frac{e^{j\pi/3}}{2} \delta(f - f_c) + V_0 \frac{e^{-j\pi/3}}{2} \delta(f + f_c) \right] \quad (46)$$

δεδομένου ότι η συνάρτηση $\delta(f \pm f_c)$ είναι μηδέν για $f \neq \pm f_c$ θα έχουμε:

$$V_c(f) = \left[H(f_c)V_0 \frac{e^{j\pi/3}}{2} \delta(f - f_c) + H(-f_c)V_0 \frac{e^{-j\pi/3}}{2} \delta(f + f_c) \right] \quad (47)$$

Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό Fourier μέσω πινάκων,

$$v_c(t) = H(f_c)V_0 \frac{e^{j2\pi f_c t + j\pi/3}}{2} + H(-f_c)V_0 \frac{e^{-j2\pi f_c t - j\pi/3}}{2} = \text{Re} \left\{ H(f_c)V_0 \frac{e^{j2\pi f_c t + j\pi/3}}{2} \right\} \quad (48)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και το γεγονός ότι $H(f) = -(H(-f))^*$. Επίσης έχουμε

$$H(f_c) = \frac{1}{1 + j2\pi f_c RC} = \frac{1}{1 + j} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\frac{7\pi}{4}} \quad (49)$$

οπότε

$$v_c(t) = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \text{Re} \left\{ e^{j2\pi f_c t + j\pi/3 + j7\pi/4} \right\} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \text{Re} \left\{ e^{j2\pi f_c t + j25\pi/12} \right\} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \text{Re} \left\{ e^{j2\pi f_c t + j\pi/12} \right\} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \cos \left(2\pi f_c t + \frac{\pi}{12} \right) \quad (50)$$

Παρατηρούμε δηλαδή πως το κύκλωμα επιδρά τόσο στη φάση όσο και πλάτος του σήματος. Το πλάτος του σήματος από $V_0=3V$ γίνεται $V_0 / \sqrt{2} \cong 2.1V$.

γ) για να βρούμε την κρουστική απόκριση του σήματος αρκεί να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της $H(f)$. Σύμφωνα με τους πίνακες,

$$h(t) = F^{-1} \{ H(f) \} = F^{-1} \left\{ \frac{1}{1 + j2\pi fRC} \right\} = F^{-1} \left\{ \frac{(RC)^{-1}}{(RC)^{-1} + j2\pi f} \right\} = (RC)^{-1} e^{-t/RC} u(t) \quad (51)$$

όπου

$$u(t) = \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ 0 & , t \leq 0 \end{cases} \quad (52)$$

2. Εισαγωγικές έννοιες – Τυχαίες κατανομές και διαδικασίες

Άσκηση 1: Μετασχηματισμός Gaussian μεταβλητών

Έστω X και Y δύο τυχαίες Gaussian διαδικασίες μηδενικής μέσης τιμής και διακύμανσης ίσης με $\sigma=1$. Να διαπιστωθεί κατά πόσο οι μεταβλητές Z και W που δίνονται από την σχέση

$$\begin{bmatrix} Z \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (1)$$

είναι ανεξάρτητες ή όχι, να υπολογιστεί η μέση τιμή των Z και W , καθώς και η διακύμανση τους και η συνδυασμένη PDF τους. Η γωνία θ είναι γνωστή και ίση με $\pi/4$.

Λύση:

Η (1) συνεπάγεται ότι

$$Z = X \cos \theta + Y \sin \theta \quad (2)$$

$$W = -X \sin \theta + Y \cos \theta \quad (3)$$

Για να υπολογίσουμε την μέση τιμή των Z και W έχουμε:

$$\bar{Z} = E\{Z\} = E\{X \cos \theta + Y \sin \theta\} = \cos \theta E\{X\} + \sin \theta E\{Y\} = 0 \quad (4)$$

εφόσον οι X και Y είναι μηδενικής μέσης τιμής οπότε $E\{X\}=E\{Y\}=0$. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε:

$$\bar{W} = E\{W\} = E\{-X \sin \theta + Y \cos \theta\} = -\sin \theta E\{X\} + \cos \theta E\{Y\} = 0 \quad (5)$$

Οι διακυμάνσεις των Z και W δίνονται από την σχέση:

$$\sigma_Z^2 = E\{(Z - \bar{Z})^2\} = E\{Z^2\} \quad (6)$$

$$\sigma_W^2 = E\{(W - \bar{W})^2\} = E\{W^2\} \quad (7)$$

Επομένως έχουμε:

$$E\{Z^2\} = E\{(X \cos \theta + Y \sin \theta)^2\} = E\{X^2\} \cos^2 \theta + E\{Y^2\} \sin^2 \theta + 2E\{XY\} \cos \theta \sin \theta \quad (8)$$

Δεδομένου ότι οι X και Y είναι ανεξάρτητες:

$$E\{XY\} = E\{X\} E\{Y\} = 0 \quad (9)$$

Επομένως

$$\sigma_z^2 = E\{Z^2\} = \sigma^2 \cos^2 \theta + \sigma^2 \sin^2 \theta = \sigma^2 = 1 \quad (10)$$

Ομοίως:

$$E\{W^2\} = E\{(-X \sin \theta + Y \cos \theta)^2\} = E\{X^2\} \sin^2 \theta + E\{Y^2\} \cos^2 \theta - 2E\{XY\} \cos \theta \sin \theta \quad (11)$$

από όπου προκύπτει

$$\sigma_w^2 = E\{W^2\} = 1 \quad (12)$$

Για να διαπιστώσουμε κατά πόσο οι Z και Y είναι ανεξάρτητες, χρησιμοποιούμε το γεγονός πως είναι γραμμικός συνδυασμός δύο Gaussian μεταβλητών και επομένως είναι και αυτές Gaussian. Δύο Gaussian μεταβλητές είναι ανεξάρτητες εάν και μόνο εάν η συμμεταβολή τους είναι ίση με μηδέν, δηλαδή εάν

$$\text{COV}(Z, W) = E\{ZW\} - \bar{Z}\bar{W} = 0 \quad (13)$$

Στην περίπτωση μας εφόσον οι μεταβλητές έχουν μηδενική μέση τιμή αρκεί να δείξουμε ότι

$$E\{ZW\} = 0 \quad (14)$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} E\{ZW\} &= E\{(X \cos \theta + Y \sin \theta)(-X \sin \theta + Y \cos \theta)\} = \\ &= -E\{X^2\} \cos \theta \sin \theta + 2E\{XY\}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + E\{Y^2\} \cos \theta \sin \theta \end{aligned} \quad (15)$$

Χρησιμοποιώντας την (9) και το γεγονός πως $E\{X^2\}=E\{Y^2\}=\sigma^2$ προκύπτει η (14) επομένως οι Z και W είναι ανεξάρτητες.

Η πυκνότητα πιθανότητας των Z και W καθορίζεται πλήρως από την μέση τιμή και την διακύμανση τους εφόσον είναι Gaussian. Έχουμε:

$$f_z(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z - \bar{Z})^2}{2\sigma_z^2}\right) \quad (16)$$

Στην περίπτωση μας έχουμε $\bar{Z} = 0$ και $\sigma_z^2 = \sigma^2 = 1$ οπότε

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \quad (17)$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η PDF του W είναι

$$f_w(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) \quad (18)$$

Εφόσον οι μεταβλητές είναι ανεξάρτητες, η συνδυασμένη PDF είναι το γινόμενο των επιμέρους PDF, δηλαδή,

$$f_{z,w}(z, w) = f_z(z)f_w(w) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{w^2 + z^2}{2}\right) \quad (19)$$

Άσκηση 2: Φιλτραρισμένος Gaussian Θόρυβος

Δίνεται το παρακάτω σύστημα που αποτελείται από μία αντίσταση $R=1\text{k}\Omega$ τοποθετημένη σε σειρά με ένα πυκνωτή με χωρητικότητα $C=(1/2\pi)\text{ }\mu\text{F}$. Στην είσοδο του κυκλώματος έχουμε μία τάση

$$v_{in}(t) = V_0 \cos(2\pi f_c t) + n(t) \quad (20)$$

όπου $V_0=2\text{V}$, $f_c=1\text{kHz}$ και $n(t)$ μία λευκή Gaussian τυχαία διαδικασία με φασματική πυκνότητα ισχύος $N_0/2=10^{-11}\text{W/Hz}$. Η έξοδος του κυκλώματος λαμβάνεται πάνω στον πυκνωτή. Να υπολογιστούν:

- α) η φασματική πυκνότητα ισχύος του θορύβου στην έξοδο του κυκλώματος.
 β) η μέση ισχύς του θορύβου
 γ) η συνάρτηση συσχέτισης του θορύβου
 δ) το μέσο πηλίκιο σήμα προς θόρυβο μετρούμενο σε μία περίοδο του σήματος $T=1/f_c$.

Λύση:

α) Η φασματική πυκνότητα του θορύβου εξόδου $S_{out}(f)$ καθορίζεται από την φασματική πυκνότητα εισόδου $S_{in}(f)$ και την συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου $H(f)$ την οποία έχουμε υπολογίσει και σε προηγούμενη άσκηση ότι είναι ίση με

$$H(f) = \frac{V_c(f)}{V_{in}(f)} = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} \quad (21)$$

Η σχέση που διέπει την $S_{out}(f)$ είναι (δείτε π.χ. διαφάνεια 58):

$$S_{out}(f) = S_{in}(f) |H(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \frac{1}{1 + 4\pi^2 (RC)^2 f^2} \quad (22)$$

Αντικαθιστώντας $4\pi^2(RC)^2 = 1\text{ms}^2$ έχουμε:

$$S_{out}(f) = 10^{-11} \frac{\text{W}}{\text{Hz}} \frac{1}{1 + 10^{-3} f^2} \quad (23)$$

όπου το f μετριέται σε Hz.

β) Η μέση ισχύς του θορύβου δίνεται από την σχέση:

$$P_{out} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{out}(f) df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 (RC)^2 f^2} df \quad (24)$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή,

$$\int_a^b \frac{1}{1 + c^2 x^2} dx = \frac{1}{c} \left[\tan^{-1} \frac{b}{c} - \tan^{-1} \frac{a}{c} \right] \quad (25)$$

Επειδή $\tan^{-1}(+\infty) = \pi/2$ και $\tan^{-1}(-\infty) = -\pi/2$ έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + c^2 x^2} dx = \frac{\pi}{c} \quad (26)$$

και επομένως:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 (RC)^2 f^2} df = \frac{1}{2RC} \quad (27)$$

Τελικά η ισχύς θα είναι

$$P_{out} = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2RC} = 10^{-11} \frac{\text{W}}{\text{Hz}} \times \frac{1}{2 \times 10^{-3} \text{s}} = 5 \times 10^{-9} \text{W} = 5 \text{nW} \quad (28)$$

γ) Η συνάρτηση συσχέτισης του θορύβου δίνεται από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της φασματικής πυκνότητας ισχύος του επομένως,

$$R_{out}(\tau) = F^{-1} \left\{ \frac{N_0}{2} \frac{1}{1 + 4\pi^2 (RC)^2 f^2} \right\} = \frac{N_0}{4} (RC)^{-1} F \left\{ \frac{2(RC)^{-1}}{(RC)^{-2} + (2\pi f)^2} \right\} = \frac{N_0}{4RC} \exp(-|\tau|/RC) \quad (29)$$

δ) Για να υπολογίσουμε την μέση ισχύ στη διάρκεια του bit, είναι χρήσιμο να γράψουμε την έξοδο του συστήματος ως εξής:

$$v_c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau h(t-\tau) v_{in}(\tau) + \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau h(t-\tau) n(\tau) \quad (30)$$

όπου ο πρώτος όρος είναι η συνιστώσα του σήματος ενώ ο δεύτερος όρος είναι η συνιστώσα του θορύβου στην έξοδο του συστήματος. Για την συνιστώσα του θορύβου, έχουμε:

$$n_{out}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau h(t-\tau)n(\tau) \quad (31)$$

Για να υπολογίσουμε την στιγμιαία ισχύ απλά παίρνουμε το τετράγωνο της (31) και η μέση τιμή της ισχύος $P_n(t)$ του θορύβου κάθε χρονική στιγμή t απλά προκύπτει από την αναμενόμενη τιμή του τετραγώνου, δηλαδή

$$P_n(t) = E\{n_{out}^2(t)\} = E\left\{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau h(t-\tau)n(\tau)\right)^2\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_2 h(t-\tau_1)h(t-\tau_2)E\{n(\tau_1)n(\tau_2)\} \quad (32)$$

Αλλά ξέρουμε πως ο θόρυβος $n(t)$ είναι λευκός, επομένως:

$$E\{n(\tau_1)n(\tau_2)\} = \frac{N_0}{2} \delta(\tau_1 - \tau_2) \quad (33)$$

Αντικαθιστώντας την (33) στην (32)

$$P_n(t) = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_2 h(t-\tau_1)h(t-\tau_2)\delta(\tau_1 - \tau_2) = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t-\tau_1)d\tau_1 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(\tau)d\tau \quad (34)$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στην (34) χρησιμοποιούμε την ιδιότητα του Parseval, σύμφωνα με την οποία

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h^2(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df = \frac{1}{2RC} \quad (35)$$

όπου για το τρίτο μέλος χρησιμοποιήσαμε την (27). Επομένως,

$$P_n(t) = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2RC} \quad (36)$$

Η (36) στην ουσία υποδεικνύει ότι η αναμενόμενη στιγμιαία ισχύς ισούται με την αναμενόμενη μέση ισχύ του θορύβου όπως αυτή δίνεται από την (28). Επίσης εφόσον η στιγμιαία ισχύς είναι σταθερή η μέση τιμή της στην διάρκεια μίας περιόδου του συνημιτονου είναι απλά

$$P_{n,av} = \frac{1}{T} \int_0^T dt P_n(t) = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2RC} \quad (37)$$

Όσο αφορά τη συνιστώσα του σήματος, χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα προηγούμενης άσκησης (δείτε άσκηση 3 ερώτημα (β) στην προηγούμενη ενότητα) σύμφωνα με την οποία η συνιστώσα εξόδου είναι

$$v_{CS}(t) = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \cos\left(2\pi f_c t + \frac{\pi}{12}\right) \quad (38)$$

Η στιγμιαία ισχύς του σήματος είναι $v_{CS}(t)^2$ και μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η μέση ισχύς στην διάρκεια μίας περιόδου είναι

$$P_s = \frac{1}{T} \int_0^T v_{CS}^2(t) dt = \frac{V_0^2}{4} \quad (39)$$

Το πηλίκο σήμα-προς-θόρυβο επομένως είναι:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{P_s}{P_{n,av}} = \frac{\frac{V_0^2}{4}}{\frac{N_0}{2} \frac{1}{2RC}} = \frac{V_0^2 RC}{N_0} \cong 3,2 \times 10^7 \text{ (+75dB)} \quad (40)$$

Άσκηση 3: Τυχαία Δυαδική Κυματομορφή

Δίνεται ένα σήμα $x(t)$ το οποίο παράγεται από μία ακολουθία παλμών διάρκειας T_b και που κάθε παλμός έχει την ίδια πιθανότητα να έχει πλάτος $+1$ και -1 . Υποθέτουμε πως τα πλάτη των παλμών είναι στατιστικά ανεξάρτητα, δηλαδή η πιθανότητα να έχει ένας παλμός πλάτος $+1$ ή -1 δεν εξαρτάται από τα πλάτη των προηγούμενων ή των επόμενων παλμών. Επίσης θεωρούμε πως οι παλμοί παρουσιάζουν μία τυχαία μετατόπιση σε σχέση με την αρχή των αξόνων T όπου το T είναι ομοιόμορφα κατανομημένη τυχαία μεταβλητή στο διάστημα $[0, T_b)$.

Ζητείται να υπολογιστεί η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_x(\tau)$ της $x(t)$.

Λύση:

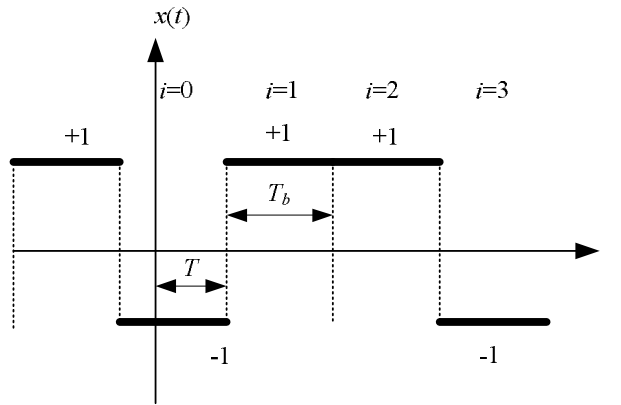
Για να υπολογίσουμε την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_x(\tau)$ χρησιμοποιούμε τον ορισμό

$$R_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} \quad (41)$$

Σημειώστε πως η (41) είναι ο γενικός ορισμός της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης ο οποίος περιλαμβάνει και την ειδική περίπτωση των στατικών διαδικασιών για τις οποίες θα πρέπει να ισχύει

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_1 - t_2) = R_x(\tau) \quad (42)$$

όπου $t = t_1 - t_2$. Για να υπολογίσουμε την R_x θεωρούμε ένα δείγμα της $x(t)$ όπως αυτό φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Οι χρονικές στιγμές t_1 και t_2 μπορεί να βρίσκονται οπουδήποτε πάνω στον άξονα του χρόνου. Ωστόσο αν απέχουν περισσότερο από T_b δηλαδή $|t_1 - t_2| > T_b$ τότε είμαστε σίγουροι πως ανήκουν σε διαφορετικό παλμό οπότε τα $x(t_1)$ και $x(t_2)$ είναι ασυσχέτιστα,

$$R_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = E\{x(t_1)\}E\{x(t_2)\} = 0 \quad (43)$$

Στην παραπάνω σχέση χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$E\{x(t_1)\} = E\{x(t_2)\} = \frac{1}{2}(+1) + \frac{1}{2}(-1) = 0 \quad (44)$$

Όταν $|t_1 - t_2| < T_b$ υπάρχει πιθανότητα οι χρονικές στιγμές να ανήκουν στον ίδιο παλμό και το κατά πόσο αυτό ισχύει εξαρτάται από την τιμή της αρχικής ολίσθησης T . Αν υποθέσουμε πως $t_2 > t_1$ για να ανήκει το t_1 στον i οστό παλμό πρέπει

$$(i-1)T_b + T \geq t_1 \quad (45)$$

Για να μην ανήκει το t_2 στον i οστό παλμό θα πρέπει να ανήκει στον $(i+1)$ οστό και επομένως

$$t_2 \geq iT_b + T \quad (46)$$

Επομένως αν $D(t_1, t_2)$ συμβολίζει το ενδεχόμενο να βρίσκονται οι δύο χρονικές στιγμές σε διαφορετικό παλμό έχουμε

$$P\{D(t_1, t_2)\} = P\{[T \geq t_1 - (i-1)T_b] \cap [T \leq t_2 - iT_b]\} \quad (47)$$

Παρατηρούμε πως τα ενδεχόμενα

$$A_1 = \{T \geq t_1 - (i-1)T_b\} \quad (48)$$

$$A_2 = \{T \leq t_2 - iT_b\} \quad (49)$$

είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα. Πράγματι, αν ισχύει το A_2 τότε:

$$T \leq t_2 - iT_b = t_1 + (t_2 - t_1) - iT_b < t_1 + (i-1)T_b \quad (50)$$

δηλαδή δεν μπορεί να ισχύει το A_1 . Επομένως

$$P\{D(t_1, t_2)\} = P\{A_1 \cap A_2\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} \quad (51)$$

Η πρώτη πιθανότητα υπολογίζεται εν γένει από την σχέση

$$P(T \geq a) = \int_a^{T_b} f_T(x) dx = \frac{1}{T_b} \int_a^{T_b} dx = \frac{T_b - a}{T_b} \quad (52)$$

ενώ η δεύτερη πιθανότητα υπολογίζεται από την σχέση

$$P(T \leq b) = \int_0^b f_T(x) dx = \frac{1}{T_b} \int_0^b dx = \frac{b}{T_b} \quad (53)$$

Επομένως

$$P\{D(t_1, t_2)\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} = \frac{T_b - (t_1 - (i-1)T_b)}{T_b} + \frac{t_2 - iT_b}{T_b} = \frac{t_2 - t_1}{T_b} \quad (54)$$

Αυτή είναι η πιθανότητα τα t_1 και t_2 να μην ανήκουν στον ίδιο παλμό. Για να ανήκουν στον ίδιο παλμό,

$$P\{S(t_1, t_2)\} = 1 - P\{D(t_1, t_2)\} = 1 - \frac{t_2 - t_1}{T_b} \quad (55)$$

Για να υπολογίσουμε τώρα την αυτοσυσχέτιση,

$$R_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = E\{x(t_1)x(t_2) | D\} P(D) + E\{x(t_1)x(t_2) | S\} P(S) \quad (56)$$

όπου $E\{x(t_1)x(t_2) | D\}$ είναι η αναμενόμενη τιμή του $x(t_1)x(t_2)$ δεδομένου πως έχει συμβεί το D δηλαδή ότι οι χρονικές στιγμές είναι σε διαφορετικό παλμό οπότε ισχύει η (43), δηλαδή

$$E\{x(t_1)x(t_2) | D\} = 0 \quad (57)$$

Όταν οι χρονικές στιγμές βρίσκονται στον ίδιο παλμό $x(t_1)=x(t_2)=\pm 1$ και $x(t_1)x(t_2)=1$. Επομένως

$$E\{x(t_1)x(t_2) | S\} = 1 \quad (58)$$

Οπότε:

$$R_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2) | S\} P(S) = 1 - \frac{t_2 - t_1}{T_b} \quad (59)$$

Στην περίπτωση όπου $t_1 > t_2$ απλά αντιστρέφουμε το ρόλο των t_1 και t_2 και έχουμε

$$R_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2) | S\} P(S) = 1 - \frac{t_1 - t_2}{T_b} \quad (60)$$

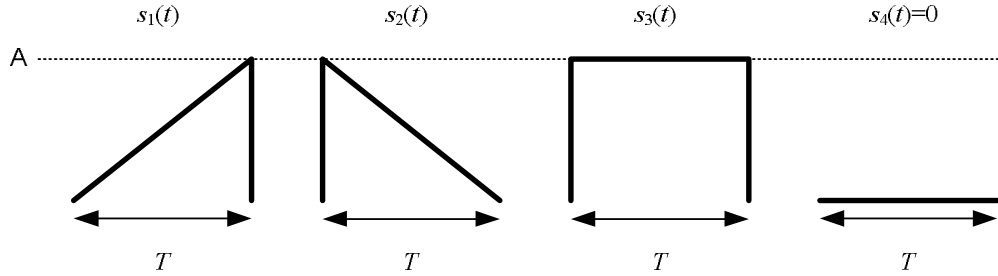
Σε κάθε περίπτωση:

$$R_x(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 - \frac{|t_2 - t_1|}{T_b} & |t_2 - t_1| < T_b \\ 0 & |t_2 - t_1| \geq T_b \end{cases} \quad (61)$$

3. Μετάδοση πληροφορίας παρουσία θορύβου AWGN

Άσκηση 1: Υπολογισμός των συναρτήσεων βάσεως

Δίνονται οι παρακάτω τέσσερις κυματομορφές που χρησιμοποιούνται για την μετάδοση της πληροφορίας σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα:



Ζητείται:

α) να βρεθούν οι συναρτήσεις βάσεις.

β) να σχεδιαστεί ο αστερισμός των συμβόλων δεδομένων των συναρτήσεων βάσης του παραπάνω ερωτήματος

Λύση:

Για να βρούμε τις συναρτήσεις βάσεις χρησιμοποιούμε τη διαδικασία ορθογωνοποίησης Gram-Schmidt. Συγκεκριμένα επιλέγουμε ως πρώτη συνάρτηση βάσης την:

$$\psi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_1}} \quad (1)$$

όπου

$$\mathcal{E}_1 = \int_0^T s_1^2(t) dt \quad (2)$$

Το σήμα $s_1(t)$ μπορεί να περιγραφεί σε αναλυτική μορφή ως:

$$s_1(t) = \begin{cases} \frac{A}{T}t & , 0 \leq t < T \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (3)$$

Επομένως:

$$\mathcal{E}_1 = \frac{A^2}{T^2} \int_0^T t^2 dt = \frac{A^2 T}{3} \quad (4)$$

Η πρώτη συνάρτηση βάσης είναι επομένως

$$\psi_1(t) = \frac{\sqrt{3}s_1(t)}{A\sqrt{T}} = \sqrt{\frac{3}{T}} \frac{t}{T} \quad (5)$$

Για να βρούμε τη δεύτερη συνάρτηση βάσης σύμφωνα με την διαδικασία Gram-Schmidt υπολογίζουμε το

$$c_{21} = \int_0^T s_2(t)\psi_1(t)dt \quad (6)$$

Το σήμα $s_2(t)$ δίνεται από την σχέση

$$s_2(t) = \begin{cases} A - \frac{A}{T}t & , 0 \leq t < T \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (7)$$

οπότε

$$c_{21} = \frac{\sqrt{3}}{A\sqrt{T}} \int_0^T s_2(t)s_1(t)dt = \frac{\sqrt{3}}{A\sqrt{T}} \int_0^T \frac{A}{T}t \left(A - \frac{A}{T}t \right) dt = \frac{\sqrt{3}A}{\sqrt{T}} \frac{1}{T} \int_0^T \left(t - \frac{t^2}{T} \right) dt \quad (8)$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα ως εξής: (9)

$$\int_0^T \left(t - \frac{t^2}{T} \right) dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3T} \right]_0^T = \frac{T^2}{2} - \frac{T^2}{3} = \frac{T^2}{6} \quad (10)$$

Οπότε έχουμε

$$c_{21} = \frac{\sqrt{3TA}}{6} \quad (11)$$

Η συνάρτηση βάσης θα προκύψει από την

$$d_2(t) = s_2(t) - c_{21}\psi_1(t) = A - \frac{A}{T}t - \frac{\sqrt{3TA}}{6} \sqrt{\frac{3}{T}} \frac{t}{T} = A - \frac{3A}{2T}t \quad (12)$$

Η ενέργεια του $d_2(t)$ είναι

$$\varepsilon_2 = \int_0^T d_2^2(t)dt = \int_0^T \left(A - \frac{3A}{2T}t \right)^2 dt = A^2T \int_0^T \left(1 - \frac{3}{2T}t \right)^2 dt = A^2T \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{2}x \right)^2 dx = \frac{A^2T}{4} \quad (13)$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\psi_2(t) = \frac{A - \frac{3A}{2T}t}{\frac{A\sqrt{T}}{2}} = \frac{1 - \frac{3t}{2T}}{\frac{\sqrt{T}}{2}} = \frac{2T - 3t}{T\sqrt{T}} \quad (14)$$

Στην συνέχεια δοκιμάζουμε να βρούμε την $\psi_3(t)$. Υπολογίζουμε τα

$$c_{31} = \int_0^T s_3(t)\psi_1(t)dt \quad (15)$$

$$c_{32} = \int_0^T s_3(t)\psi_2(t)dt \quad (16)$$

Έχουμε

$$c_{31} = \int_0^T s_3(t)\psi_1(t)dt = A \int_0^T \psi_1(t)dt = A\sqrt{\frac{3}{T}} \frac{1}{T} \int_0^T tdt = \frac{A\sqrt{3T}}{2} \quad (17)$$

$$c_{32} = \int_0^T s_3(t)\psi_2(t)dt = A \int_0^T \psi_2(t)dt = A \int_0^T \frac{2T - 3t}{T\sqrt{T}} dt = A\sqrt{T} \int_0^1 (2 - 3x) dx = \frac{A\sqrt{T}}{2} \quad (18)$$

Για να βρούμε το $d_3(t)$ χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$d_3(t) = s_3(t) - c_{31}\psi_1(t) - c_{32}\psi_2(t) = A - \frac{A\sqrt{3T}}{2} \sqrt{\frac{3}{T}} \frac{t}{T} - \frac{A\sqrt{T}}{2} \frac{2T - 3t}{T\sqrt{T}} = 0 \quad (19)$$

Επομένως εφόσον $d_3(t)=0$ καταλαβαίνουμε ότι η $d_3(t)$ μπορεί να γραφεί εξολοκλήρου χρησιμοποιώντας ως βάση της $\psi_1(t)$ και $\psi_2(t)$. Είναι προφανές ότι το ίδιο ισχύει και για την $s_4(t)=0$. Τελικά και οι 4 κυματομορφές περιγράφονται από δύο συναρτήσεις βάσης ψ_1 και ψ_2 που υπολογίσαμε νωρίτερα.

β) Για να σχεδιάσουμε τον αστερισμό θα πρέπει να γνωρίζουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων που περιγράφουν τις $s_i(t)$. Εφόσον

$$\psi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{\varepsilon_1}} \Rightarrow s_1(t) = \sqrt{\varepsilon_1} \psi_1(t) = A\sqrt{\frac{T}{3}} \psi_1(t) \quad (20)$$

επομένως

$$c_{11} = \frac{1}{\sqrt{3}} A\sqrt{T} \quad (21)$$

Επίσης

$$s_2(t) = c_{21}\psi_1(t) + c_{22}\psi_2(t) \quad (22)$$

Το c_{21} το έχουμε υπολογίσει στην (11),

$$c_{21} = \frac{\sqrt{3T}A}{6} = \frac{1}{2\sqrt{3}} A\sqrt{T} \quad (23)$$

Για το c_{22} έχουμε:

$$c_{22} = \int_0^T dt s_2(t) \psi_2(t) = \frac{A}{\sqrt{T}} \int_0^T \left(2 - \frac{3t}{T}\right) \left(1 - \frac{1}{T}t\right) dt = A\sqrt{T} \int_0^1 (2-3x)(1-x) dx = \frac{1}{2} A\sqrt{T} \quad (24)$$

Τα c_{32} και c_{31} τα έχουμε υπολογίσει παραπάνω:

$$c_{31} = \frac{\sqrt{3}}{2} A\sqrt{T} \quad (25)$$

$$c_{32} = \frac{1}{2} A\sqrt{T} \quad (26)$$

Τέλος για το $s_4(t)$ έχουμε

$$s_4(t) = 0\psi_1(t) + 0\psi_2(t) \quad (27)$$

οπότε

$$c_{41} = c_{42} = 0 \quad (28)$$

Με τον τρόπο αυτό έχουμε τα διανύσματα:

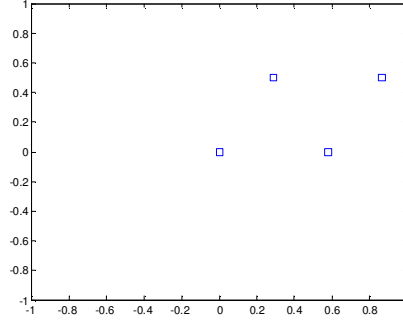
$$\vec{s}_1 = (c_{11}, 0) = A\sqrt{T} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right) \quad (29)$$

$$\vec{s}_2 = (c_{21}, c_{22}) = A\sqrt{T} \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2} \right) \quad (30)$$

$$\vec{s}_3 = (c_{31}, c_{32}) = A\sqrt{T} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad (31)$$

$$\vec{s}_4 = (c_{41}, c_{42}) = A\sqrt{T} (0, 0) \quad (32)$$

Στο παρακάτω σχήμα παριστάνουμε τον αστερισμό που αντιστοιχεί στα σήματα θεωρώντας ότι $A\sqrt{T} = 1$



Άσκηση 2: M-αδικό PAM σε σύστημα περιορισμένης ισχύος.

Επιθυμούμε να μεταδώσουμε ψηφιακή πληροφορία μέσα από ένα κανάλι πολύ μεγάλου εύρους ζώνης παρουσία θορύβου AWGN. Ο πομπός έχει μέγιστη ισχύ εκπομπής $P_{\max}=10\text{mW}$, η συνολική εξασθένιση στο κανάλι είναι -30dB ενώ η φασματική πυκνότητα θορύβου στο δέκτη είναι $N_0/2=10^{-12}\text{W/Hz}$. Ζητείται να υπολογιστεί ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης bit στην περίπτωση M-αδικού PAM όπου το M είναι δύναμη του 2 και κυμαίνεται από $M=2$ μέχρι $M=128$ για πιθανότητα σφάλματος bit ίση με $P_b=10^{-6}$.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα σφάλματος συμβόλου του M-αδικού PAM είναι:

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6P_{av}T}{(M^2-1)N_0}}\right) \quad (33)$$

όπου T είναι η διάρκεια του συμβόλου, P_{av} είναι η μέση ισχύς του συμβόλου στο δέκτη. Τα σύμβολα στον πομπό αποτυπώνονται σε παλμούς $g_T(t)$ οι οποίοι διέπονται από την σχέση:

$$g_T(t) = \begin{cases} G & , 0 \leq t < T \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (34)$$

ενώ το σήμα PAM στον πομπό θα δίνεται από την σχέση

$$x(t) = A_m g_T(t) \quad (35)$$

όπου τα πλάτη A_m δίνονται από την σχέση:

$$A_m = 2m - 1 - M \quad (36)$$

Θα πρέπει η ισχύς του σήματος $x(t)$ να μην ξεπερνάει το $P_{\max}$ οπότε

$$x^2(t) \leq P_{\max} \Rightarrow (A_m G)^2 \leq P_{\max} \quad (37)$$

Το πλάτος A_m μεγιστοποιείται για $m=M$ οπότε $A_M=M-1$ οπότε για να ισχύει η (37) για κάθε m , θα πρέπει:

$$G = \frac{\sqrt{P_{\max}}}{M-1} \quad (38)$$

Η μέση ισχύς στον πομπό είναι

$$P_{av}^{(TX)} = E\{x^2(t)\} = \frac{G^2}{M} \sum_{m=1}^M A_m^2 \quad (39)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι:

$$\sum_{m=1}^M A_m^2 = \sum_{m=1}^M (2m-1-M)^2 = \frac{M(M^2-1)}{3} \quad (40)$$

και επομένως η μέση ισχύς γράφεται:

$$P_{av}^{(TX)} = E\{x^2(t)\} = \frac{1}{M} \frac{M(M^2-1)}{3} \frac{P_{\max}}{(M-1)^2} = \frac{P_{\max}}{3} \frac{M+1}{M-1} \quad (41)$$

Η ισχύς παρουσιάζεται μειωμένη κατά -30dB όταν φτάνει στον δέκτη, επομένως

$$P_{av} = \frac{P_{\max}}{3L} \frac{M+1}{M-1} \quad (42)$$

όπου ο παράγοντας $1/L=1/1000$ περιγράφει της απώλειες ισχύος του καναλιού και αντιστοιχεί σε -30dB. Επομένως η πιθανότητα σφάλματος συμβόλου δίνεται από την σχέση:

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6T}{(M^2-1)N_0} \frac{P_{\max}}{3L} \frac{M+1}{M-1}}\right) \quad (43)$$

Θα πρέπει στη συνέχεια να συσχετίσουμε την πιθανότητα σφάλματος συμβόλου με την πιθανότητα σφάλματος bit P_b . Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι στην περίπτωση της M-αδικής διαμόρφωσης κάθε σύμβολο αντιστοιχεί σε $K=\log_2 M$ bits (π.χ. 8-αδική διαμόρφωση PAM χρησιμοποιεί 8 διακριτά σύμβολα κάθε ένα από τα οποία κωδικοποιεί έναν εκ των πιθανών συνδυασμών 3 bit 000,001,010,...). Για να συμβεί σφάλμα σε ένα σύμβολο θα πρέπει τουλάχιστον ένα εκ των bit που μεταδόθηκαν να είναι εσφαλμένο ή ισοδύναμα για να είναι ένα σύμβολο σωστό θα πρέπει να μην έχει συμβεί σφάλμα σε όλα τα K bit στα οποία αντιστοιχεί. Επομένως η πιθανότητα το σύμβολο να είναι σωστό δίνεται από την σχέση:

$$P_C = (1 - P_b)^K \quad (44)$$

Η πιθανότητα σφάλματος συμβόλου είναι

$$P_M = 1 - P_C = 1 - (1 - P_b)^K \quad (45)$$

Εφόσον το P_b είναι πολύ μικρό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την προσέγγιση

$$P_M = 1 - (1 - P_b)^K \cong 1 - (1 - KP_b) = KP_b = P_b \log_2 M \quad (46)$$

Η (46) και η (43) συνδυάζονται για να δώσουν:

$$\frac{M \log_2 M}{2(M-1)} P_b = Q\left(\sqrt{\frac{6T}{(M^2-1)N_0} \frac{P_{\max}}{3L} \frac{M+1}{M-1}}\right) \quad (47)$$

Για να λύσουμε την (47) χρησιμοποιούμε τους πίνακες της συνάρτησης Q για να βρούμε τα q_M για τα οποία

$$\frac{M \log_2 M}{2(M-1)} P_b = Q(q_M) \quad (48)$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι τιμές του

$$Q_M = \frac{M \log_2 M}{2(M-1)} P_b \quad (49)$$

M	Q_M
2	$1,0 \times 10^{-6}$
4	$1,3 \times 10^{-6}$
8	$1,7 \times 10^{-6}$
16	$2,1 \times 10^{-6}$
32	$2,6 \times 10^{-6}$
64	$3,0 \times 10^{-6}$
128	$3,5 \times 10^{-6}$

Από τους πίνακες της συνάρτησης Q βρίσκουμε ότι το q_M στις παραπάνω περιπτώσεις δεν διαφέρει πολύ και είναι περίπου ίσο με $q_M \cong 4,5$.

οπότε θα έχουμε

$$\frac{6T}{(M^2-1)N_0} \frac{P_{\max}}{3L} \frac{M+1}{M-1} = q_M^2 \Rightarrow \frac{6}{(M^2-1)N_0 q_M^2} \frac{P_{\max}}{3L} \frac{M+1}{M-1} = \frac{1}{T} = R_s \quad (50)$$

όπου R_s είναι ο ρυθμός συμβόλων. Δεδομένου πως κάθε σύμβολο αντιστοιχεί σε K bit, ο ρυθμός bit R_b θα είναι:

$$R_b = \frac{6}{(M^2-1)N_0 q_M^2} \frac{P_{\max}}{3L} \frac{M+1}{M-1} \log_2 M \quad (51)$$

Στον παρακάτω πίνακα δίνουμε τις τιμές του R_b συναρτήσει του M .

M	R_b (Mb/s)
2	4,9383
4	1,0974
8	0,3023
16	0,0878
32	0,0257
64	0,0075
128	0,0021

Παρατηρούμε επομένως πως στην περίπτωση ενός συστήματος περιορισμένης ισχύος η χρήση του PAM υψηλότερης τάξης ($M>2$) δεν επιφέρει καμία βελτίωση στο μέγιστο ρυθμό σηματοδότησης.

Άσκηση 3: Μ-αδικό PAM σε σύστημα περιορισμένου εύρους ζώνης.

Επιθυμούμε να μεταδώσουμε ψηφιακή πληροφορία μέσα από ένα κανάλι πολύ μεγάλου εύρους ζώνης παρουσία θορύβου AWGN. Ωστόσο σε αντίθεση με την παραπάνω περίπτωση είμαστε περιορισμένοι ως προς το εύρος ζώνης και όχι ως προς την μέγιστη ισχύ εκπομπής. Το εύρος ζώνης μετάδοσης δεν πρέπει να ξεπεράσει τα 10MHz, ενώ η συνολική εξασθένιση στο κανάλι είναι -20dB ενώ η φασματική πυκνότητα θορύβου στο δέκτη είναι $N_0/2=10^{-12}$ W/Hz. Ζητείται να υπολογιστεί ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης bit στην περίπτωση Μ-αδικού PAM όπου το M είναι δύναμη του 2 και κυμαίνεται από $M=2$ μέχρι $M=128$ καθώς επίσης και η μέση ισχύ εκπομπής για πιθανότητα σφάλματος bit ίση με $P_b=10^{-6}$.

Λύση:

Σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση, είμαστε περιορισμένοι ως προς το εύρος ζώνης το οποίο καθορίζεται από το εύρος ζώνης των παλμών $g_T(t)$ που χρησιμοποιούμε στην μετάδοση του σήματος

$$g_T(t) = \begin{cases} G & , 0 \leq t < T \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (52)$$

Δεδομένου πως οι παλμοί $g_T(t)$ είναι ορθογώνιοι έπεται πως το φάσμα τους καθορίζεται από την σχέση

$$G_T(f) = (GT)^2 \text{sinc}(Tf) \quad (53)$$

Το φάσμα ισχύος $|G_T(f)|^2$ του $g_T(t)$ είναι επομένως

$$|G_T(f)|^2 = (GT)^2 \text{sinc}^2(Tf) \quad (54)$$

δεδομένου ότι

$$\text{sinc}^2(x) \leq \frac{1}{\pi|x|^2} \quad (55)$$

παρατηρούμε ότι

$$|G_T(f)|^2 \leq \frac{(GT)^2}{\pi^2(Tf)^2} = \frac{[G(0)]^2}{\pi^2(Tf)^2} \quad (56)$$

και επομένως για $f \geq 2/T$

$$\frac{|G_T(f)|^2}{[G(0)]^2} \leq \frac{1}{\pi^2 (Tf)^2} \leq \frac{1}{4\pi^2} = 0,025 \quad (57)$$

Επομένως εφόσον η ισχύς των συνιστωσών του σήματος για $f \geq 2/T$ είναι μικρότερες του 2,5% της μέγιστης φασματικής ισχύος στο $f=0$ έπεται πως το εύρος ζώνης του σήματος μπορεί προσεγγιστικά να θεωρηθεί ίσο με $B=2/T$. Εφόσον το μέγιστο εύρος ζώνης δεν μπορεί να γίνει μεγαλύτερο από 10MHz έπεται πως ο ρυθμός συμβόλων δεν μπορεί να ξεπεράσει το

$$R_s = \frac{1}{T} \leq \frac{B}{2} = 5\text{MHz} \Rightarrow T = 0.2\mu\text{s} \quad (58)$$

Για να πετύχουμε πιθανότητα σφάλματος bit ίση με P_b θα πρέπει όπως είδαμε και στην προηγούμενη άσκηση η πιθανότητα σφάλματος συμβόλου να δίνεται από την σχέση:

$$P_M = P_b \log_2 M \quad (59)$$

Δεδομένου ότι:

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q \left(\sqrt{\frac{6P_{av}T}{(M^2-1)N_0}} \right) \quad (60)$$

θα έχουμε:

$$\frac{M \log_2 M}{2(M-1)} P_b = Q \left(\sqrt{\frac{6P_{av}T}{(M^2-1)N_0}} \right) = Q(q_M) \quad (61)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι πάντα θα υπάρχει μία τιμή της P_{av} έτσι ώστε να μπορούμε να πετύχουμε την επιθυμητή πιθανότητα σφάλματος. Όπως είδαμε και στην προηγούμενη άσκηση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $q_M \approx 4,5$ και επομένως

$$P_{av} = q_M^2 \frac{(M^2-1)N_0}{6T} \approx 3,37 \times 10^{-9} (M^2-1) \text{ [W]} \quad (62)$$

ενώ η ισχύς εκπομπής προκύπτει από την σχέση

$$P_{av}^{TX} = \frac{P_{av}}{L} \approx 3,37 \times 10^{-7} (M^2-1) \text{ [W]} \quad (63)$$

Ο ρυθμός σηματοδοσίας είναι απλά

$$R_b = R_s \log_2 M = (5 \times 10^6) \log_2 M \text{ [b/s]} \quad (64)$$

Στον παρακάτω πίνακα παραθέτουμε τις τιμές του R_b και του P_{av}^{TX} για κάθε μία από τις τιμές του M .

M	R_b (Mb/s)	P_{av}^{TX} (W)
2	5	0,011
4	10	0,05
8	15	0,22
16	20	0,89
32	25	3,54
64	30	13,96
128	35	55,09

Παρατηρούμε επομένως ότι η αύξηση του M οδηγεί σε αύξηση του ρυθμού σηματοδοσίας R_b αλλά και σε αύξηση της μέσης ισχύος εκπομπής στο πομπό.

Άσκηση 4: Σύγκριση Συστημάτων Μετάδοσης

Έστω ένα κανάλι με φασματική πυκνότητα θορύβου $N_0/2=10^{-11}$ στο οποίο θέλουμε να μεταδώσουμε ψηφιακή πληροφορία με μέγιστη ισχύ πομπού $P_{\max}^{\text{TX}}=10\text{mW}$ και απώλειες -20dB με ρυθμό $R_b=10\text{Mb/s}$. Να συγκρίνετε ως προς τις επιδόσεις της πιθανότητας σφάλματος bit τα εξής συστήματα:

- α) Δυαδικό PAM βασικής ζώνης
- β) Δυαδικό PPM βασικής ζώνης
- γ) Δυαδικό PSK
- δ) Δυαδικό ζωνοπερατό PAM
- ε) Δυαδικό DPSK

Λύση:

α) Στην περίπτωση του δυαδικού PAM βασικής ζώνης η πιθανότητα σφάλματος δίνεται από την σχέση:

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon_b}{N_0}}\right) \quad (65)$$

όπου ε_b είναι η μέση ενέργεια ανά bit. Για να υπολογίσουμε την μέση ενέργεια ανά bit, χρησιμοποιούμε το γεγονός πως στο δυαδικό PAM έχουμε

$$s_1(t) = \sqrt{P_{\max}} g_T(t) \quad (66)$$

$$s_2(t) = -\sqrt{P_{\max}} g_T(t) \quad (67)$$

όπου έχουμε ορίσει τον παλμό $g_T(t)$ ως εξής:

$$g_T(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (68)$$

Η μέση ενέργεια ε_b ανά bit είναι επομένως:

$$\varepsilon_b = E\left\{\int_0^T s^2(t)dt\right\} = \frac{1}{2}\int_0^T s_1^2(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^T s_2^2(t)dt \quad (69)$$

δεδομένης της (66) και της (67) έχουμε

$$\int_0^T s_1^2(t)dt = \int_0^T s_2^2(t)dt = P_{\max}T = \varepsilon_b \quad (70)$$

και επομένως η (65) θα δώσει

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2P_{\max}T}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2P_{\max}}{N_0R_b}}\right) = 7,82 \times 10^{-4} \quad (71)$$

β) Στην περίπτωση του δυαδικού PPM χρησιμοποιούμε τις κάτωθι κυματομορφές:

$$s_1(t) = \begin{cases} \sqrt{P_{\max}} & 0 \leq t < \frac{1}{2}T \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (72)$$

$$s_2(t) = \begin{cases} \sqrt{P_{\max}} & 0 \leq t < \frac{1}{2}T \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (73)$$

Έχουμε:

$$\int_0^T s_1^2(t)dt = \int_0^T s_2^2(t)dt = \frac{P_{\max}T}{2} = \varepsilon_b \quad (74)$$

Για το PPM έχουμε:

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{P_{\max}}{2N_0R_b}}\right) = 5 \times 10^{-2} \quad (75)$$

γ) Στην περίπτωση του δυαδικού PSK χρησιμοποιούμε τις κυματομορφές:

$$u_0(t) = \begin{cases} \sqrt{P_{\max}} \cos(2\pi f_c t) & , 0 \leq t < T \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (76)$$

$$u_1(t) = \begin{cases} \sqrt{P_{\max}} \cos(2\pi f_c t + \pi) & , 0 \leq t < T \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} = -u_0(t) \quad (77)$$

Η ενέργεια στη διάρκεια του bit είναι

$$\int_0^T u_1^2(t) dt = P_{\max} \int_0^T \cos^2(2\pi f_c t) dt = \frac{P_{\max} T}{2} + \frac{P_{\max}}{2} \int_0^T \cos(4\pi f_c t) dt = \frac{P_{\max} T}{2} + \frac{P_{\max} T}{2} \frac{\sin(4\pi f_c T)}{f_c T} \quad (78)$$

Για τον δεύτερο όρο της εξίσωσης έχουμε:

$$\left| \frac{P_{\max} T}{2} \frac{\sin(4\pi f_c T)}{f_c T} \right| \leq \frac{P_{\max} T}{2} \left| \frac{1}{f_c T} \right| \quad (79)$$

Είναι προφανές ότι όταν η συχνότητα f_c υπερβαίνει κατά πολύ το $1/T$ (κάτι που συμβαίνει πάντα στην πράξη!) τότε

$$\int_0^T u_1^2(t) dt \cong \frac{P_{\max} T}{2} \quad (80)$$

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι

$$\int_0^T u_2^2(t) dt \cong \frac{P_{\max} T}{2} \quad (81)$$

και επομένως

$$\varepsilon_b = \frac{P_{\max} T}{2} \quad (82)$$

Για το PSK θα έχουμε:

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{P_{\max} T}{N_0}}\right) = 1,27 \times 10^{-2} \quad (83)$$

δ) Στην περίπτωση του ζωνοπερατού δυαδικού PAM χρησιμοποιούμε τις εξής κυματομορφές:

$$u_0(t) = \begin{cases} \sqrt{P_{\max}} \cos(2\pi f_c t) & , 0 \leq t < T \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (84)$$

$$u_1(t) = \begin{cases} -\sqrt{P_{\max}} \cos(2\pi f_c t) & , 0 \leq t < T \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} = -u_0(t) \quad (85)$$

επομένως πέφτουμε στην ίδια περίπτωση με το δυαδικό PSK και θα έχουμε:

$$P_b = 1,27 \times 10^{-2} \quad (86)$$

ε) Στην περίπτωση του DPSK έχουμε το ίδιο ε_b ανά bit αλλά η πιθανότητα σφάλματος δίνεται από την:

$$P_b = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\varepsilon_b}{N_0}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{P_{\max} T}{2N_0}\right) \cong 4,1 \times 10^{-2} \quad (87)$$