Μάθημα 1: Σήματα

Θωμάς Καμαλάκης

1 Σεπτεμβρίου 2023

1 Η έννοια του σήματος

Ως *σήμα* ορίζουμε την μεταβολή ενός φυσικού μεγέθους $x = x(t)$, π.χ. τάση, ρεύμα, ισχύς ως προς τον χρόνο t. Στην φύση συναντούμε κατά κύριο λόγο *αναλογικά* σήματα που λαμβάνουν δυνητικά οποιαδήποτε τιμή μέσα σε ένα διάστημα τιμών. Στην εικόνα 1 δείχνουμε ένα παράδειγμα αναλογικού σήματος.

Τα αναλογικά σήματα χρησιμοποιούνταν στο παρελθόν στην τηλεφωνία και στην ραδιοφωνία, ωστόσο στις μέρες μας η πλειοψηφία των συστημάτων επικοινωνιών βασίζεται στην μετάδοση *ψηφιακών* σημάτων. Ένα ψηφιακό σήμα $x(t)$ εξ ορισμού μπορεί να πάρει συγκεκριμένες διακριτές τιμές x_i. Η Εικόνα 2 δείχνει ένα ψηφιακό σήμα που παίρνει δύο διαφορετικές τιμές x_i, μία υψηλή και μία χαμηλή.

Στις τηλεπικοινωνίες συναντούμε συχνά δύο παραδείγματα σημάτων: τον τετραγωνικό παλμό και το φέρον σήμα. Ο *τετραγωνικός παλμός* δίνεται από την σχέση:

$$p(t) = \begin{cases} 1 & , -\frac{T_1}{2} \leq t \leq \frac{T_1}{2} \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{1}$$

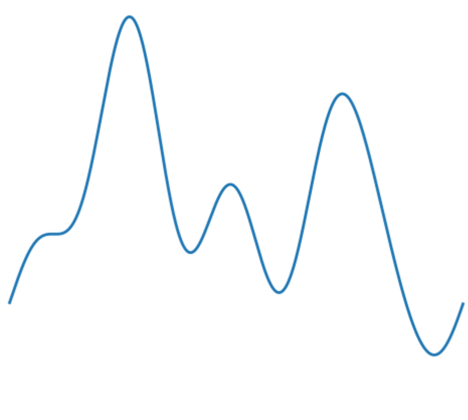
Πρόκειται δηλαδή για ένα σήμα που είναι παντού μηδέν εκτός μίας διάρκειας T_1 με κέντρο το $t = 0$ όπου είναι ίσο με ένα. Πολλά σήματα συστημάτων επικοινωνιών αποτελούνται από διαδοχικούς τετραγωνικούς παλμούς ή προσεγγίσεις τους.

Ένα άλλο παράδειγμα σήματος είναι το *φέρον* σήμα που δίνεται από την σχέση:

$$x_c(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi) \tag{2}$$

Πρόκειται δηλαδή για ένα συνημιτονοειδές σήμα με συχνότητα f_0 και αρχική φάση ίση με ϕ. Το παραπάνω σήμα είναι *περιοδικό* καθώς επαναλαμβάνεται κάθε $T = \frac{1}{f_0}$ δηλαδή

$$x_c(t + T) = x_c(t). \tag{3}$$



Εικόνα 1: Ένα αναλογικό σήμα.

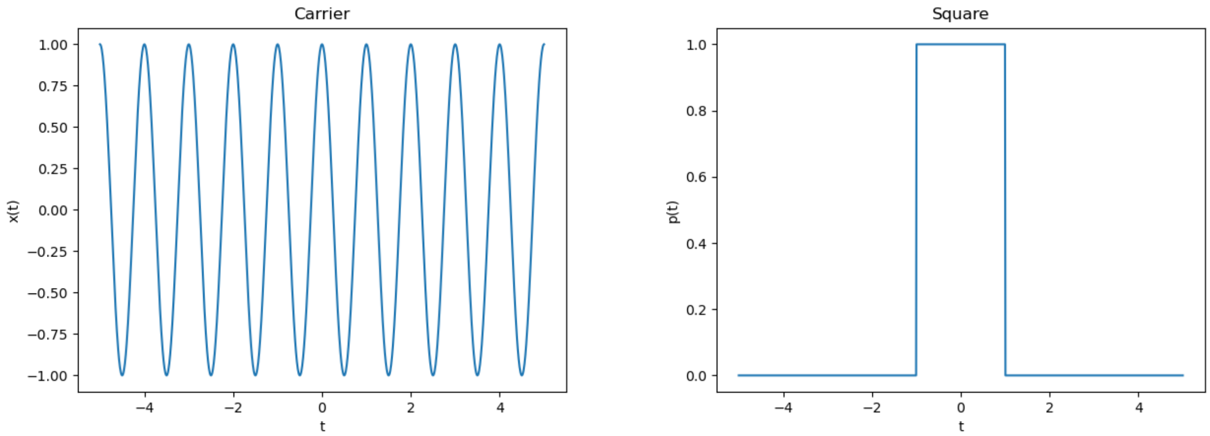
Εικόνα 2: Ένα ψηφιακό σήμα.

2 Σήματα στην Python

Ας χρησιμοποιήσουμε την **Python** για να μελετήσουμε τα δύο σήματα που ορίσαμε. Στο listing 1 δείχνουμε ένα απλό script που κάνει γραφική παράσταση των δύο σημάτων όπως καθορίζονται από τις εξισώσεις (1) και (2). Για να υπολογίσουμε το φέρον απλά χρησιμοποιούμε την έτοιμη συνάρτηση `cos` της βιβλιοθήκης `numpy`. Για τον τετραγωνικό παλμό υλοποιούμε την `square_pulse` η οποία αρχικά φτιάχνει ένα πίνακα ο οποίος είναι παντού μηδέν και ψάχνει να βρει ποια δείγματα του αντιστοιχούν σε χρονικές στιγμές $|t| \leq T_1/2$ χρησιμοποιώντας την `where` της `numpy`. Οι γραφικές παραστάσεις γίνονται με την βοήθεια της `matplotlib`. Μπορείτε να ανατρέξετε στο διαδίκτυο για επιπλέον πληροφορίες για τις δύο βιβλιοθήκες της **Python**. Στην εικόνα 3 δείχνουμε τις γραφικές παραστάσεις που παράγονται από το listing 1.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Carrier signal
def carrier(t, f0, A):
    return A * np.cos( 2 * np.pi * f0 * t )

# Square pulse
def square_pulse(t, T1):
    samples = np.zeros(t.size)
    i = np.where( np.abs(t) <= 0.5 * T1)
    samples[ i ] = 1
    return samples

T = 10
T1 = 2
f0 = 1
A = 1

t = np.linspace(-T/2, T/2, 1000)
p = square_pulse(t, T1)
c = carrier(t, f0, A)
plt.close('all')
plt.figure(1)
plt.plot(t, p)
plt.title('Square')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('p(t)')

plt.figure(2)
plt.plot(t,c)
plt.title('Carrier')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('x(t)')
```

Listing 1: signals.py



(a) (b)

Εικόνα 3: Οι γραφικές παραστάσεις που παράγονται από το listing 1

3 Αναπαράσταση ψηφιακών σημάτων

Το ψηφιακό σήμα της εικόνας 2 μεταδίδεται σε αναλογική μορφή. Για παράδειγμα φανταστείτε μία γεννήτρια παλμών που βγάζει πλάτος τάσης +1V όταν θέλουμε να μεταδώσουμε το bit "1" και $-1V$ για το bit "0". Το σήμα τάσης επομένως εναλλάσεται μεταξύ των πλατών ±1V. Αν υποθέσουμε ότι τα bit αλλάζουν με ρυθμό R_b έπεται ότι η διάρκεια κάθε bit θα είναι $T_b = 1/R_b$. Θα έχουμε για το πλάτος A_k που αντιστοιχεί στο $k^{οστό}$ bit:

$$A_k = \begin{cases} +1 & , b_k = 1 \\ -1 & , b_k = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι στέλνουμε μία ακολουθία από Q bits και ας υποθέσουμε ότι το χρονικό διάστημα που αντιστοιχεί στο $k^{οστό}$ bit είναι το:

$$kT_b - \frac{T_b}{2} \le t < kT_b + \frac{T_b}{2} \tag{5}$$

Με τι μοιάζει το σήμα $x(t)$ που μεταδίδεται; θα πρέπει στο παραπάνω διάστημα να έχει πλάτος A_k άρα θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι

$$x(t) = A_k \text{ , όταν } kT_b - \frac{T_b}{2} \le t < kT_b + \frac{T_b}{2} \tag{6}$$

Η συνθήκη (5) γράφεται ισοδύναμα:

$$k \le \frac{t}{T_b} + \frac{1}{2} < (k+1) \tag{7}$$

Επομένως ο δείκτης k έχει την ιδιότητα να είναι μικρότερος ή ίσος του $(t/T_b + 1/2)$ ενώ το $k+1$ είναι πάντα μεγαλύτερο από αυτή την ποσότητα. Στα μαθηματικά ο ακέραιος n για τον οποίο ισχύει $n \le x < n+1$ ονομάζεται *ακέραιο μέρος* του x και συμβολίζεται με $\lfloor x \rfloor$. Επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$k = \left\lfloor \frac{t}{T_b} + \frac{1}{2} \right\rfloor \tag{8}$$

οπότε η (6) θα είναι:

$$x(t) = A_k \text{ , όπου } k = \left\lfloor \frac{t}{T_b} + \frac{1}{2} \right\rfloor \tag{9}$$

Στην περίπτωση που εξετάζουμε μπορούμε να μεταδώσουμε δύο ψηφιακά σύμβολα το 1 και το 0 ενώ τα αντίστοιχα πλάτη που μεταδίδονται καθορίζονται από την (4) και είναι δύο και αυτά σε αριθμό. Στη γενικότερη περίπτωση μπορεί να έχουμε περισσότερα ψηφιακά σύμβολα και επομένως περισσότερα πλάτη που τους αντιστοιχούν. Θεωρείστε για παράδειγμα ότι για να φτιάξουμε τα σύμβολα μας σχηματίζουμε ομάδες από 2 bits και για κάθε ένα πιθανό συνδυασμό, π.χ. το 00 ή το 10 αντιστοιχούμε μία τιμή τάσης, για παράδειγμα

$$A_k = \begin{cases} -3 \rightarrow 00 \\ -1 \rightarrow 01 \\ +1 \rightarrow 10 \\ +3 \rightarrow 11 \end{cases} \tag{10}$$

οπότε έχουμε $2^2 = 4$ διαφορετικά πλάτη $_k$. Αν σχηματίζαμε ομάδες των q bit θα είχαμε $Q = 2^q$ διαφορετικά πλάτη των οποίων τις τιμές μπορούμε να επιλέξουμε αυθαίρετα αρκεί να είναι διακριτές μεταξύ τους. Θα δούμε παρακάτω ότι η (10) έχει ένα σημαντικό πρόβλημα ως επιλογή αλλά δεν παύει να είναι μία από τις πιθανές εναλλακτικές αναπαραστάσεις. Στην περίπτωση αυτή κάθε σύμβολο διαρκεί $T_\mathrm{S} = qT_b = T_b \log_2 Q$ και επομένως:

$$x(t) = A_k \text{ , όπου } k = \left\lfloor \frac{t}{T_S} + \frac{1}{2} \right\rfloor \tag{11}$$

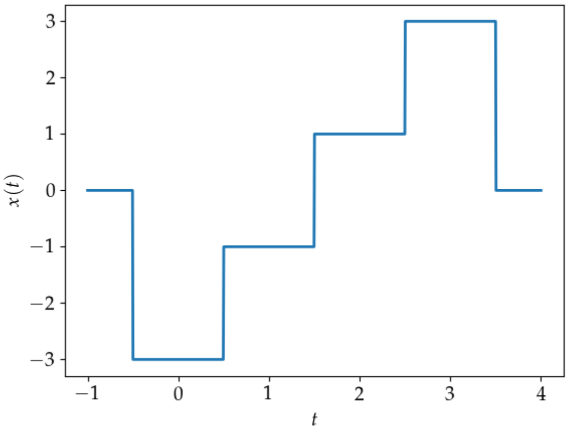
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

plt.rcParams.update({
    "text.usetex": True,
    "font.family": "serif",
    "font.serif": ["Palatino"],
    "font.size" : 14,
    "lines.linewidth" : 2,
})

symbol_map ={
    '00' : -3,
    '01' : -1,
    '10' : 1,
    '11' : 3
    }

def to_amps(m, b):
    q = len( list(m.keys()) [0] )
    bs = [ b[i:i+q] for i in range(0, len(b), q) ]
    vals = [ m[g] for g in bs ]
    return np.array(vals)

def dig_waveform(amps, t, TS):
    Namps = amps.size
    x = np.zeros(t.size)
    k = np.floor( t/TS + 0.5 ).astype(int)
    u = np.where( (k>=0) & (k<Namps) )
    x[ u ] = amps[ k[u] ]
    return x

b = '00011011'
amps = to_amps(symbol_map, b)
Tmax = 4
Tmin = -1
TS = 1
N = 1000
t = np.linspace(Tmin, Tmax, 1000)

x = dig_waveform(amps, t, TS)
plt.close('all')
plt.figure()
plt.plot(t, x)
plt.xlabel('$t$')
plt.ylabel('$x(t)$')
```

Listing 2: digital.py

Δείχνουμε εναν τρόπο υπολογισμού του $x(t)$ στο listing 2. Η συνάρτηση `to_amps` μετατρέπει μία ακολουθία από bit στα αντίστοιχα σύμβολα σύμφωνα με ένα `Python dictionary` όπως το `symbol_map`. Η συνάρτηση `dig_waveform` μετατρέπει τα πλάτη που περιέχονται στο array `amps` στην αναλογική κυματομορφή που παριστάνει το ψηφιακή σήμα σύμφωνα με την (11). Το αποτέλεσμα που παράγεται φαίνεται στην εικόνα 4.

Μπορούμε να γράψουμε το σήμα $x(t)$ λίγο διαφορετικά που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μαθηματικές αναλύσεις λίγο πιο εύκολα από ότι η (11). Αν κοιτάξουμε την εικόνα 4 παρατηρούμε ότι το σήμα $x(t)$ αποτελείται από τετραγωνικούς παλμούς $p(t)$ με κατάλληλο πλάτος που αντιστοιχεί στο εκάστοτε A_k, διάρκεια T_S οι οποίοι διαδοχικά είναι μετατοπισμένοι κατά T_S. Σε κάθε σύμβολο k ο μετατοπισμένος παλμός γράφεται $A_k p(t - kT_\mathrm{S})$. Εφόσον οι παλμοί επικαλύπτονται μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σήμα $x(t)$ είναι το άθροισμα των $A_k p(t - kT_\mathrm{S})$,

$$x(t) = \sum_k A_k p(t - kT_\mathrm{S}) \tag{12}$$



Εικόνα 4: Γραφική παράσταση του σήματος $x(t)$ σύμφωνα και με την (11).

4 Ενέργεια και ισχύς

Αν θεωρήσουμε ένα σήμα τάσης $v(t)$ το οποίο εφαρμόζεται στα άκρα μίας αντίστασης R τότε το ρεύμα που την διαρρέει είναι

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} \tag{13}$$

Σύμφωνα με τα όσα γνωρίζουμε από την ηλεκτρονική, η *στιγμιαία* ισχύς $P_R(t)$ που καταναλώνεται πάνω στην R, δίνεται από την σχέση:

$$P_R(t) = v(t)i(t) = \frac{v^2(t)}{R} \tag{14}$$

Σύμφωνα με την (14), η στιγμιαία ισχύς είναι ανάλογη του τετραγώνου του σήματος τάσης. Επομένως έχει νόημα να ορίσουμε την στιγμιαία ισχύ $P(t)$ ενός οποιοδήποτε σήματος $x(t)$ ως εξής:

$$P(t) = |x(t)|^2 \tag{15}$$

Παρατηρείστε ότι χρησιμοποιούμε το μέτρο $|\cdot|$ επειδή το σήμα μας μπορεί να είναι μιγαδικό. Το μέτρο $|z|$ ενός μιγαδικού αριθμού $z = a + jb$ είναι απλά $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Η *ενέργεια* $E(t_a, t_b)$ ενός σήματος μέσα στην χρονική διάρκεια $[t_a, t_b]$ είναι απλά το ολοκλήρωμα της ισχύος,

$$E(t_a, t_b) = \int_{t_a}^{t_b} P(t)\mathrm{d}t = \int_{t_a}^{t_b} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{16}$$

Η *μέση* ισχύς $\bar{P}(t_a, t_b)$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\bar{P}(t_a, t_b) = \frac{E(t_a, t_b)}{t_b - t_a} \tag{17}$$

Ο υπολογισμός της στιγμιαίας ισχύος είναι πολύ εύκολος, απλά υψώνουμε στο τετράγωνο το σήμα. Για την ενέργεια και την μέση ισχύ θα πρέπει να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση `trapz` της `numpy` για αυτό τον σκοπό η οποία προσεγγίζει ολοκληρώματα με τον κανόνα του τραπεζίου. Στο listing 3, δείχνουμε ένα παράδειγμα όπου υπολογίζουμε την ενέργεια και ισχύ στην περίπτωση ενός φέροντος με συχνότητα $f_0 = 2$ μέσα σε μία περίοδο του από $t_a = 0$ έως $t_b = \frac{1}{f_0}$. Θεωρούμε πως η αρχική φάση είναι $\phi = 0$. Η συνάρτηση `inst_power` υπολογίζει την στιγμιαία ισχύ την οποία ολοκληρώνουμε αριθμητικά στην συνάρτηση `energy` για να υπολογίσουμε την ενέργεια του σήματος. Η συνάρτηση `avg_power` υπολογίζει την μέση ισχύ του σήματος.

```
import numpy as np

# Carrier signal
def carrier(t, f0, A):
    return A * np.cos( 2 * np.pi * f0 * t )

# Instanteneous power
def inst_power(x):
```

```python
    return np.abs(x) ** 2

# signal windowing
def window(t, x, ta, tb):
    i = np.where( ( t>= ta ) & ( t <= tb ) )
    xw = x[i]
    tw = t[i]
    return tw, xw

# Energy
def energy(t, x, ta, tb):
    tw, xw = window(t, x, ta, tb)
    return np.trapz(tw, inst_power(xw))

# Average power
def avg_power(t, x, ta, tb):
    return energy(t, x, ta, tb) / (tb - ta)

T = 10
T1 = 2
f0 = 2
ta = 0
tb = 1/f0
A = 1

t = np.linspace(-T/2, T/2, 1000)
c = carrier(t, f0, A)
Eavg = energy(t, c, ta, tb)
Pavg = avg_power(t, c, ta, tb)
print('Eavg=', Eavg,'Pavg=',Pavg)
```

Listing 3: power.py

Αν τρέξουμε το listing θα πάρουμε `0.248` για την ενέργεια και `0.497` για την μέση ισχύ. Μπορούμε να δούμε και θεωρητικά γιατί προέκυψαν αυτές οι τιμές. Η ενέργεια υπολογίζεται ως εξής:

$$\mathcal{E} = \int_{t_a}^{t_b} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{0}^{t_b} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t) \mathrm{d}t = A^2 \int_{0}^{t_b} \cos^2(2\pi f_0 t) \mathrm{d}t \tag{18}$$

Χρησιμοποιώντας το ότι $\cos^2(\alpha x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha x))$, το ολοκλήρωμα του $\cos^2(\alpha x)$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\int \cos^2(\alpha x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int (1 + \cos(2\alpha x)) \mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2\alpha x)}{4\alpha} \tag{19}$$

Οπότε θα έχουμε

$$\mathcal{E} = A^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{\sin(4\pi f_0 t)}{8\pi f_0} \right]_0^{t_b} = \frac{A^2 t_b}{2} + \frac{\sin(4\pi f_0 t_b)}{8\pi f_0} \tag{20}$$

Δεδομένου ότι $t_b = \frac{1}{f_0}$ θα έχουμε $4\pi f_0 t_b = 4\pi$ οπότε $\sin(4\pi f_0 t_b) = \sin(4\pi) = 0$. Οπότε θα έχουμε:

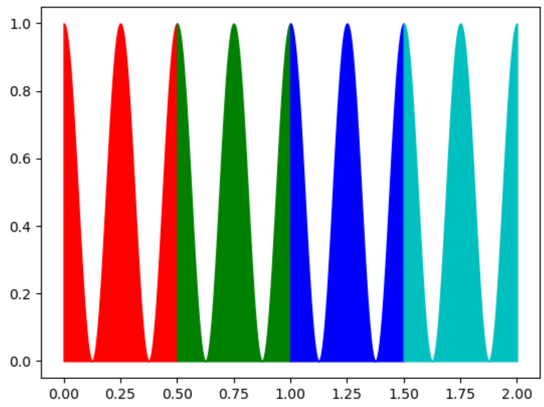
$$\mathcal{E} = \frac{A^2}{2 f_0} \tag{21}$$

Αν αντικαταστήσουμε $A = 1$ και $f_0 = 2$ που έχουμε θεωρήσει στον κώδικα, θα έχουμε $E = 0.25$ που είναι πολύ κοντά στο αποτέλεσμα που πήραμε από την `Python`. Ο υπολογισμός της μέσης ισχύος γίνεται από την (17),

$$P = \frac{E}{t_b - t_a} = \frac{E}{t_b} = \frac{A^2}{2} \tag{22}$$

Αντικαθιστώντας $A = 1$ βρίσκουμε ότι η μέση ισχύς είναι $P = 0.5$ που είναι σε συμφωνία με το αριθμητικό αποτέλεσμα που πήραμε από την `Python`.

Βλέπουμε επομένως ότι τα θεωρητικά μας αποτελέσματα συμφωνούν πολύ καλά με τα αριθμητικά και επομένως μάλλον είναι και τα δύο σωστά: έχουμε υλοποιήσει σωστά την αριθμητική μέθοδο (δηλαδή το script της Python) και έχουμε καταλάβει σωστά την θεωρία (δηλαδή τις (21)-(22)). Εναλλακτικά βέβαια μπορεί να είναι και τα δύο λάθος αλλά θα πρέπει να είναι λάθος με τέτοιον τρόπο που να βγάζουν το ίδιο λανθασμένο αποτέλεσμα - κάτι που θέλει αρκετή... ατυχία 😁.



Εικόνα 5: Γραφική παράσταση του $|x(t)|^2$ στην περίπτωση ενός φέροντος.

4.1 Μέση ισχύς σε όλον τον άξονα του χρόνου

Μπορούμε να ορίσουμε και την μέση ισχύ $\mathcal{P}$ σε όλη τη διάρκεια του άξονα του χρόνου, δηλαδή για $-\infty < t < +\infty$ θεωρώντας ότι $t_a \to -\infty$ και $t_a \to +\infty$. Συνήθως μας βολεύει να γράφουμε το $\mathcal{P}$ ως εξής:

$$\mathcal{P} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{23}$$

Όσο και αν φαίνεται δύσκολο μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση ισχύ $\mathcal{P}$ για την περίπτωση του φέροντος σήματος. Το μυστικό είναι μία παλιά ιδιότητα για τα όρια που λέει το εξής: εάν τ_n είναι μία ακολουθία που έχει όριο το $+\infty$ όταν $n \to +\infty$, δηλαδή

$$\lim_{n\to+\infty} \tau_n = +\infty \tag{24}$$

τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{\tau\to+\infty} f(\tau) \tag{25}$$

αντικαθιστώντας το τ με το τ_n,

$$\lim_{\tau\to+\infty} f(\tau) = \lim_{n\to+\infty} f(\tau_n) \tag{26}$$

Ας δούμε πως εφαρμόζεται η συγκεκριμένη ιδιότητα στον υπολογισμό της μέσης ισχύος του φέροντος. Αν θέσουμε $\tau_n = nT$ όπου $T = \frac{1}{f_0}$ είναι η περίοδος του φέροντος τότε:

$$\int_{-\tau_n}^{\tau_n} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-nT}^{nT} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{27}$$

Έχει ενδιαφέρον να παραστήσουμε γραφικά το $|x(t)|^2$ στην περίπτωση του φέροντος σήματος. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τον κώδικα στο listing 4. Θεωρούμε τέσσερις περιόδους του φέροντος και σε κάθε μία αναθέτουμε το δικό της χρώμα κόκκινο, πράσινο, μπλε και θαλασσί. Στην `matplotlib` τα απλά αυτά χρώματα αναπαρίστανται με απλές συμβολοσειρές `'r'`,`'g'`,`'b'`,`'c'` αντίστοιχα. Για κάθε μία περίοδο κάνουμε την γραφική παράσταση του $|x(t)|^2$ χρωματίζοντας το εμβαδόν με το κατάλληλο χρώμα χρησιμοποιώντας την συνάρτηση `fill_between` της `matplotlib`. Το αποτέλεσμα φαίνεται στην Εικόνα 5.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Carrier signal
def carrier(t, f0, A):
    return A * np.cos( 2 * np.pi * f0 * t )

# Instanteneous power
def inst_power(x):
    return np.abs(x) ** 2

A = 1
f0 = 2
T = 1/f0
```

```
plt.close('all')
plt.figure()
colors = ['r','g','b','c']
n = 1

for color in colors:
    t = np.linspace((n-1) * T, n * T, 100)
    x = carrier(t, f0, A)
    x2 = inst_power(x)
    plt.fill_between(t, x2, color=color)
    n += 1
```

Listing 4: integrate.py

Όπως φαίνεται στην εικόνα, το εμβαδόν κάτω από το $|x(t)|^2$ είναι ίσο στις διαδοχικές περιόδους του σήματος κάτι το οποίο δεν μας ξαφνιάζει αφού το $x(t)$ είναι περιοδικό. Επομένως αν θεωρήσουμε τις περιόδους από το $t = -nT$ έως το $t = nT$, προκύπτει ότι το ολοκλήρωμα $\int_{-nT}^{nT} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$ σπάει σε $2n$ επιμέρους ολοκληρώματα σε διαδοχικές περιόδους του φέροντος:

$$\int_{-nT}^{nT} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-nT}^{-(n-1)T} |x(t)|^2 \mathrm{d}t + \int_{-(n-1)T}^{-(n-2)T} |x(t)|^2 \mathrm{d}t + \cdots + \int_{(n-1)T}^{nT} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{28}$$

Εφόσον το σήμα είναι περιοδικό τα επιμέρους ολοκληρώματα είναι ίσα:

$$\int_{-nT}^{nT} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = (2n) \int_0^T |x(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{29}$$

οπότε θα έχουμε και

$$\frac{1}{2\tau_n} \int_{-\tau_n}^{\tau_n} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{30}$$

Λαμβάνοντας το όριο:

$$\mathcal{P} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\tau_n} \int_{-\tau_n}^{\tau_n} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{31}$$

Η (31) είναι ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα. Μας λέει ότι για ένα οποιοδήποτε περιοδικό σήμα, η μέση ισχύς $\mathcal{P}$ για $-\infty < t < +\infty$ ισούται με την μέση ισχύ μέσα σε μία περίοδο του $P(0, T)$, δηλαδή:

$$\mathcal{P} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 \mathrm{d}t = P(0, T) \tag{32}$$

4.2 Κατηγορίες σημάτων

Έχοντας ορίσει την ενέργεια και την μέση ισχύ ενός σήματος, μπορούμε να ορίσουμε δύο κατηγορίες σημάτων:

- *Σήματα πεπερασμένης ενέργειας* που έχουν πεπερασμένη ενέργεια,

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t < +\infty \tag{33}$$

- *Σήματα πεπερασμένης ισχύος* που έχουν πεπερασμένη μέση ισχύ,

$$\mathcal{P} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |x(t)|^2 \mathrm{d}t < +\infty \tag{34}$$

Ένα περιοδικό σήμα όπως το φέρον σήμα έχει άπειρη ενέργεια οπότε δεν είναι σήμα πεπερασμένης ενέργειας. Πράγματι όπως είδαμε προηγουμένως η ενέργεια σε κάθε περίοδο του σήματος δίνεται από την (21). Η ενέργεια $\mathcal{E}$ είναι το άθροισμα της ενέργειας σε όλες τις περιόδους του σήματος οι οποίες είναι άπειρες σε αριθμό, οπότε προκύπτει το $\mathcal{E}$ απειρίζεται. Μπορούμε να δείξουμε επίσης ότι το τετραγωνικό σήμα (1) είναι πεπερασμένης ενέργειας:

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} |p(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-T_1/2}^{+T_1/2} \mathrm{d}t = T_1 \tag{35}$$

Ένα σήμα πεπερασμένης ενέργειας θα έχει μηδενική μέση ισχύ. Για να το δούμε αυτό ας γράψουμε την ενέργεια ως

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \lim_{\tau\to+\infty} \int_{-\tau}^{\tau} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{36}$$

Η μέση ισχύς $\mathcal{P}$ θα είναι:

$$\mathcal{P} = \lim_{\tau\to+\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \lim_{\tau\to+\infty} \frac{1}{2\tau} \times \lim_{\tau\to+\infty} \int_{-\tau}^{\tau} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = 0 \times \mathcal{E} = 0 \tag{37}$$

5 Αυτοσυσχέτιση σήματος

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι ένα μέτρο που καθορίζει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται ένα σήμα. Για σήματα πεπερασμένης ενέργειας, ορίζουμε την αυτοσυχέτιση ως εξής:

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x^*(\tau - t)\mathrm{d}\tau \tag{38}$$

Για σήματα πεπερασμένης ισχύος μπορούμε να ορίσουμε την αυτοσυσχέτιση ως εξής:

$$\mathcal{R}(t) = \lim_{\tau\to+\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} x(\tau)x^*(\tau - t)\mathrm{d}\tau \tag{39}$$

όπου το $x^*(t)$ είναι το μιγαδικό συζυγές του $x(t)$. Στα ολοκληρώματα ως προς τ, (38) και (39) η συνάρτηση προς ολοκλήρωση είναι το $x(\tau)x^*(\tau - t)$. Αν το $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα τότε καταλαβαίνουμε ότι όσο καλύτερα ταιριάζει το $x(\tau)$ με την καθυστερημένη έκδοση του εαυτού του $x(\tau - t)$ τόσο μεγαλύτερο θα είναι το ολοκλήρωμα. Επομένως η αυτοσυσχέτιση μετράει πόσο καλά ταιριάζουν οι τιμές του σήματος με τις προηγούμενες τιμές του. Θα δούμε σε επόμενο μάθημα γιατί στην περίπτωση των μιγαδικών σημάτων χρησιμοποιούμε το $x^*(\tau - t)$ αντί του $x(\tau - t)$

Ας υπολογίσουμε την αυτοσυσχέτιση του τετραγωνικού παλμού που δίνεται από την (1). Δεδομένου ότι το $p(\tau)$ είναι ίσο με 1 όταν $-T_1/2 \leq \tau \leq T_1/2$ και μηδέν διαφορετικά, το ολοκλήρωμα (38) γράφεται:

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau)p^*(\tau - t)\mathrm{d}\tau \tag{40}$$

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Square pulse
def square_pulse(t, T1):
    samples = np.zeros(t.size)
    i = np.where( np.abs(t) <= 0.5 * T1)
    samples[ i ] = 1
    return samples

# correlation function
def corr_square(t, T1):
    samples = np.zeros(t.size)
    i = np.where( np.abs(t) <= T1)
    samples[ i ] = T1 - np.abs(t[i])
    return samples

T = 10
T1 = 2
f0 = 1
A = 1
tt = [0, 0.5, 1, 2]

tau = np.linspace(-T/2, T/2, 1000)
plt.close('all')
for t in tt:
    p = square_pulse(tau, T1)
    p2 = square_pulse(tau - t, T1)

    plt.figure()
    plt.plot(tau, p, label = 'p(tau)')
    plt.plot(tau, p2, '--', label = 'p(tau-t)')
```

```

    plt.title('t=%6.2f' % t)
    plt.xlabel('t')
    plt.legend()

plt.figure()
t = np.linspace(-2*T1, 2*T1, 1000)
Rt = corr_square(t, T1)
plt.plot(t, Rt)
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('Rt')
```

Listing 5: corrsquare.py

Χρησιμοποιούμε το listing 5 για να καταλάβουμε πως θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα (40). Ο κώδικας στην ουσία κάνει την γραφική παράσταση του $p(\tau)$ και του $p^*(\tau - t)$ για διάφορες τιμές του $t \geq 0$ και τα αποτελέσματα φαίνονται στην εικόνα 6.

Το ολοκλήρωμα στην (40) αφορά το γινόμενο των δύο παλμών $p(\tau)p^*(\tau - t)$ το οποίο είναι ίσο με 1 όταν και οι δύο παλμοί είναι ίσοι με 1 και μηδέν διαφορετικά. Επομένως για κάθε t πρέπει να καθορίσουμε το μήκος της περιοχής l_t όπου οι δύο παλμοί είναι ταυτόχρονα ίσοι με 1. Εφόσον το ολοκλήρωμα είναι το εμβαδόν του $p(\tau)p^*(\tau - t)$, έπεται ότι το ολοκλήρωμα θα ισούται με l_t. Από την εικόνα 6d είναι φανερό ότι για $t \geq T_1$ δεν υπάρχει κοινό διάστημα όπου οι παλμοί είναι ταυτόχρονα 1 οπότε θα έχουμε $l_t = 0$ και επομένως και $R(t) = 0$. Για $t = 0$ οι δύο παλμοί ταυτίζονται όπως φαίνεται στην εικόνα 6a οπότε $R(t) = l_t = T_1$. Για ενδιάμεσες τιμές $0 < t < T_1$ όπως φαίνεται στις εικόνες 6b και 6c οι παλμοί είναι ταυτόχρονα 1 σε μία περιοχή της οποίας το μήκος καθορίζεται με το t. Είναι φανερό ότι το μήκος της περιοχής πρέπει να μειώνεται γραμμικά με την μετακίνηση στον άξονα του χρόνου δηλαδή με το t, δηλαδή θα πρέπει να είναι της μορφής $l_t = \alpha - \beta t$. Για $t = 0$ θα έχουμε $l_t = T_1$ και για $t = T_1$ θα έχουμε $l_t = 0$. Για να ισχύουν αυτά θα πρέπει $\alpha = T_1$ και $\beta = 1$, οπότε $l_t = T_1 - t$. Προκύπτει επομένως ότι για $0 \leq t \leq T_1$ θα έχουμε $R(t) = T_1 - t$. Για αρνητικά t η κατάσταση είναι ίδια απλά ο παλμός $p^*(\tau - t)$ θα βρίσκεται αριστερά και όχι δεξιά του $p(t)$. Αν επαναλάβουμε την διαδικασία θα δούμε ότι τώρα $R(t) = 0$ για $t < -T_1$ και $R(t) = T_1 - |t|$. Μπορούμε και στις δύο περιπτώσεις επομένως να γράψουμε:

$$R(t) = \begin{cases} T_1 - |t| & 0 \leq |t| \leq T_1, \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{41}$$

Στην εικόνα 7 παριστάνουμε γραφικά την αυτοσυσχέτιση του σήματος χρησιμοποιώντας το listing 5. Παρατηρούμε ότι έχει τριγωνική μορφή και όπως είναι αναμενόμενο όσο αυξάνει το $|t|$, δηλαδή όσο απομακρυνόμαστε από την στιγμή αναφοράς τόσο μειώνεται η συσχέτιση.

Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε την αυτοσυχέτιση $\mathcal{R}(t)$ στην περίπτωση του φέροντος (2) για $\phi = 0$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το τέχνασμα με τις ακολουθίες για να αποδείξουμε την (31). Το $x(\tau)x^*(\tau - t)$ είναι περιοδικό ως προς το τ με περίοδο $T = 1/f_0$ οπότε όπως και στην περίπτωση της μέσης ισχύος:

$$\frac{1}{2nT}\int_{-nT}^{nT} x(\tau)x^*(\tau - t)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{T}\int_0^T x(\tau)x^*(\tau - t)\mathrm{d}\tau \tag{42}$$

οπότε:

$$\mathcal{R}(t) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2nT}\int_{-nT}^{nT} x(\tau)x^*(\tau - t)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{T}\int_0^T x(\tau)x^*(\tau - t)\mathrm{d}\tau \tag{43}$$

Επομένως υπολογίζουμε την αυτοσυσχέτιση μέσα στην περίοδο του σήματος. Δεδομένου ότι

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha + \beta\right) + \cos\left(\alpha - \beta\right)\right) \tag{44}$$

οπότε

$$x(\tau)x^*(\tau - t) = \frac{A^2}{2}\cos\left(2\pi f_0 t\right) + \frac{A^2}{2}\cos\left(4\pi f_0\tau - 2\pi f_0 t\right) \tag{45}$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι

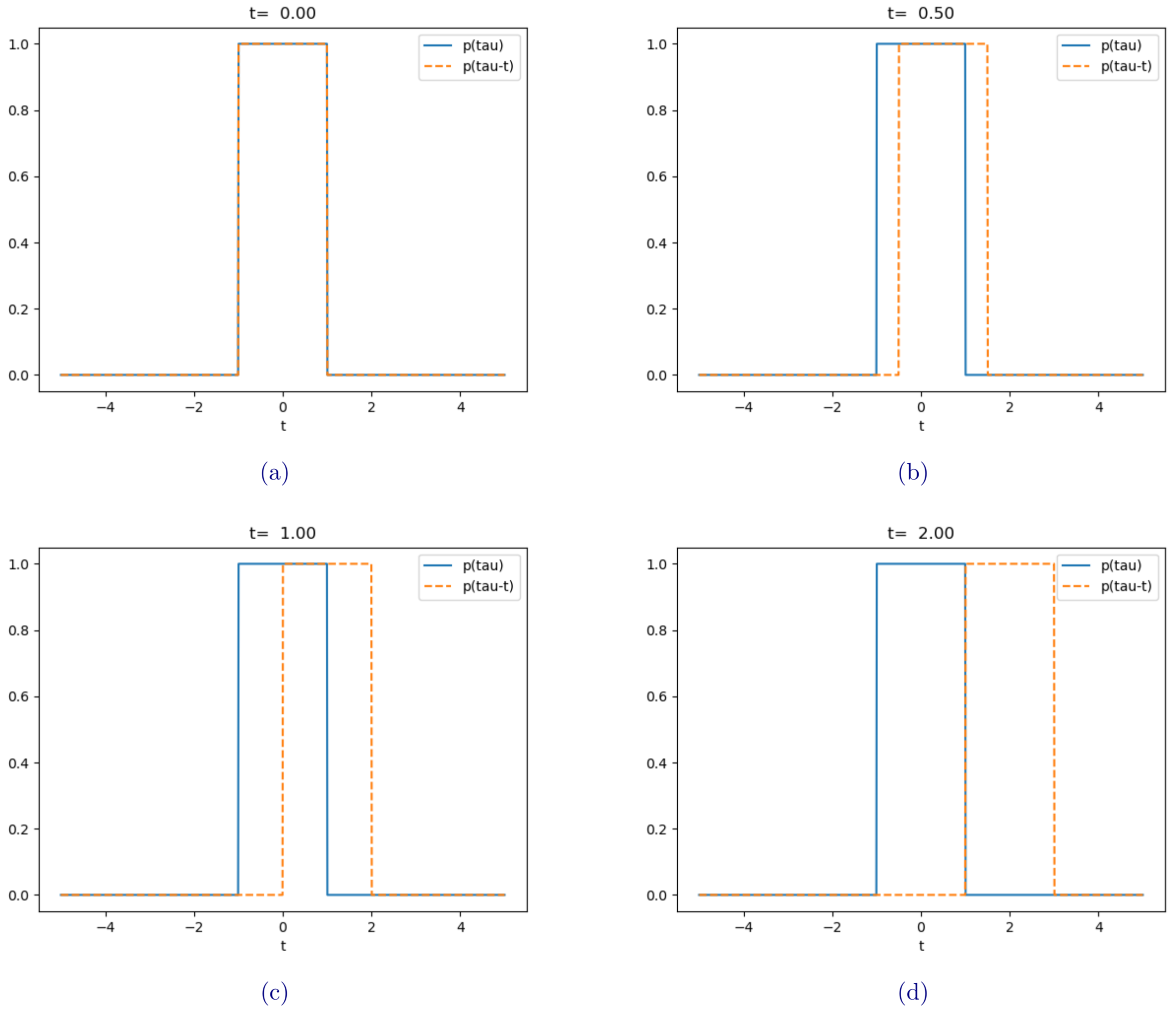
$$\int_0^T \cos\left(4\pi f_0\tau - 2\pi f_0 t\right)\mathrm{d}\tau = \frac{\sin(4\pi f_0 T - 2\pi f_0 t)}{4\pi f_0} - \frac{\sin(-2\pi f_0 t)}{4\pi f_0} \tag{46}$$

και εφόσον $T = \frac{1}{f_0}$ θα έχουμε:

$$\int_0^T \cos\left(4\pi f_0\tau - 2\pi f_0 t\right)\mathrm{d}\tau = 0 \tag{47}$$

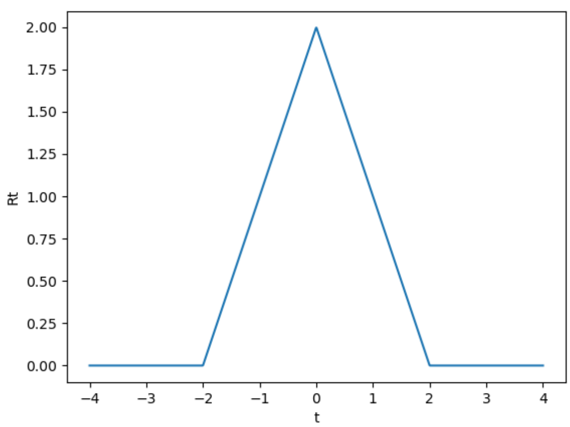
Κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε ότι:

$$\mathcal{R}(t) = \frac{A^2}{2}\cos\left(2\pi f_0 t\right) \tag{48}$$



(a) (b) (c) (d)

Εικόνα 6: του $p(\tau)$ και του $p^*(\tau - t)$ για διάφορες τιμές του $t \geq 0$.



Εικόνα 7: Η αυτοσυσχέτιση του σήματος (1).

6 Ώρα για σπαζοκεφαλιές

1. Υπολογίστε θεωρητικά (δηλαδή με χαρτί και μολύβι) την μέση ισχύ ενός τετραγωνικού παλμού όπως δίνεται από την (1) στο διάστημα $[-T_1, T_1]$. Στη συνέχεια γράψτε ένα μικρό πρόγραμμα σε `Python` για να επαληθεύσετε το αποτέλεσμα σας θεωρώντας ότι $T_1 = 4$.
2. Πόση είναι θεωρητικά η μέση ισχύς $\mathcal{P}$ του τετραγωνικού παλμού (1) μέσα στο διάστημα $-\infty < t < +\infty$;
3. Θεωρείστε το σήμα $x(t) = \mathrm{e}^{-|t|/t_0}$. Γράψτε ένα κώδικα σε `Python` που να παριστάνει γραφικά το σήμα στο διάστημα $[-5t_0, 5t_0]$. Υπολογίστε την μέση ισχύ στο διάστημα $[-5t_0, 5t_0]$ χρησιμοποιώντας πάλι `Python`. Υπολογίστε την μέση ισχύ $\mathcal{P}$ στο $-\infty < t < +\infty$ χρησιμοποιώντας χαρτί και μολύβι. Ταιριάζουν τα δύο αποτελέσματα; γιατί;
4. Κλείστε τις σημειώσεις, πάρτε χαρτί και μολύβι και προσπαθήστε να αποδείξετε μόνοι σας την (31).