Μάθημα 2: Το σήμα δέλτα $\delta(t)$

Θωμάς Καμαλάκης

30 Αυγούστου 2023

1 Ορισμός του $\delta(t)$

Στο μάθημα αυτό θα γνωρίσουμε ένα πολύ χρήσιμο σήμα, την συνάρτηση $\delta(t)$. Θα πρέπει να ξεκαθαρίσουμε ότι το σήμα αυτό δεν μπορεί να υλοποιηθεί με κανέναν τρόπο, ωστόσο αποτελεί μία χρήσιμη προσέγγιση και ένα πολύτιμο εργαλείο για την ανάλυση συστημάτων επικοινωνιών.

1.1 Το $\delta(t)$ ως όριο

Το σήμα $\delta(t)$ είναι ένας τετραγωνικός παλμός με πολύ μικρή διάρκεια και τεράστιο πλάτος. Ορίζουμε αρχικά το σήμα $\delta_\tau(t)$ αυτό με παρόμοιο τρόπο όπως ορίσαμε και τον τετραγωνικό παλμό και στο προηγούμενο μάθημα:

$$\delta_\tau(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & , -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{1}$$

Ας χρησιμοποιήσουμε την **Python** για να κάνουμε μία γραφική παράσταση του $\delta_\tau(t)$ για διάφορες τιμές του τ. Χρησιμοποιούμε το listing 1 για τον σκοπό αυτό. Στην εικόνα 1 δείχνουμε το αποτέλεσμα που παράγεται.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Square pulse
def square_pulse(t, T1, A):
    samples = np.zeros(t.size)
    i = np.where( np.abs(t) <= 0.5 * T1)
    samples[ i ] = A
    return samples

T = 1
taus = np.array([0.2, 0.1, 0.05])
colors = ['r--','g-.','b']
As = 1 / taus
t = np.linspace(-T/2, T/2, 1000)

plt.close('all')
plt.figure()

for i, tau in enumerate(taus):
    A = As[i]
    d = square_pulse(t, tau, A)
    plt.plot(t, d, colors[i], label='tau=%6.2f' % tau)

plt.legend()
```

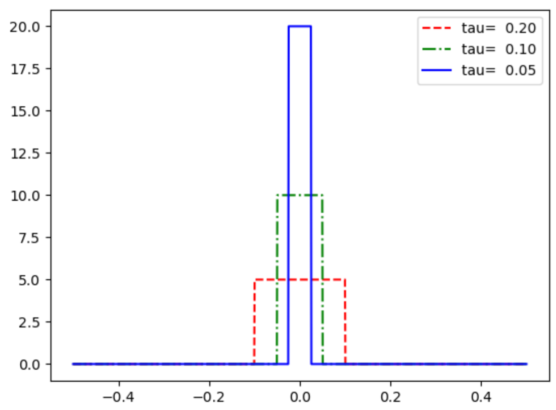
Listing 1: deltatau.py

Παρατηρούμε ότι όσο το τ μικραίνει, τόσο αυξάνει το πλάτος του $\delta_\tau(t)$ και τόσο μικραίνει η διάρκεια του. Το εμβαδόν του παλμού δίνεται από τον γνωστό τύπο βάση επί ύψος όπου η βάση είναι η διάρκεια του παλμού τ ενώ το ύψος το πλάτος του $1/\tau$, οπότε ισούται πάντα με $\tau \times \frac{1}{\tau} = 1$ ανεξάρτητα από την τιμή του τ.

Η συνάρτηση $\delta(t)$ προκύπτει από το όριο του δ_τ για πολύ μικρό τ,

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \delta_\tau(t) \tag{2}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι όταν $\tau \to 0$, το πλάτος του $\delta_\tau(t)$ που είναι ίσο με $\frac{1}{\tau}$ απειρίζεται ενώ η διάρκεια του παλμού γίνεται μηδέν. Επίσης εφόσον η διάρκεια του παλμού είναι απείρως μικρή θα έχουμε $\delta(t) = 0$ για $t \neq 0$. Έχουμε επομένως:



Εικόνα 1: Γραφική παράσταση του $\delta_\tau(t)$ για διάφορα τ

$$\delta(t) = \begin{cases} \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} = +\infty & ,\text{t=0} \\ 0 & ,\text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{3}$$

Φυσικά δεν μπορούμε ποτέ να φτιάξουμε ένα τέτοιο σήμα με άπειρο πλάτος. Ωστόσο αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο όπως θα δούμε και παρακάτω.

1.2 Το $\delta(t)$ ως παράγωγος

Υπάρχει και ένας άλλος τρόπος να καταλάβουμε πως προκύπτει το $\delta(t)$. Ας θεωρήσουμε ένα σήμα $u(t)$ που δίνεται από την σχέση:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & ,t \geq 0 \\ 0 & ,t < 0 \end{cases} \tag{4}$$

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# step function
def step_function(t):
    samples = np.zeros(t.size)
    i = np.where( t>=0 )
    samples[ i ] = 1
    return samples

T = 1
t = np.linspace(-T/2, T/2, 1000)
ut = step_function(t)
plt.close('all')
plt.figure()
plt.plot(t, ut, '.')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('u(t)')
```

Listing 2: ut.py

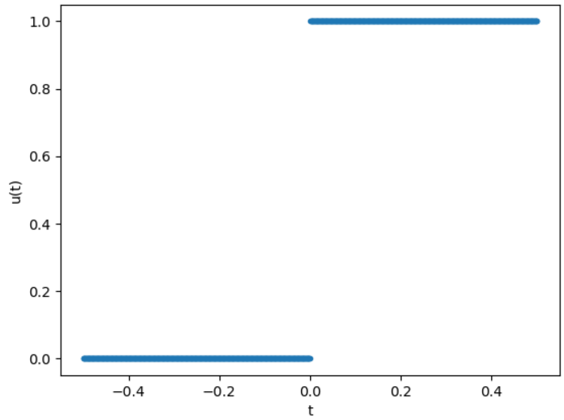
Ας χρησιμοποιήσουμε την **Python** για να παραστήσουμε γραφικά αυτό το σήμα. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τον κώδικα στο listing 2. Στην εικόνα 2 δείχνουμε την γραφική παράσταση του $u(t)$ που προκύπτει. Παρατηρούμε ότι η $u(t)$ έχει μία ασυνέχεια στο $t = 0$ όπως άλλωστε είναι και φανερό από την (4). Όπως γνωρίζουμε και από το σχολείο, μία συνάρτηση που έχει ασυνέχεια σε ένα σημείο δεν μπορεί να έχει παράγωγο στο σημείο αυτό. Αλλά τι θα γινόταν αν υπολογίζαμε την παράγωγο της $u(t)$;

Στο $t = 0$

$$u'(0) = \lim_{\tau \to 0} \frac{u(t + \tau/2) - u(t - \tau/2)}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{1 - 0}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \tag{5}$$

Για $t < 0$ η συνάρτηση είναι σταθερή οπότε θα είχε παράγωγο μηδέν, $u'(t) = 0$. Το ίδιο συμβαίνει και για $t > 0$. Οπότε χρησιμοποιώντας την (3) προκύπτει ότι:

$$u'(t) = \delta(t) \tag{6}$$



Εικόνα 2: Γραφική παράσταση του $u(t)$

Το $u(t)$ ονομάζεται *βηματικό* σήμα. Οπότε δείξαμε ότι υπό μία έννοια η συνάρτηση $\delta(t)$ είναι η παράγωγος του βηματικού σήματος. Αυστηρά μαθηματικώς βέβαια, το $u(t)$ δεν είναι συνεχές στο $t = 0$ και επομένως δεν μπορεί να έχει παράγωγο.

1.3 Ορισμός του $\delta(t)$ μέσω ολοκληρωμάτων

Αν δεν σας αρέσουν οι δύο παραπάνω τρόποι να ορίσουμε το $\delta(t)$ μην ανησυχείτε, υπάρχει και ένας τρίτος. Ελάτε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)x(t)\mathrm{d}t \tag{7}$$

όπου $x(t)$ ένα οποιοδήποτε σήμα. Χρησιμοποιώντας την (6) θα έχουμε:

$$\delta(t - t_0) = u'(t - t_0) \tag{8}$$

Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα και χρησιμοποιώντας την ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)x(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} u'(t - t_0)x(t)\mathrm{d}t = [u(t - t_0)x(t)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} u(t - t_0)x'(t)\mathrm{d}t \tag{9}$$

Για το ολοκλήρωμα στο τελευταίο μέρος έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t - t_0)x'(t)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{+\infty} x'(t)\mathrm{d}t = x(+\infty) - x(t_0) \tag{10}$$

όπου με $x(+\infty)$ συμβολίζουμε το $\lim_{t\to+\infty} x(t)$. Για τον πρώτο όρο του τελευταίου μέρους της (9) έχουμε:

$$[u(t - t_0)x(t)]_{-\infty}^{+\infty} = x(+\infty)u(+\infty) - x(-\infty)u(-\infty) = x(+\infty) \tag{11}$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις στην (9):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)x(t)\mathrm{d}t = x(t_0) \tag{12}$$

Σύμφωνα με την (12) όταν ολοκληρώνουμε το σήμα $\delta(t - t_0)$ με ένα οποιοδήποτε άλλο σήμα $x(t)$ λαμβάνουμε το $x(t)$ στην χρονική στιγμή $t = t_0$. Πολλές φορές τα βιβλία αναφέρουν την (12) ως τον ορισμό του σήματος $\delta(t)$.

Την (12) θα την χρησιμοποιήσουμε αρκετά συχνά και στα παρακάτω οπότε έχει νόημα να την καταλάβουμε όσο το δυνατόν καλύτερα. Η αλήθεια είναι ότι αρχικά ξενίζει. Πως είναι δυνατόν να ολοκληρώνεις ένα σήμα $x(t)$ με το $\delta(t - t_0)$ και να λαμβάνεις μία τιμή του σήματος $x(t_0)$; Ας προσπαθήσουμε να το αναπαράγουμε στην `Python`. Στο listing 3 υπολογίζουμε ένα αρχικό σήμα $x(t)$ το οποίο θα συναντήσουμε και παρακάτω ως εξής

$$x(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2t_g^2}\right) \tag{13}$$

Στην βιβλιογραφία αυτό το σήμα αναφέρεται συνήθως ως *Gaussian* σήμα ή Gaussian παλμός. Στην εικόνα 3 έχουμε κάνει μία γραφική παράσταση του $x(t)$ όπως προκύπτει και από το listing για $t_g = 1$. Παρατηρείστε ότι το σχήμα μοιάζει με μία συμμετρική καμπάνα το άνοιγμα της οποίας καθορίζεται από το t_g. Στο κέντρο $t = 0$ έχουμε το μέγιστο που ισούται με 1. Ας ψάξουμε να βρούμε τα σημεία t_h όπου η ισχύς του σήματος πέφτει στο μισό σε σχέση με το μέγιστο:

$$|x(t_h)|^2 = \frac{1}{2}|x(0)|^2 = \frac{1}{2} \tag{14}$$

Αν αντικαταστήσουμε θα έχουμε:

$$\exp\left(-\frac{t_h^2}{t_g^2}\right) = \frac{1}{2} \tag{15}$$

και προκύπτει ότι

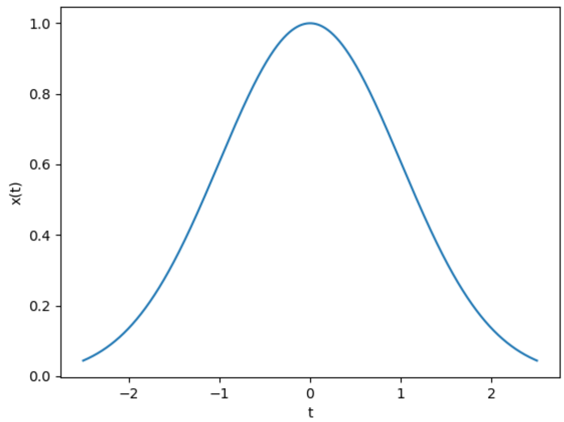
$$t_h = \pm t_g \ln 2 \tag{16}$$

Θα μπορούσαμε να ορίσουμε ως εύρος του παλμού B το χρονικό διάστημα που χρειάζεται ώστε ο παλμός να πάει από το 50% της ισχύος του στο μέγιστο και μετά να ξαναπέσει στο 50%. Είναι φανερό ότι αυτή η διάρκεια είναι ίση με $B = 2t_h = 2t_g \ln 2$. Για την περίπτωση όπου έχουμε θεωρήσει η στιγμιαία ισχύς του σήματος $|x(t)|^2$ φαίνεται στην Εικόνα 3 και λαμβάνουμε $B = 2\ln 2 = 1.386$. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε με το μάτι ότι τόσο είναι το διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ των στιγμών όπου η ισχύς είναι 50%.

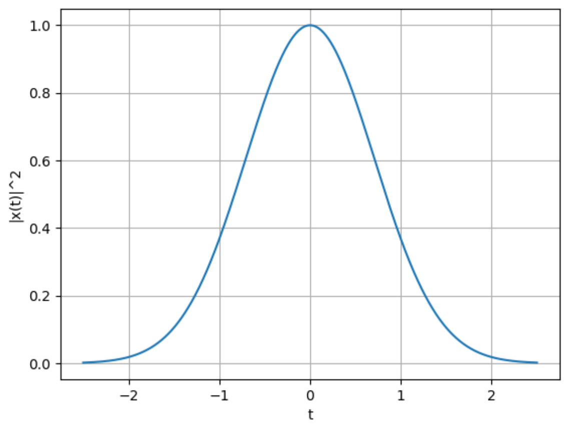
```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# approximate delta function
def appx_delta(t, tau):
    samples = np.zeros(t.size)
    i = np.where( np.abs(t) <= 0.5 * tau)
    samples[ i ] = 1/tau
    return samples

# setup time axis
T = 5
N = 10000
t = np.linspace(-T/2, T/2, N)

# Setup test signal to integrate
tg = 1
x = np.exp( -t**2. / (2 * tg**2) )

# Integrand calculation
t0 = 0.5
tau = 0.1
y = x * appx_delta(t-t0, tau)

# Plot original signal and integrand
plt.close('all')
plt.figure()
plt.plot(t, x)
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('x(t)')

# Plot power of signal
plt.figure()
plt.plot(t, np.abs(x) ** 2)
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('|x(t)|^2')
plt.grid()

plt.figure()
plt.plot(t, y)
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('y(t)')

I = np.trapz(y, t)
```

Listing 3: intdelta.py

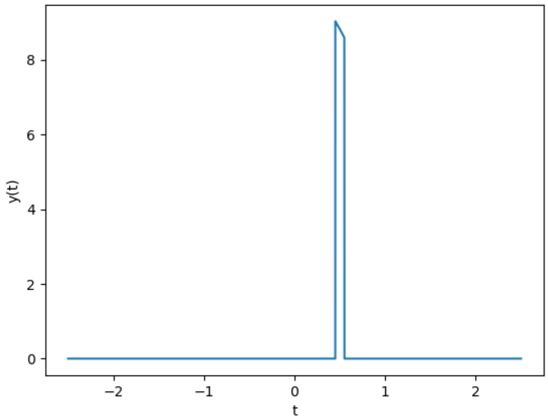
Στην εικόνα 5 δείχνουμε την γραφική παράσταση του $x(t)\delta(t - t_0)$ για $t_0 = 0.5$. Αυτή είναι η συνάρτηση που θα ολοκληρώσουμε. Παρατηρείστε ότι είναι μηδέν παντού εκτός από μία μικρή περιοχή γύρω από το $t = t_0 = 0.5$ κάτι που οφείλεται στον τρόπο που προσεγγίζουμε την $\delta(t - t_0)$ που προκύπτει από την (1). Η περιοχή αυτή έχει διάρκεια ίση με τ και στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε θεωρήσει ότι $\tau = 0.1$.



Εικόνα 3: Γραφική παράσταση του $x(t)$ όπως ορίζεται στην (13)



Εικόνα 4: Γραφική παράσταση του $|x(t)|^2$



Εικόνα 5: Γραφική παράσταση του $x(t)\delta(t-t_0)$

Στην περιοχή αυτή το $x(t)$ είναι σχεδόν σταθερό και ίσο με $x(t_0)$ ενώ το $\delta(t-t_0)$ είναι ίσο με $1/\tau$. Επομένως θα έχουμε $x(t)\delta(t-t_0) \cong x(t_0)/\tau$, ενώ το ολοκλήρωμα θα είναι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)x(t)\mathrm{d}t \cong \int_{t_0-\tau/2}^{t_0+\tau/2} \delta(t-t_0)x(t)\mathrm{d}t \cong \int_{t_0-\tau/2}^{t_0+\tau/2} \frac{1}{\tau}x(t_0)\mathrm{d}t = x(t_0)\int_{t_0-\tau/2}^{t_0+\tau/2} \frac{1}{\tau}\mathrm{d}t = x(t_0) \tag{17}$$

Οπότε δείξαμε την ιδιότητα (12). Υπάρχει όμως ένα ερώτημα: τι θα συνέβαινε αν το αρχικό σήμα είχε μικρότερη διάρκεια, π.χ. η καμπάνα στην εικόνα 3 ήταν στενότερη χρονικά (δηλαδή επιλέγαμε μικρότερο t_g); Τότε μέσα στο χρονικό διάστημα όπου το $\delta_\tau(t-t_0)$ είναι μη μηδενικό στην εικόνα 5, οι μεταβολές του $x(t)$ θα ήταν πιο έντονες και ενδεχομένως η προσέγγιση στην (17) να μην ήταν ικανοποιητική. Ωστόσο ας μην ξεχνάμε την βασική ιδέα πίσω από το όριο στην (2): μπορούμε να κάνουμε το τ όσο μικρό θέλουμε. Επομένως αν κάποιος επιλέξει ένα t_g μικρότερο κατά δέκα φορές, απλά εμείς επιλέγουμε ένα τ επίσης δέκα φορές μικρότερο οπότε τελικά έχουμε πάλι την ίδια κατάσταση.

2 Ώρα για σπαζοκεφαλιές

1. Αλλάξτε το listing 3 έτσι ώστε το $x(t)$ να δίνεται από την σχέση:

   $$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \tag{18}$$

   Επιλέξτε τον συνδυασμό f_0 και τ έτσι ώστε $\tau \ll \frac{1}{f_0}$ για να ισχύει η προσέγγιση.

2. Στη βιβλιογραφία αναφέρεται ότι η συνάρτηση $\delta(t)$ μπορεί να περιγραφεί και από το όριο

   $$\delta(t) = \lim_{\tau\to 0}\frac{\sin(\pi t/\tau)}{\pi t} \tag{19}$$

   Χρησιμοποιείστε την `Python` για να δείξετε ότι και για αυτή την προσέγγιση ισχύει η (12) όπως κάναμε στο listing 3.

3. Δείξτε με χαρτί και μολύβι ότι $\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(t)$

4. Υπολογείστε με χαρτί και με μολύβι το διπλό ολοκλήρωμα:

   $$\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_0 t)\delta(t-t')\mathrm{d}t'\mathrm{d}t \tag{20}$$