

Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα

Διάλεξη 4η

Θωμάς Καμαλάκης

Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο Αθηνών

Οκτώβριος 2020

Περιεχόμενα

- 1 Τυχαίες Διαδικασίες
- 2 Αυτοσυσχέτιση και πεδίο συχνοτήτων
- 3 Σήματα στον πομπό

Τυχαίες διαδικασίες

- Μία συνάρτηση του χρόνου $X(t)$ όπου για κάθε τιμή του t η τιμή της είναι μία τυχαία μεταβλητή ονομάζεται *τυχαία διαδικασία*.
- Σε αυτές τις περιπτώσεις έχει ιδιαίτερη σημασία πως συσχετίζονται τα δείγματα $X_1 = X(t_1)$ και $X_2 = X(t_2)$ μεταξύ τους.
- Εάν έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y τότε ορίζουμε την δισδιάστατη πυκνότητα πιθανότητας $f_{X,Y}(x, y)$ ως εξής:

$$\Pr \{X \leq a, Y \leq b\} = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (1)$$

Συσχέτιση τυχαίων μεταβλητών

- Για να είναι ανεξάρτητες δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y θα πρέπει:

$$\Pr \{X \leq a, Y \leq b\} = \Pr \{X \leq a\} \Pr \{Y \leq b\} \quad (2)$$

- Ισοδύναμα αυτό σημαίνει ότι:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad (3)$$

- Μπορούμε να δείξουμε ότι τότε:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{g(X)h(Y)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(X)h(Y)f_{XY}(x, y)dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(X)h(Y)f_X(x)f_Y(y)dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(X)f_X(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} h(Y)f_Y(y)dy = \mathbb{E} \{g(X)\} \mathbb{E} \{h(Y)\} \quad (4) \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Η δισδιάστατη κανονική κατανομή

- Η πυκνότητα πιθανότητας της δισδιάστατης κανονικής κατανομής δίνεται από την σχέση:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \right] \right) \quad (5)$$

όπου:

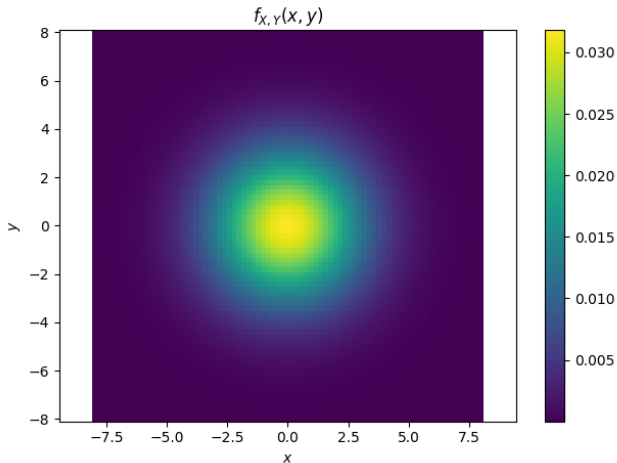
$$\begin{aligned} \mu_X &= \mathbb{E}\{X\} & \sigma_Y^2 &= \mathbb{E}\{(Y - \mu_Y)^2\} \\ \mu_Y &= \mathbb{E}\{Y\} \\ \sigma_X^2 &= \mathbb{E}\{(X - \mu_X)^2\} & \rho &= \frac{\mathbb{E}\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\}}{\sigma_X\sigma_Y} \end{aligned}$$

Παραδείγματα συσχέτισης

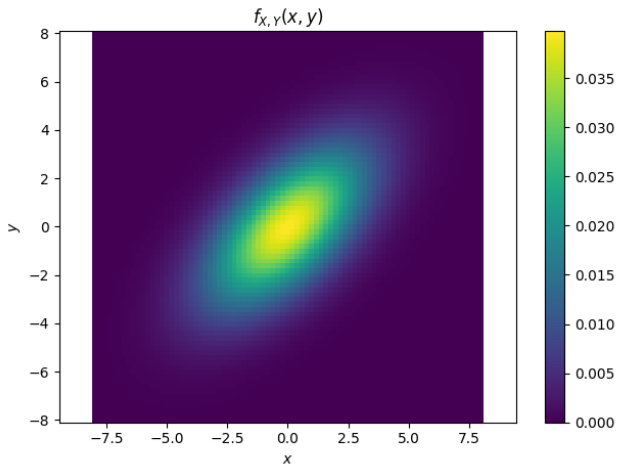
```
1 #!/usr/bin/env python3
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 """
4 Created on Tue Feb 19 12:23:22 2019
5
6 @author: thomas
7 """
8 import matplotlib.pyplot as plt
9
10 import numpy as np
11
12 def gausspdf2D(x, y, r, s2):
13     expo = 1.0/2.0/(1 - r**2) * (x**2/s2 + y**2/s2 - 2.0*r*x*y/s2)
14     pdf = 1.0/2.0/np.sqrt(1 - r**2)/ np.pi /s2 * np.exp(expo)
15     return pdf
16
17 def plot_2D(x, y, pdf):
18     plt.pcolor(x,y,pdf, shading='auto')
19     plt.colorbar()
20     plt.axis('equal')
21     plt.title('$f_{X,Y}(x,y)$')
22     plt.xlabel('$x$')
23     plt.ylabel('$y$')
24     plt.tight_layout()
25
26 dx, dy = 0.2, 0.2
27
28 # generate 2 2d grids for the x & y bounds
29 y, x = np.mgrid[slice(-8, 8 + dy, dy),
30                 slice(-8, 8 + dx, dx)]
31 r=3.0/5.0
32 s2=5
33 plt.close('all')
```



Παραδείγματα συσχέτισης: $\rho = 0$



Παραδείγματα συσχέτισης: $\rho \neq 0$



Συσχέτιση

- Αν X και Y είναι Gaussian τυχαίες μεταβλητές τότε έπεται ότι είναι ανεξάρτητες αν ισχύει:

$$\rho = \frac{\mathbb{E}\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\}}{\sigma_X \sigma_Y} = 0 \quad (6)$$

- τότε μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right) = \\ &= \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right] \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right] = f_X(x)f_Y(y) \quad (7) \end{aligned}$$

Ισχύς και ενέργεια

- Η αναμενόμενη ενέργεια $\bar{\mathcal{E}}_X$ ενός τυχαίου σήματος $X(t)$ δίνεται από την σχέση:

$$\bar{\mathcal{E}}_X = \mathbb{E} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |X(t)|^2 dt \right\} \quad (8)$$

- Η αναμενόμενη μέση ισχύς:

$$\bar{\mathcal{P}}_X = \mathbb{E} \left\{ \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} |X(t)|^2 dt \right\} \quad (9)$$

Παράδειγμα

- Ας θεωρήσουμε την τυχαία διαδικασία

$$X(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad (10)$$

- όπου ϕ είναι μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 2\pi]$.

$$f(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & , 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (11)$$

Παράδειγμα

- Η μέση τιμή δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= \mathbb{E} \{X(t)\} = \mathbb{E} \{A \cos(2\pi f_0 t + \phi)\} = \\ &A \mathbb{E} \{\cos(2\pi f_0 t + \phi)\} = A \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t + \phi) f(\phi) d\phi = \\ &\frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t + \phi) d\phi = 0 \quad (12)\end{aligned}$$

- Η τελευταία σχέση προκύπτει επειδή το ολοκλήρωμα του $\cos(x + \alpha)$ ως προς x είναι μηδέν μέσα σε μία περίοδο.

Παράδειγμα

- Η μέση ισχύς δίνεται από την σχέση:

$$\bar{\mathcal{P}}_X = \mathbb{E} \left\{ \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} |X(t)|^2 dt \right\} \quad (13)$$

- Αν θέσουμε $\tau = 2nT$ όπου $T = f_0^{-1}$ είναι η περίοδος του σήματος θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} |X(t)|^2 dt \right\} &= \frac{A^2}{2nT} \mathbb{E} \left\{ \int_{-nT}^{+nT} \cos^2(2\pi f_0 t + \phi) dt \right\} = \\ &= \frac{A^2}{T} \mathbb{E} \left\{ \int_0^T \cos^2(2\pi f_0 t + \phi) dt \right\} = \frac{A^2}{T} \mathbb{E} \left\{ \frac{T}{2} \right\} = \frac{A^2}{T} \frac{T}{2} = \frac{A^2}{2} \end{aligned} \quad (14)$$

Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

- Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{XX}(t_1, t_2)$ μετράει την συσχέτιση μεταξύ των δειγμάτων μίας τυχαία διαδικασίας.
- Ορίζεται ως:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \mathbb{E} \{X(t_1)X(t_2)\} \quad (15)$$

- Σε πολλές περιπτώσεις η R_{XX} εξαρτάται μόνο από την διαφορά των χρονικών στιγμών, δηλαδή:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_2 - t_1) \quad (16)$$

- Τότε κάνουμε λόγο για *στατικές με την ευρεία έννοια* τυχαίες διαδικασίες.

Παράδειγμα

- Για την τυχαία διαδικασία $X(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$ που ορίσαμε και πριν έχουμε:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \mathbb{E}\{X(t_1)X(t_2)\} = A^2 \mathbb{E}\{\cos(2\pi f_0 t_1 + \phi) \cos(2\pi f_0 t_2 + \phi)\} \quad (17)$$

- ως θυμηθούμε την ιδιότητα: $2 \cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$.

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \frac{A^2}{2} \mathbb{E}\{\cos(2\pi f_0(t_1 - t_2))\} + \frac{A^2}{2} \mathbb{E}\{\cos(2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\phi)\} = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2)) \quad (18)$$

Φασματική πυκνότητα ισχύος

- Στα προηγούμενα είδαμε ότι για ένα μη τυχαίο (ντετερμινιστικό) σήμα $x(t)$ η φασματική πυκνότητα ισχύος $S_x(f)$ δίνεται από την σχέση:

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} \quad (19)$$

- Στην περίπτωση των τυχαίων σημάτων μας ενδιαφέρει η αναμενόμενη φασματική πυκνότητα ισχύος $S_X(f)$ η οποία ορίζεται ως:

$$S_X(f) = \mathbb{E} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} \right\} \quad (20)$$

- Θα δείξουμε πως το $S_X(f)$ συνδέεται με το $R_{XX}(t_1, t_2)$.

Φασματική πυκνότητα ισχύος

- Ας δούμε πως υπολογίζουμε την φασματική πυκνότητα ισχύος:

$$\begin{aligned}|X_T(f)|^2 &= X_T(f)X_T^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t_1)e^{-j2\pi ft_1}dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t_2)e^{j2\pi ft_2}dt_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t_1)x_T(t_2)e^{-j2\pi f(t_1-t_2)}dt_1dt_2 \quad (21)\end{aligned}$$

- Η αναμενόμενη τιμή είναι:

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} \mathbb{E} \{|X_T(f)|^2\} &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E} \{x_T(t_1)x_T(t_2)\} e^{-j2\pi f(t_1-t_2)}dt_1dt_2 = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R'_{XX}(t_1, t_2)e^{-j2\pi f(t_1-t_2)}dt_1dt_2 \quad (22)\end{aligned}$$

Φασματική πυκνότητα ισχύος

- Στην προηγούμενη σχέση $R'_{XX}(t_1, t_2) = \mathbb{E} \{x_T(t_1)x_T(t_2)\}$.
- κάνουμε την εξής αλλαγή μεταβλητής, $\tau = t_1 - t_2$, $t = t_2$. Οπότε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \mathbb{E} \{|X_T(f)|^2\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} R'_{XX}(t+\tau, t) dt e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R'_{XX}(t+\tau, t) dt e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (23) \end{aligned}$$

- Στο εσωτερικό ολοκλήρωμα ορίζουμε

$$\bar{R}_{XX}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R'_{XX}(t+\tau, t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_{XX}(t+\tau, t) dt$$

Φασματική πυκνότητα ισχύος

- Οπότε η φασματική πυκνότητα θορύβου προκύπτει από τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης

$$\bar{R}_{XX}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_{XX}(t + \tau, t) dt$$

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{R}_{XX}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

- Στην περίπτωση στατικών διαδικασιών είναι εύκολο να δούμε ότι $\bar{R}_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau)$, οπότε:

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Παράδειγμα

- Για την τυχαία διαδικασία όπου $X(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$ και το ϕ είχαμε βρει ότι:

$$R_{XX}(t + \tau, t) = R_{XX}(\tau) = \frac{A^2}{2} = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

- χρησιμοποιώντας τους πίνακες του μετασχηματισμού Fourier βλέπουμε το $\cos(2\pi f_0 t)$ έχει φάσμα $\frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$.
- οπότε:

$$S_X(f) = \frac{A^2}{4} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

Ένα υπόδειγμα σήματος στον πομπό

- Μία μικρή αλλαγή στην `plot_signal`:

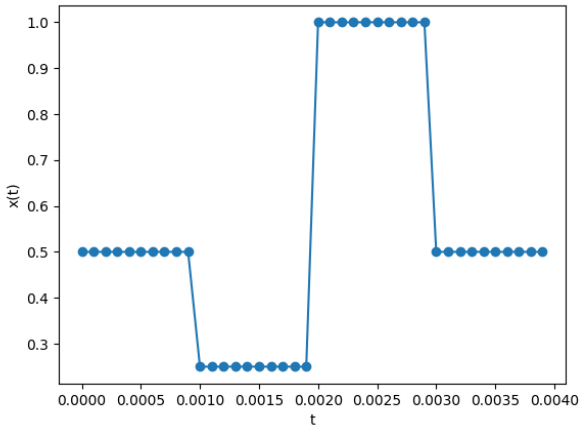
```
1 def plot_signal(t, x, plot_type = 'o', close_all = False,
2                 xlabel = 't', ylabel = 'x(t)', figure_no = None,
3                 xlim = None, ylim = None, show_grid = False):
4
5     if close_all:
6         plt.close('all')
7
8     if figure_no is None:
9         plt.figure()
10    else:
11        plt.figure(figure_no)
12
13    plt.plot( t, x, plot_type )
14    plt.xlabel( xlabel )
```

Ένα υπόδειγμα σήματος στον πομπό

- Μία πρώτη έκδοση για την δημιουργία του σήματος:

```
1
2 # power spectral density
3 def power_density(t, x):
4     T = np.max(t) - np.min(t)
5     return 1.0 / T * np.abs( spectrum(t,x) ) ** 2.0
6
7 def default_pulse(t, TS):
8     return square(t - TS/2.0, TS)
9
10 # pulse amplitude modulation waveform : slow version
11 def pam_waveform1(ak, TS, p_callable = default_pulse,
12                  samples = 10, tinitial = 0, tguard = 0.0):
13
14     Dt = TS / samples                                # sampling period
```

Ένα υπόδειγμα σήματος στον πομπό



Μία πιο αποδοτική προσέγγιση

- Μπορούμε να κάνουμε κάτι καλύτερο;
- Για κάθε χρονική στιγμή t_n που ανήκει στον άξονα του χρόνου t μπορούμε να βρούμε σε πιο σύμβολο ανήκει.
- Τα σύμβολα διαρκούν T_S και το i -οστό σύμβολο είναι στην διάρκεια:

$$iT_S + t_{\text{initial}} \leq t_n < (i+1)T_S + t_{\text{initial}}$$

- Από την παραπάνω σχέση θα έχουμε:

$$i \leq \frac{t_n - t_{\text{initial}}}{T_s} < i + 1$$

- όταν έχουμε έναν ακέραιο αριθμό n ο οποίος είναι $n \leq x < n + 1$ σημαίνει ότι το n είναι το ακέραιο μέρος του x , $n = \lfloor x \rfloor$.

Μία πιο αποδοτική προσέγγιση

- Άρα σε κάθε χρονική t_n ξέρουμε ποιά σύμβολο a_i αντιστοιχεί:

$$i = \left\lfloor \frac{t_n - t_{\text{initial}}}{T_S} \right\rfloor$$

```
1      Ntot = 2 * Nguard + samples * ak.size           # total number of points
2
3      x = np.zeros( Ntot.astype(int) )
4      t = np.arange( tinitial, tinitial + Ntot * Dt, Dt )
5
6      for k, a in enumerate(ak):
7          x += a * p_callable( t - k * TS, TS )
8
9      return t, x
10
11 # pulse amplitude modulation : fast version
12 def pam_waveform2(ak, TS,
13                   samples = 10, tinitial = 0, tguard = 0.0):
14
15     Dt = TS / samples                                # sampling period
16     Nguard = np.round(tguard / Dt)                   # guard points
```

Φάσμα του PAM

- η κυματομορφή του PAM είναι:

$$x(t) = \sum_k a_k p(t - kT_s)$$

- Επομένως η συνάρτηση συσχέτισης είναι:

$$R_{XX}(t, t + \tau) = \sum_p \sum_q \mathbb{E} \{a_p a_q\} p(t - pT_s) p(t + \tau - qT_s)$$

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_{XX}(t + \tau, t) dt = \sum_{pq} \frac{\mathbb{E} \{a_p a_q\}}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t - pT_s) p(t + \tau - qT_s) dt$$

Μερικές παραδοχές

- Θεωρούμε ότι τα σύμβολα είναι ανεξάρτητα, $\mathbb{E}\{a_p a_q\} = \mathbb{E}\{a_p\} \mathbb{E}\{a_q\}$
- Θεωρούμε ότι έχουν μηδενική μέση τιμή, $\mathbb{E}\{a_p\} = 0$
- επομένως αν $\sigma_a^2 = \mathbb{E}\{a_p^2\}$, θα έχουμε:

$$\mathbb{E}\{a_p a_q\} = \begin{cases} \sigma_a^2 & \text{εάν } p = q, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

$$R_{XX}(t + \tau, t) dt = \sigma_a^2 \sum_q p(t - qT_s) p(t + \tau - qT_s) dt$$

- Μπορούμε να δείξουμε ότι: $R(t + \tau + T_s, t + T_s) = R(t + \tau, t)$ δηλαδή η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι περιοδική.

Φάσμα του PAM

- Όπως και πριν θέτουμε $T = 2\mu T_s$. Θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_{XX}(t + \tau, t) dt &= \frac{1}{2\mu T_s} \int_{-\mu T_s}^{\mu T_s} R_{XX}(t + \tau, t) dt = \\ &= \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} R_{XX}(t + \tau, t) dt = \frac{1}{T_s} \int_{(q-1)T_s}^{qT_s} R_{XX}(t + \tau, t) dt \\ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_{XX}(t, t + \tau) dt &= \frac{\sigma_a^2}{T_s} \sum_q \int_{(q-1)T_s}^{qT_s} p(t - qT_s) p(t + \tau - qT_s) dt = \\ &= \frac{\sigma_a^2}{T_s} \int_{-nT_s}^{+nT_s} p(t) p(t + \tau) dt \\ \bar{R}(\tau) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-nT_s}^{+nT_s} p(t) p(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) p(t + \tau) dt\end{aligned}$$

Το φάσμα του PAM

- Ας θυμηθούμε την βασική ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier. Αν στο πεδίο του χρόνου έχουμε συνέλιξη:

$$z(\tau) = x(\tau) \circledast y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau - t)y(t)dt$$

- Τότε στο πεδίο των συχνοτήτων έχουμε πολλαπλασιασμό.

$$Z(f) = X(f)Y(f)$$

- επίσης:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)p(t + \tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} p(-t')p(\tau - t')dt' = p(\tau) \circledast p(-\tau)$$

- Τελικά επομένως:

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = \frac{\sigma_a^2}{T_s}|P(f)|^2$$

Το φάσμα του PAM

- Επομένως η φασματική πυκνότητα $S(f)$ είναι ανάλογη του $\sigma_a^2 = \mathbb{E} a_i^2$ το οποίο είναι στην ουσία η μέση ισχύς των συμβόλων
- ανάλογη του $|P(f)|^2$. Στην περίπτωση τετραγωνικών παλμών θα έχουμε:

$$|P(f)|^2 = \frac{\sigma_a^2}{T_S} \text{sinc}^2(fT_S)$$

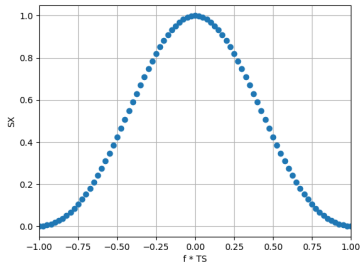
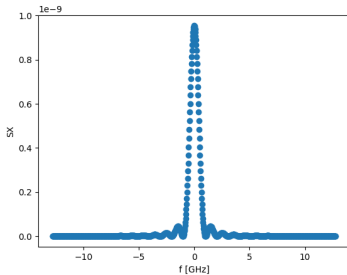
- οπότε:

$$S_X(f) = \sigma_a^2 T_S \text{sinc}^2(fT_S)$$

Παράδειγμα

```
1 import commlib as cl
2 import numpy as np
3
4 N = 1024
5 TS = 1e-9
6 T = 20 * TS
7 sa2 = 1.0
8
9 t = cl.time_axis(T, N)
10 p = cl.square(t, TS)
11 f = cl.frequency_axis(t)
12 P = cl.spectrum(t, p)
13
14 SX = sa2 / TS * np.abs(P)**2.0
15
16 cl.plot_signal(f / 1e9, SX, close_all = True, xlabel = 'f [GHz]', ylabel = 'SX')
17
18 cl.plot_signal(f * TS, SX / np.max(SX),
19               xlabel = 'f * TS', ylabel = 'SX [normalized]',
20               xlim = [-1, 1], show_grid = True)
21
22 SX1 = cl.window(f, SX, -1/TS, +1/TS)
23 total = np.trapz(SX, f)
24 total1 = np.trapz(SX1, f)
25 print('power fraction :', total1/total )
```


Παράδειγμα



Φασματική απόδοση

- Από το προηγούμενο παράδειγμα προκύπτει ότι η ισχύς του σήματος περιέχεται κατά 90% εντός του $[-1/T_S, 1/T_S]$.
- Επομένως έχουμε περίπου ένα εύρος ζώνης (στις θετικές συχνότητες) ίσο με:

$$B \cong \frac{1}{T_s}$$

- ο ρυθμός παραγωγής συμβόλων είναι $R_S = \frac{1}{T_S}$.
- η φασματική απόδοση ορίζεται το πηλίκο R_S/B οπότε στην περίπτωση αυτή:

$$\frac{R_s}{B} \approx 1 \frac{\text{symbols}}{\text{s} \times \text{Hz}}$$