

Μάθημα 5: Συστήματα

Θωμάς Καμαλάκης

11 Σεπτεμβρίου 2023

1 Εισαγωγή

Πολλές φορές στις επικοινωνίες, θεωρούμε ότι τα σήματα μας περνάνε από διάφορα συστήματα όπως καλώδια, ενισχυτές κτλ. Στην εικόνα 1 δείχνουμε μία βασική αναπαράσταση ενός συστήματος με μία είσοδο, το σήμα $x(t)$ και μία έξοδο το σήμα $y(t)$. Τα συστήματα αλλάζουν το σήμα εισόδου $x(t)$ και το μετασχηματίζουν στο $y(t)$. Αυτή η πράξη του μετασχηματισμού συμβολίζεται με το $\mathcal{T}$ οπότε γράφουμε

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} \quad (1)$$

Ο τρόπος με τον οποίο επιδρούν τα συστήματα στα σήματα μπορεί να είναι πολύ απλός ή και πολύ πολύπλοκος ανάλογα με τη φύση του συστήματος και το επίπεδο ακρίβειας που επιθυμούμε. Μία χρήσιμη κατηγορία σημάτων είναι τα γραμμικά αναλλοίωτα (linear time invariant - LTI) συστήματα. Ένα σύστημα λέγεται γραμμικό όταν διατηρεί την γραμμικότητα της εισόδου του στην έξοδο. Έτσι αν έχουμε δύο σήματα $x_1(t)$ και $x_2(t)$ που έχουν εξόδους $y_1(t)$ και $y_2(t)$:

$$y_1(t) = \mathcal{T}\{x_1(t)\} \quad (2)$$

$$y_2(t) = \mathcal{T}\{x_2(t)\} \quad (3)$$

τότε αν έχουμε ως είσοδο τον γραμμικό συνδυασμό των εισόδων τους $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ όπου c_1 και c_2 τότε θα ισχύει:

$$\mathcal{T}\{c_1x_1(t) + c_2x_2(t)\} = c_1\mathcal{T}\{x_1(t)\} + c_2\mathcal{T}\{x_2(t)\} = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \quad (4)$$

Η (4) μπορεί να φαίνεται προφανής αλλά δεν ισχύει για όλα τα συστήματα. Πάρτε για παράδειγμα το σύστημα:

$$\mathcal{T}\{x(t)\} = x^2(t) \quad (5)$$

Το παραπάνω σύστημα τετραγωνίζει το σήμα στην είσοδο και το στέλνει στην έξοδο. Μπορούμε να δούμε ότι:

$$\mathcal{T}\{x_1(t) + x_2(t)\} = (x_1(t) + x_2(t))^2 = x_1^2(t) + x_2^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) \quad (6)$$

ενώ έχουμε:

$$\mathcal{T}\{x_1(t)\} + \mathcal{T}\{x_2(t)\} = x_1^2(t) + x_2^2(t) \quad (7)$$

Συγκρίνοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις καταλαβαίνουμε ότι μόνο εάν $x_1(t) = 0$ ή $x_2(t) = 0$ θα ισχύει:

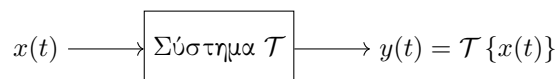
$$\mathcal{T}\{x_1(t) + x_2(t)\} = \mathcal{T}\{x_1(t)\} + \mathcal{T}\{x_2(t)\} \quad (8)$$

οπότε το σύστημα μας δεν είναι γραμμικό.

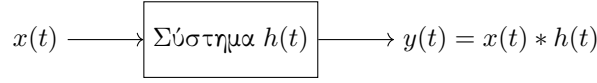
Μία άλλη κατηγορία συστημάτων που μας ενδιαφέρουν στις επικοινωνίες είναι τα αναλλοίωτα συστήματα. Πρόκειται για συστήματα των οποίων η συμπεριφορά δεν αλλάζει με τον χρόνο. Έτσι αν εφαρμόσουμε το ίδιο σήμα εισόδου $x(t)$ μετατοπισμένο κατά t_0 η απόκριση του συστήματος $y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\}$ απλά θα είναι μετατοπισμένη και αυτή κατά t_0 . Οπότε θα έχουμε:

$$\mathcal{T}\{x(t - t_0)\} = y(t - t_0) \quad (9)$$

Το προηγούμενο σύστημα $\mathcal{T}\{x(t)\} = x^2(t)$ είναι χρονικά αναλλοίωτο εφόσον



Εικόνα 1: Η γενική αναπαράσταση ενός συστήματος



Εικόνα 2: Αναπαράσταση ενός LTI συστήματος

$$\mathcal{T}\{x(t - t_0)\} = x^2(t - t_0) = y(t - t_0) \quad (10)$$

Αντίθετα αν είχαμε ένα σύστημα που μετασχηματίζει το σήμα ως εξής:

$$\mathcal{T}\{x(t)\} = e^{-t}x^2(t) \quad (11)$$

τότε θα είχαμε:

$$\mathcal{T}\{x(t - t_0)\} = e^{-t}x^2(t - t_0) = e^{-t_0}e^{-(t-t_0)}x^2(t - t_0) = e^{-t_0}y(t - t_0) \quad (12)$$

που δεν ισούται με $y(t - t_0)$ οπότε το σύστημα δεν είναι χρονικά αναλλοίωτο.

1.1 Γραμμικά μη αναλλοίωτα συστήματα

Ένα σύστημα γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο (**linear and time invariant - LTI**) έχει μερικές πολύ χρήσιμες ιδιότητες. Τα συστήματα LTI χρησιμοποιούνται συχνά στην μελέτη συστημάτων επικοινωνιών. Για παράδειγμα ένα καλώδιο μπορεί να περιγραφεί (τουλάχιστον σε μία πρώτη προσέγγιση) με ένα σύστημα LTI. Πως όμως συνδέεται η είσοδος και η έξοδος σε ένα τέτοιο σύστημα; Μπορεί κανείς να δείξει ότι για κάθε σύστημα LTI υπάρχει μία συνάρτηση $h(t)$ που ονομάζεται *κρουστική απόκριση* που συνδέει την είσοδο με την έξοδο βάσει της παρακάτω σχέσης:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau \quad (13)$$

Όπως έχουμε δει και στο μάθημα 4, το παραπάνω ολοκλήρωμα ονομάζεται *συνκερασμός* μεταξύ του $h(t)$ και του $x(t)$ και συμβολίζεται με το $\otimes$, οπότε γράφουμε:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) \quad (14)$$

Στην εικόνα 2, δείχνουμε την αναπαράσταση ενός συστήματος LTI.

Μπορούμε να αιτιολογήσουμε την (13); Με λίγη φαντασία ναι. Ας θυμηθούμε μία πολύ βασική ιδιότητα της συνάρτησης $\delta(t)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t)x(\tau)d\tau \quad (15)$$

Επομένως η έξοδος του συστήματος αρχικά γράφεται ως:

$$y(t) = \mathcal{T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t)x(\tau)d\tau\right\} \quad (16)$$

Το ολοκλήρωμα στην (16) είναι στην ουσία ένα άθροισμα με πάρα πολλούς όρους:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t)x(\tau)d\tau \cong \sum_i \delta(\tau_i - t)x(\tau_i)\Delta\tau \quad (17)$$

. Εφόσον το σύστημα είναι γραμμικό θα έχουμε

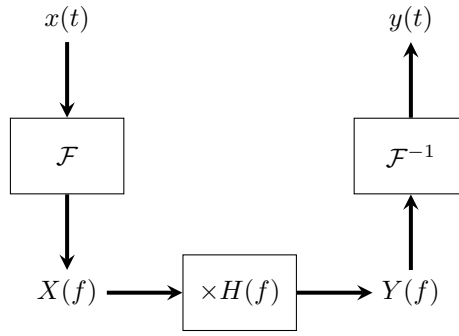
$$\mathcal{T}\left\{\sum_i \delta(\tau_i - t)x(\tau_i)\Delta\tau\right\} = \sum_i \mathcal{T}\{\delta(\tau_i - t)x(\tau_i)\Delta\tau\} \quad (18)$$

Το σύστημα επιδρά μόνο πάνω σε συναρτήσεις του t και εφόσον είναι γραμμικό:

$$\mathcal{T}\{\delta(\tau_i - t)x(\tau_i)\Delta\tau\} = \mathcal{T}\{\delta(\tau_i - t)\}x(\tau_i)\Delta\tau \quad (19)$$

Αν αντί για άθροισμα χρησιμοποιήσουμε το ολοκλήρωμα, οι παραπάνω εξισώσεις συνεπάγονται ότι:

$$\mathcal{T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t)x(\tau)d\tau\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathcal{T}\{\delta(\tau - t)\}d\tau \quad (20)$$



Εικόνα 3: Περιγραφή ενός LTI συστήματος με χρήση του πεδίου των συχνοτήτων.

Αν δούμε τώρα λίγο πιο προσεκτικά το $\mathcal{T}\{\delta(\tau - t)\}$. Από τις ιδιότητες της συνάρτησης $\delta(t)$ γνωρίζουμε ότι $\delta(\tau - t) = \delta(t - \tau)$. Εφόσον το σύστημα είναι αναλλοίωτο αν ορίσουμε

$$h(t) = \mathcal{T}\{\delta(t)\} \quad (21)$$

θα έχουμε

$$\mathcal{T}\{\delta(\tau - t)\} = \mathcal{T}\{\delta(t - \tau)\} = h(t - \tau) \quad (22)$$

Οπότε τελικά μπορούμε να γράψουμε:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau = h(t) \otimes x(t) \quad (23)$$

Τι είναι όμως το $h(t)$; Σύμφωνα με την (21), είναι η έξοδος που παράγεται όταν στην είσοδο βάλουμε ένα σήμα $\delta(t)$, έναν πολύ στενό παλμό δηλαδή πολύ μεγάλου πλάτους. Το $h(t)$ ονομάζεται *χρονστική απόκριση* και χαρακτηρίζει πλήρως το σύστημα: αν γνωρίζουμε το $h(t)$ μπορούμε να χρησιμοποιούμε την (23) για να υπολογίσουμε την έξοδο του συστήματος για οποιαδήποτε είσοδο.

Έχει επίσης ένα ενδιαφέρον να ερμηνεύουμε την (23). Στην ουσία η σχέση αυτή μας λέει ότι για να υπολογίσουμε την έξοδο του συστήματος $y(t)$ την χρονική στιγμή t θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τις τιμές του $x(\tau)$ για όλες τις χρονικές στιγμές τ . Κάθε μία τιμή $x(\tau)$ συμμετέχει στην ολοκλήρωση με έναν συντελεστή $h(t - \tau)$ που εξαρτάται από την απόσταση του τ από το t . Αν το $h(t - \tau)$ είναι μεγάλο, θα είναι μεγάλη και η συνεισφορά του $x(\tau)$ στο τελικό αποτέλεσμα.

Μία επιπλέον παρατήρηση είναι ότι σύμφωνα με την (23) στον υπολογισμό της εξόδου $y(t)$ συνεισφέρουν τόσο οι προηγούμενες τιμές της εισόδου $x(\tau)$ για $\tau \leq t$ όσο και οι επόμενες $\tau > t$. Ένα τέτοιο σύστημα δεν υπάρχει στην πράξη καθώς τότε θα μπορούσαμε να... προβλέψουμε το μέλλον. Τα συστήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε είναι *αιτιατά* που σημαίνει ότι μόνο η τρέχουσα και οι προηγούμενες τιμές του $x(\tau)$ καθορίζουν την τιμή του. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει πάντα να έχουμε $h(t - \tau) = 0$ εάν $\tau > t$ δηλαδή

$$h(t) = 0, \text{ όταν } t > 0 \quad (24)$$

Η παραπάνω συνθήκη συνεπάγεται ότι το σύστημα μας είναι αιτιατό.

1.2 Τα συστήματα στο πεδίο των συχνοτήτων

Το γεγονός ότι σύμφωνα με την (23), η είσοδος και η έξοδος ενός συστήματος συνδέονται μέσω ενός συγκερασμού σημαίνει ότι στο πεδίο των συχνοτήτων το φάσμα εξόδου $Y(f)$ και το φάσμα εισόδου $X(f)$ θα συνδέονται με την σχέση

$$Y(f) = H(f)X(f) \quad (25)$$

όπου $H(f)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του $h(t)$ και ονομάζεται *συνάρτηση μεταφοράς* του συστήματος. Παρατηρούμε επομένως ότι η περιγραφή στο πεδίο των συχνοτήτων είναι πολύ απλή εφόσον προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του φάσματος εισόδου $X(f)$ με την συνάρτηση μεταφοράς $H(f)$. Η διαδικασία φαίνεται στην εικόνα 3. Ξεκινώντας από το σήμα εισόδου $x(t)$ υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ και τον πολλαπλασιάζουμε με το $H(f)$ για να πάρουμε το φάσμα εξόδου $Y(f)$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το $y(t)$ εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\}$.

Σύμφωνα με την ταυτότητα του Parseval η ενέργεια του σήματος εξόδου μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\mathcal{E}_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 |X(f)|^2 df \quad (26)$$

Παρατηρούμε επομένως ότι το $|H(f)|^2$ καθορίζει πως οι φασματικές συνιστώσες του σήματος εισόδου συμμετέχουν στον υπολογισμό της ενέργειας του σήματος εξόδου. Συχνά ονομάζεται *συνάρτηση μεταφοράς ισχύος*.

2 Παραδείγματα συστημάτων

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα συστημάτων.

2.1 Επίπεδο ασύρματο κανάλι

Σε μία πρώτη προσέγγιση όταν ένα σήμα διαδίδεται στον ελεύθερο χώρο τότε μπορούμε να θεωρούμε ότι το σήμα στον δέκτη $y(t)$ συνδέεται με το σήμα στον πομπό $x(t)$ βάσει μίας σχέσης

$$y(t) = \sqrt{\Gamma}x(t - t_P) \quad (27)$$

όπου το Γ είναι ένας συντελεστής απωλειών και t_P ο χρόνος που χρειάζεται να φτάσει το σήμα από τον πομπό στον δέκτη. Στην περίπτωση ενός ασύρματου καναλιού, το Γ καθορίζεται από την *εξίσωση του Friis*, σύμφωνα με την οποία:

$$\Gamma = \frac{P_R}{P_T} = G_T G_R \left(\frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2 \quad (28)$$

Στην παραπάνω εξίσωση τα κέρδη G_T και G_R σχετίζονται με τις κεραίες εκπομπής και λήψης και συνήθως παρέχονται από τον κατασκευαστή. Το κέρδος της κεραίας G εξαρτάται από την κατευθυντικότητα της κεραίας. Μία κεραία η οποία εκπέμπει την ίδια ισχύ παντού ονομάζεται *ισοτροπική* και θεωρητικά έχει κέρδος $G = 1$. Μία κεραία η οποία έχει κατευθυντικότητα θα έχει τιμές του G μεγαλύτερες ή μικρότερες του 1 ανάλογα με τον προσανατολισμό της και την θέση του σημείου λήψης. Συχνά το κέρδος εκφράζεται σε λογαριθμική κλίμακα δηλαδή σε dB,

$$G_{dB} = 10 \log_{10} G \quad (29)$$

Αν έχουμε την τιμή του κέρδους G_{dB} σε dB τότε απλά αντιστρέφουμε την (29) για να βρούμε το κέρδος G στην γραμμική κλίμακα:

$$G = 10^{G_{dB}/10} \quad (30)$$

Για παράδειγμα μία τυπική κεραία WiFi σε ένα ασύρματο modem έχει μέγιστο κέρδος G_{dB} ίσο με 5dB που στη γραμμική κλίμακα συνεπάγεται ότι $G = 10^{5/10} \cong 3.16$. Μία κεραία που χρησιμοποιείται για εξωτερικές ζεύξεις WiFi διασύνδεσης σημείου με σημείο (π.χ. διασύνδεση χιτρίων) είναι πιο κατευθυντική και έχει κέρδος G_{dB} της τάξης των 14dB που στην γραμμική κλίμακα σημαίνει $G = 10^{14/10} = 10^{1.4} \cong 25$.

Θα δούμε παρακάτω ότι η ασύρματη μετάδοση γίνεται αλλάζοντας το πλάτος A ή την φάση ϕ ενός φέροντος σήματος $A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$. Στην (28) το λ είναι το μήκος κύματος και συνδέεται με την συχνότητα του φέροντος f_0 βάσει της σχέσης:

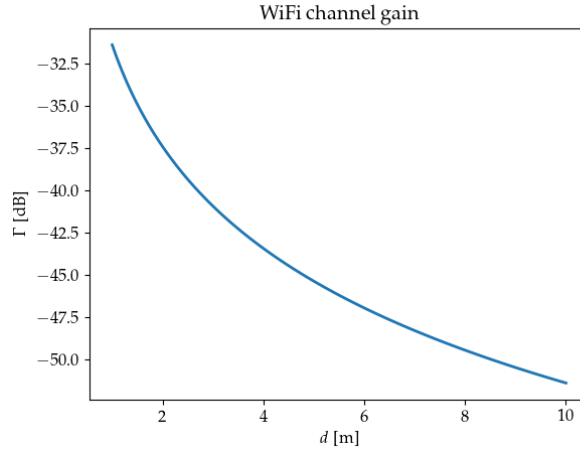
$$\lambda = \frac{c}{f_0} \quad (31)$$

όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό $c \cong 3 \times 10^8 \text{m/s}$. Το d στην (28) είναι η απόσταση μεταξύ πομπού και δέκτη ενώ το t_P στην (27) δίνεται από την σχέση:

$$t_P = \frac{d}{c} \quad (32)$$

Χρησιμοποιούμε το [listing 1](#) για να δούμε ένα παράδειγμα υπολογισμού του Γ στην περίπτωση μίας κεραίας WiFi που εκπέμπει με κέρδος $G_T = 5\text{dB}$ ενώ η κεραία λήψης έχει κέρδος $G_R = 4\text{dB}$. Θεωρούμε ότι $f_0 = 2.5\text{GHz}$ και διάφορες αποστάσεις πομπού/δέκτη d από 1 έως 10m. Το αποτέλεσμα φαίνεται στην εικόνα 4. Παρατηρούμε ότι το Γ είναι αρκετά χαμηλό (της τάξης των -40 με -50dB όταν η απόσταση ξεπερνάει τα 3m) κάτι που οφείλεται στο γεγονός ότι οι κεραίες έχουν μικρό κέρδος και επομένως το σήμα διαχέεται στο χώρο σε μία προσπάθεια κάλυψης περισσότερων σημείων.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 plt.rcParams.update({
5     "text.usetex": True,
6     "font.family": "serif",
7     "font.serif": ["Palatino"],
8     "font.size": 12,
```



Εικόνα 4: Το κέρδος του ασύρματου καναλιού.

```

9     "lines.linewidth" : 2,
10 })
11
12 c0 = 3e8
13
14 def to_dB(G):
15     return 10 * np.log10(G)
16
17 def to_linear(GdB):
18     return 10 ** (GdB / 10)
19
20 def friis(GTdB, GRdB, l, d):
21     return to_linear(GTdB) * to_linear(GRdB) * (1 / (4 * np.pi * d)) ** 2
22
23 def f_to_l(f):
24     return c0/f
25
26 f0 = 2.5e9
27 GTdB = 5
28 GRdB = 4
29 l = f_to_l(f0)
30
31 d = np.linspace(1, 10, 100)
32 Gamma = friis(GTdB, GRdB, l, d)
33
34 plt.close('all')
35 plt.figure()
36 plt.plot(d, to_dB(Gamma))
37 plt.xlabel('$d$ [m]')
38 plt.ylabel('$\Gamma$ [dB]')
39 plt.title('WiFi channel gain')

```

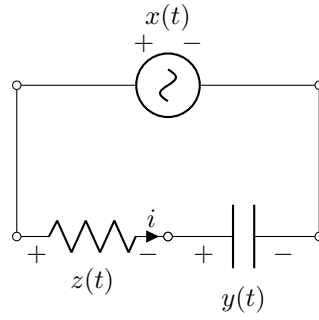
Listing 1: wireless.py

Από την (27) προκύπτει ότι η χρονστική απόκριση του καναλιού είναι:

$$h(t) = \sqrt{\Gamma}\delta(t - t_P) \quad (33)$$

Πράγματι εάν αντικαταστήσουμε την (33) στην (23) τότε λαμβάνουμε την (27). Θα πρέπει ωστόσο να σημειωθεί ότι θεωρήσει *ελεύθερο χώρο* κάτι που δεν ισχύει στην περίπτωση όπου εκπέμπουμε μέσα σε ένα δωμάτιο για παράδειγμα. Εκεί η ύπαρξη των τοίχων και άλλων επιφανειών πάνω στις οποίες το σήμα ανακλάται θα δημιουργήσει δευτερεύουσες διαδρομές. Δηλαδή ο δέκτης ενδέχεται να λαμβάνει σήμα απευθείας από την κεραία αλλά και από τις ανακλάσεις του σήματος κάτι που προκαλεί τυχαίες αυξομειώσεις του πλάτους και αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως *διαλείψεις*. Οι διαλείψεις θέτουν συχνά σημαντικούς περιορισμούς στις επιδόσεις του συστήματος. Ένα άλλο πρόβλημα είναι η *σκίαση* όταν κάποιο εμπόδιο βρίσκεται ανάμεσα στην διαδρομή από τον πομπό στον δέκτη, προκαλώντας επιπλέον εξασθένιση του σήματος. Το τρίτο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε στην πραγματική περίπτωση είναι ο *θόρυβος* που υπάρχει σε όλα τα συστήματα επικοινωνιών και τον οποίο θα αναλύσουμε σε άλλο μάθημα. Η συνάρτηση μεταφοράς $H(f)$ δίνεται από την σχέση:

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \sqrt{\Gamma}e^{-j2\pi t_P f} \quad (34)$$



Εικόνα 5: Ένα κύκλωμα RC

Παρατηρούμε ότι το μέτρο $|H(f)| = |\sqrt{\Gamma}e^{-j2\pi t_p f} = \sqrt{\Gamma}$ της $H(f)$ είναι σταθερό με την συχνότητα f . Επομένως το κανάλι δεν είναι επιλεκτικό ως προς τη συχνότητα και σύμφωνα με την (25) αφήνει να περάσουν όλες οι συχνότητες του αρχικού φάσματος $X(f)$ με το ίδιο πλάτος και αλλάζει γραμμικά την φάση τους εξαιτίας του $e^{-j2\pi t_p f}$

2.2 Το κύκλωμα RC

Στην εικόνα 5, βλέπουμε ένα κύκλωμα RC που ίσως έχετε συναντήσει στο παρελθόν σε μαθήματα ηλεκτρονικής. Αν θεωρήσουμε την είσοδο του συστήματος $x(t)$ στην πηγή τάσης, σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε την έξοδο του συστήματος $y(t)$ πάνω στον πυκνωτή ή $z(t)$ πάνω στην αντίσταση.

Η τάση εισόδου $x(t)$ θα πρέπει να είναι ίση με το άθροισμα της τάσης πάνω στην αντίσταση R και πάνω στον πυκνωτή C , οπότε

$$z(t) + y(t) = x(t) \quad (35)$$

Επίσης το ρεύμα i που διαρρέει την αντίσταση και τον πυκνωτή θα πρέπει να είναι το ίδιο:

$$i = \frac{z(t)}{R} = C \frac{dy(t)}{dt} \quad (36)$$

Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις και θέτοντας για ευκολία $t_0 = RC$:

$$t_0 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad (37)$$

Αν $X(f)$, $Y(f)$ και $Z(f)$ τα φάσματα των σημάτων $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ αντίστοιχα και λαμβάνοντας υπόψη ότι ο μετασχηματισμός Fourier του dy/dt είναι το $j2\pi f Y(f)$ τότε στο πεδίο των συχνοτήτων

$$j2\pi f t_0 Y(f) + Y(f) = X(f) \quad (38)$$

και επομένως το φάσμα $Y(f)$ καθορίζεται από την

$$Y(f) = \frac{X(f)}{1 + j2\pi f t_0} \quad (39)$$

Εδώ παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει η συχνότητα f τόσο ελαττώνεται το $Y(f)$ εξαιτίας του παρανομαστή. Όταν $f \rightarrow \infty$ θα έχουμε $Y(f) \rightarrow 0$. Επομένως η τάση $y(t)$ στα άκρα του πυκνωτή περιέχει περισσότερο χαμηλές συχνότητες. Από την (35) προκύπτει ότι

$$Z(f) + Y(f) = X(f) \quad (40)$$

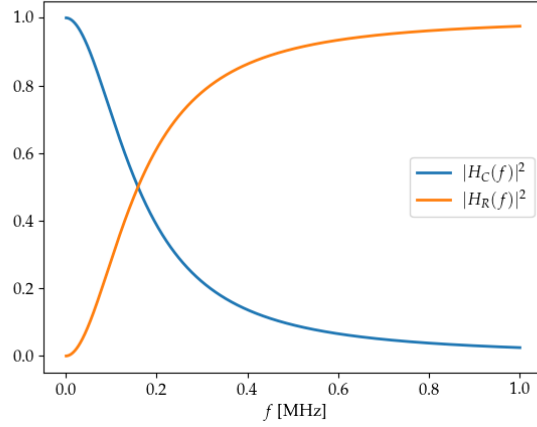
και επομένως

$$Z(f) = \frac{j2\pi f t_0}{1 + j2\pi f t_0} X(f) \quad (41)$$

Στην περίπτωση αυτή όταν $f \rightarrow \infty$ θα έχουμε $Y(f) \rightarrow 0$ και επομένως οι υψηλές συχνότητες του σήματος εισόδου εμφανίζονται πάνω στην αντίσταση.

Το κύκλωμα RC είναι ένα απλό παράδειγμα φίλτρου που διαχωρίζει τις υψηλές από τις χαμηλές συχνότητες. Η συνάρτηση μεταφοράς όταν λαμβάνουμε την έξοδο πάνω στον πυκνωτή είναι:

$$H_C(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1 + j2\pi f t_0} \quad (42)$$



Εικόνα 6: Οι συναρτήσεις μεταφοράς του συστήματος RC

ενώ για την περίπτωση της αντίστασης:

$$H_R(f) = \frac{Z(f)}{X(f)} = \frac{j2\pi f t_0}{1 + j2\pi f t_0} \quad (43)$$

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def RC(R, C, f):
5     t0 = R * C
6     n = 1j * 2 * np.pi * f * t0
7     d = 1 + n
8     return 1/d, n/d
9
10 plt.rcParams.update({
11     "text.usetex": True,
12     "font.family": "serif",
13     "font.serif": ["Palatino"],
14     "font.size": 12,
15     "lines.linewidth": 2,
16 })
17
18
19 R = 1000
20 C = 1e-9
21 f = np.linspace(1000, 1e6, 1000)
22
23 plt.close('all')
24 plt.figure()
25 HC, HR = RC(R, C, f)
26 plt.plot(f/1e6, np.abs(HC) ** 2, label = '$|H_C(f)|^2$')
27 plt.plot(f/1e6, np.abs(HR) ** 2, label = '$|H_R(f)|^2$')
28 plt.legend()
29 plt.xlabel('$f$ [MHz]')
```

Listing 2: rc.py

Χρησιμοποιούμε το [listing 2](#) για να παραστήσουμε γραφικά τις συναρτήσεις μεταφοράς για την περίπτωση όπου $C = 1\text{nF}$ και $R = 1\text{k}\Omega$. Στην εικόνα 6 φαίνεται το αποτέλεσμα του [listing](#). Έχουμε παραστήσει τις συναρτήσεις μεταφοράς ισχύος $|H_C(f)|^2$ και $|H_R(f)|^2$ στην εικόνα 6. Όπως είναι αναμενόμενο, το $|H_C(f)|^2$ φθίνει με το f ενώ το $|H_R(f)|^2$ αυξάνει.

Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$|H_C(f)| + |H_R(f)|^2 = \frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2 t_0^2} + \frac{4\pi^2 f^2 t_0^2}{1 + 4\pi^2 f^2 t_0^2} = 1 \quad (44)$$

οπότε το άθροισμα των συναρτήσεων μεταφοράς ισχύος ισούται με την μονάδα.

Για να δούμε πως περιγράφεται το σύστημα στο πεδίο του χρόνου υπολογίζουμε αρχικά την χρονστική απόκριση $h_C(t)$ που αντιστοιχεί στην $H_C(f)$. Στο προηγούμενο μάθημα είχαμε υπολογίσει το μετασχηματισμό [Fourier](#) του εκθετικού σήματος από τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε. Καταρχήν γράφουμε το $H_C(f)$ ως εξής:

$$H_C(f) = t_0^{-1} \frac{1}{t_0^{-1} + j2\pi f} \quad (45)$$

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό [Fourier](#) του εκθετικού σήματος προκύπτει:

$$h_C(t) = \begin{cases} t_0^{-1} e^{-t/t_0} & t \geq 0 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (46)$$

Επομένως σύμφωνα με την (23), η έξοδος στο πεδίο του χρόνου θα περιγράφεται από την σχέση:

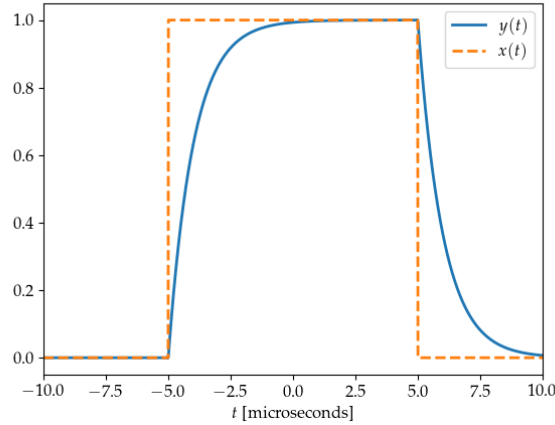
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_C(t - \tau) x(\tau) d\tau = \frac{1}{t_0} \int_{-\infty}^t x(\tau) e^{-(t-\tau)/t_0} d\tau \quad (47)$$

Ας σχολιάσουμε λίγο την (46). Αν θυμάστε είχαμε πει ότι η χρονστική απόκριση του συστήματος είναι η έξοδος του όταν στην είσοδο βάλουμε μία συνάρτηση $\delta(t)$, δηλαδή έναν πολύ στενό παλμό με πολύ μεγάλο πλάτος. Σύμφωνα με την (46) στην περίπτωση αυτή η τάση εξόδου μειώνεται εκθετικά με ρυθμό που καθορίζεται από την σταθερά $t_0 = RC$. Επίσης σύμφωνα με την (47), για να υπολογίσουμε την έξοδο $y(t)$ θα πρέπει να ολοκληρώσουμε όλες τις τιμές του $x(\tau)$ από $\tau = -\infty$ έως $\tau = t$ πολλαπλασιασμένες με έναν παράγοντα $e^{-(t-\tau)/t_0}$ ο οποίος ελαττώνεται όσο το τ γίνεται μικρότερο του t . Επομένως το σύστημα έχει μνήμη με την έννοια ότι “θυμάται” τις παλαιότερες τιμές του $x(\tau)$ αφού αυτές εμφανίζονται στο ολοκλήρωμα (47). Οστόσο όσο πιο παλιές είναι οι τιμές αυτές τόσο μικρότερο ρόλο παίζουν καθώς ο όρος $e^{-(t-\tau)/t_0}$ φθίνει όσο το τ γίνεται μικρότερο από το t .

```

1
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5
6 plt.rcParams.update({
7     "text.usetex": True,
8     "font.family": "serif",
9     "font.serif": ["Palatino"],
10    "font.size" : 12,
11    "lines.linewidth" : 2,
12 })
13
14 def HC(R, C, f):
15     t0 = R * C
16     n = 1j * 2 * np.pi * f * t0
17     d = 1 + n
18     return 1/d
19
20 # Calculate spectrum using FFT
21 def calc_spectrum(x, t):
22     Dt = t[1] - t[0]
23     N = t.size
24     Df = 1 / Dt / N
25     f = np.arange( -N / 2, N / 2 ) * Df
26     X = Dt * np.fft.fftshift(
27         np.fft.fft(
28             np.fft.fftshift(x) ) )
29     return X, f
30
31 # Inverse the spectrum using IFFT
32 def calc_inv_spectrum(X, f):
33     Df = f[1] - f[0]
34     N = f.size
35     Dt = 1 / Df / N
36     t = np.arange( -N / 2, N/2 ) * Dt
37     x = 1 / Dt * np.fft.fftshift(
38         np.fft.ifft(
39             np.fft.fftshift(X) ) )
40     return x, t
41
42 # System output
43 def system_output(x, t, H):
44     X, f = calc_spectrum(x, t)
45     Y = X * H(f)
46     return calc_inv_spectrum(Y, f)

```

Εικόνα 7: Οι συναρτήσεις μεταφοράς του συστήματος RC

```

47
48 # Square pulse
49 def square_pulse(t, T1):
50     samples = np.zeros(t.size)
51     i = np.where( np.abs(t) <= 0.5 * T1)
52     samples[ i ] = 1
53     return samples
54
55 N = 16384
56 T1 = 1e-5
57 T = 2 * T1
58 Dt = 10 * T / N
59 R = 1e3
60 C = 1e-9
61
62 t = np.arange( -N / 2, N / 2 ) * Dt
63 x = square_pulse(t, T1)
64 Hc = lambda f: HC(R, C, f)
65 y, _ = system_output(x, t, Hc)
66 plt.close('all')
67 plt.plot(t/1e-6, np.real(y), label='$y(t)$')
68 plt.plot(t/1e-6, np.real(x), '--', label='$x(t)$')
69
70
71 plt.xlim([-T1/1e-6, T1/1e-6])
72 plt.xlabel('$t$ [microseconds]')
73 plt.legend()

```

Listing 3: rcoutput.py

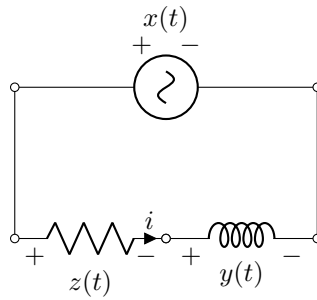
Στο [listing 3](#) δείχνουμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο ενός συστήματος όπως το RC βάσει της εικόνας 3. Η συνάρτηση `system_output` υπολογίζει την έξοδο του συστήματος αν γνωρίζουμε την συνάρτηση μεταφοράς H την οποία περνάμε ως `callable` (ως κάτι που μπορεί να εκτελεστεί δηλαδή). Οπότε με την `calc_spectrum` υπολογίζουμε το φάσμα εισόδου $X(f)$, μετά το γινόμενο $(f) = X(f)H(f)$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το $y(t)$ από το $Y(f)$ με την συνάρτηση `calc_inv_spectrum`. Στην εικόνα 7 δείχνουμε την είσοδο $x(t)$ και την έξοδο $y(t)$ στην περίπτωση όπου $R = 1k\Omega$, $C = 1nF$ και το $x(t)$ είναι ένας τετραγωνικός παλμός με διάρκεια $T_1 = 1\mu s$. Παρατηρούμε ότι η έξοδος $y(t)$ έχει πριονωτή μορφή καθώς ο πυκνωτής αργεί να φορτιστεί και να εκφορτιστεί οπότε δεν μπορεί να παρακολουθήσει τις γρήγορες μεταβολές της εισόδου $x(t)$.

3 Ώρα για σπαζοκεφαλίες

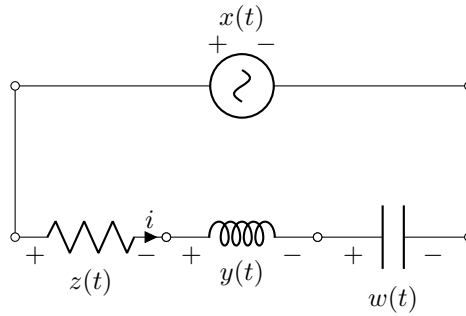
1. Για το παρακάτω κύκλωμα βρείτε τις συναρτήσεις μεταφοράς

$$H_R(f) = \frac{Z(f)}{X(f)} \quad (48)$$

$$H_L(f) = \frac{Z(f)}{X(f)} \quad (49)$$



Εικόνα 8: Ένα κύκλωμα **RL**



Εικόνα 9: Ένα κύκλωμα **RLC**

Η τάση στα άκρα του πηνίου δίνεται από την σχέση

$$y(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (50)$$

2. Για το κύκλωμα **RC** της εικόνας 5 υπολογίστε την χρονική απόκριση $h_R(t)$ όταν η έξοδος λαμβάνεται πάνω στην αντίσταση R .
3. Για το κύκλωμα **RLC** της εικόνας 9 βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H_R(f) = \frac{Z(f)}{X(f)} \quad (51)$$

Για τυπικές τιμές των R , L και C κάντε μία γραφική παράσταση της $H_R(f)$ χρησιμοποιώντας την Python.