Μάθημα 6: Πιθανότητες και Τυχαίες Μεταβλητές

Θωμάς Καμαλάκης

23 Σεπτεμβρίου 2023

1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο μάθημα ασχοληθήκαμε με τα συστήματα και μάλιστα είδαμε ένα παράδειγμα *τηλεπικοινωνιακού καναλιού*, το ασύρματο κανάλι ελεύθερου χώρου. Είχαμε υπολογίσει την κρουστική απόκριση $h(t)$ για αυτόν τον τύπο του καναλιού αλλά είχαμε αναφέρει ότι η περιγραφή του συστήματος είναι ημιτελής καθώς έχουμε αγνοήσει μία σημαντική παράμετρο που είναι ο θόρυβος. Ο θόρυβος $n(t)$ είναι ένα *τυχαίο σήμα* του οποίου την τιμή δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα. Δεν έχουμε την δυνατότητα να γράψουμε μία ωραία αλγεβρική σχέση όπως κάναμε για το τετραγωνικό σήμα ή το φέρον. Ωστόσο τα πράγματα δεν είναι τελείως απρόβλεπτα. Τις περισσότερες φορές μπορούμε να διατυπώσουμε στατιστικές προβλέψεις για την συμπεριφορά του $n(t)$ χρησιμοποιώντας στοιχεία από την θεωρία πιθανοτήτων.

Ας υποθέσουμε ότι διεξάγουμε πολλές φορές ένα πείραμα του οποίου δεν γνωρίζουμε το αποτέλεσμα, όπως για παράδειγμα το πέταγμα ενός ζαριού. Ορίζουμε ως πιθανότητα $\Pr\{A\}$ του ενδεχομένου A τον αριθμό των φορών $N(A)$ που συμβαίνει το A προς τον συνολικό αριθμό των φορών N που διεξάγουμε το πείραμα όταν το N είναι πολύ μεγάλο.

$$\Pr\{A\} = \lim_{N\to\infty} \frac{N(A)}{N} \tag{1}$$

Για παράδειγμα ας ρίξουμε ένα ζάρι N φορές και το ενδεχόμενο A που μας ενδιαφέρει είναι το ζάρι να έρθει άρτιος αριθμός (δηλαδή 2,4 ή 6). Τότε αν το N είναι πολύ μεγάλο, περιμένουμε ότι περίπου τις μισές φορές θα έρθει άρτιος (δηλαδή 2,4 ή 6) και τις άλλες μισές περιττός (1, 3 ή 5). Οπότε $N(A) \approx N/2$ και επομένως

$$\Pr\{A\} = \frac{1}{2} \tag{2}$$

Η πιθανότητα να έρθει άρτιος αριθμός είναι επομένως $\frac{1}{2}$ ή 50%. Υπάρχουν μερικά ενδιαφέροντα αποτελέσματα που αφορούν τις πιθανότητες και θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

1.1 Ενδεχόμενα και ιδιότητες της πιθανότητας

Αν έχουμε δύο ενδεχόμενα A και B τότε ορίζουμε το AB ως το ενδεχόμενο να συμβαίνει *ταυτόχρονα* και A και το B. Για παράδειγμα στην περίπτωση του ζαριού αν το ενδεχόμενο A είναι να έρθει ένα άρτιο αποτέλεσμα στο ζάρι (δηλαδή 2, 4 ή 6) και το Β είναι να έρθει ένα αποτέλεσμα που είναι πολλαπλάσιο του 3 (δηλαδή 3 ή 6). Μαθηματικά γράφουμε

$$A = \{2, 4, 6\} \tag{3}$$

$$B = \{3, 6\} \tag{4}$$

Το AB είναι το ενδεχόμενο να ισχύει ταυτόχρονα το A *και* το B δηλαδή να έχουμε 6. Οπότε γράφουμε:

$$AB = \{6\} \tag{5}$$

Πολλές φορές μας ενδιαφέρουν και καταστάσεις στα οποία ισχύει το ενδεχόμενο A *ή* το B το οποίο συμβολίζουμε με $A \cup B$. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε πως το A είναι το ενδεχόμενο το ζάρι να έρθει μικρότερο του 3 (δηλαδή 1 ή 2) και το B είναι να έρθει μεγαλύτερο του 4 (δηλαδή 5 ή 6). Μαθηματικά γράφουμε:

$$A = \{1, 2\} \tag{6}$$

$$B = \{5, 6\} \tag{7}$$

Το ενδεχόμενο $A \cup B$ είναι το ζάρι να έρθει 1,2,5 ή 6,

$$A \cup B = \{1, 2, 5, 6\} \tag{8}$$

Αν πετάξουμε ένα ζάρι πάρα πολλές φορές N και το ζάρι είναι σωστά ζυγισμένο, θα πρέπει $N/6$ περίπου φορές να πάρουμε άσο (δηλαδή 1), $N/6$ διπλό (δηλαδή 2) κ.ο.κ. Οπότε η πιθανότητα να πάρουμε ένα από τα $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ θα πρέπει να είναι $\Pr\{B_i\} = 1/6$ όπου έχουμε συμβολίσει με B_i το ενδεχόμενο το ζάρι να έρθει i. Μπορούμε να δούμε ότι το ενδεχόμενο A όπως το ορίσαμε στην (6) είναι $A = B_1 \cup B_2$ ενώ το B στην (7) είναι $B = B_5 \cup B_6$. Η πιθανότητα να συμβεί το A είναι να έρθει 1 ή 2 και κάθε ένα θα έρθει $N/6$ φορές οπότε ένα από τα δύο θα έρθουν $N/6 + N/6 = N/3$ φορές, άρα $\Pr\{A\} = 1/3 = \Pr\{B_1\} + \Pr\{B_2\}$. Οπότε η πιθανότητα του A προκύπτει από το άθροισμα των πιθανοτήτων των επιμέρους γεγονότων B_1 και B_2. Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι $\Pr\{B\} = 1/3 = \Pr\{B_5\} + \Pr\{B_6\}$ και $\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} = 2/3$.

Στα παραδείγματα που εξετάσαμε οι πιθανότητες των σύνθετων ενδεχομένων προκύπτουν από το άθροισμα των πιθανοτήτων των επιμέρους ενδεχομένων, π.χ. $\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\}$. Ωστόσο δεν ισχύει πάντα αυτός ο κανόνας. Για παράδειγμα θεωρείστε τα ενδεχόμενα C το ζάρι να είναι μικρότερο του 3 (δηλαδή 1 ή 2) και D το ζάρι να είναι περιττός αριθμός (δηλαδή 1, 3 ή 5). Τότε θα έχουμε $\Pr\{C\} = 1/3$ και $\Pr\{D\} = 1/2$. Το ενδεχόμενο $C \cup D$ είναι να έχουμε 1,2, 3 και 5 που θα έχει πιθανότητα $\Pr\{C \cup D\} = 4/6$ που δεν ισούται με $\Pr\{C\} + \Pr\{D\} = 5/6$, οπότε σε αυτήν την περίπτωση $\Pr\{C \cup D\} \neq \Pr\{C\} + \Pr\{D\}$.

Υπάρχει ένας γενικότερος κανόνας που καθορίζει την πιθανότητα $\Pr\{X \cup Y\}$ και είναι ο παρακάτω:

$$\Pr\{X \cup Y\} = \Pr\{X\} + \Pr\{Y\} - \Pr\{XY\} \tag{9}$$

Στην περίπτωση των A και B όπως τα ορίσαμε παραπάνω το AB είναι το ενδεχόμενο να έχουμε ταυτόχρονα ένα αποτέλεσμα που να είναι μικρότερο του 3 και μεγαλύτερο του 4 και είναι φανερό ότι δεν υπάρχει ένα τέτοιο ενδεχόμενο ή ισοδύναμα έχει πιθανότητα μηδέν, $\Pr\{AB\} = 0$ οπότε εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για $X = A$, $X = B$ θα έχουμε

$$\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{AB\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} \tag{10}$$

Στην περίπτωση των C και D όμως το CD είναι το ενδεχόμενο να έχουμε ταυτόχρονα περιττό αποτέλεσμα και μικρότερο του 3 οπότε το CD είναι το ενδεχόμενο να έχουμε ως αποτέλεσμα τον άσο (δηλαδή το 1) και έχει πιθανότητα $\Pr\{CD\} = 1/6$. Οπότε θα έχουμε $\Pr\{C\} + \Pr\{D\} - \Pr\{CD\} = 5/6 - 1/6 = 4/6$ ενώ όπως είχαμε δείξει προηγουμένως $\Pr\{C \cup D\}$ οπότε τελικά θα ισχύει:

$$\Pr\{C \cup D\} = \Pr\{C\} + \Pr\{D\} - \Pr\{CD\} \tag{11}$$

Δύο ενδεχόμενα A και B, το AB είναι κενό οπότε γράφουμε $AB = \varnothing$ και έχει και πιθανότητα μηδέν, ονομάζονται *αμοιβαίως αποκλειόμενα*.

Ορίζουμε και την *κατά συνθήκη πιθανότητα* ενός ενδεχομένου A δεδομένου ότι έχει συμβεί το B ως:

$$\Pr\{A|B\} = \frac{\Pr\{AB\}}{P\{B\}} \tag{12}$$

Ας δώσουμε ένα παράδειγμα. Έστω ότι κάποιος τρίτος ρίχνει το ζάρι και ενώ εμείς δεν το βλέπουμε μας πληροφορεί ότι έχει έρθει περιττός αριθμός (δηλαδή 1, 2 ή 3) και το σχετικό ενδεχόμενο το συμβολίζουμε με B. Αν συμβολίσουμε το ενδεχόμενο να έρθει το ζάρι άσος (δηλαδή 1) με A, ποια είναι η πιθανότητα να συμβεί το A αν ξέρουμε ότι έχει συμβεί το B; Προφανώς δεν είναι 1/6 καθότι το γεγονός ότι έχει συμβεί το B έχει περιορίσει τα πιθανά αποτελέσματα από 1, 2, 3, 4, 5 ή 6 σε 1, 3 ή 5, έχουμε δηλαδή 3 εναλλακτικά ενδεχόμενα αντί για 6. Οπότε η πιθανότητα θα είναι $\Pr\{A|B\} = 1/3$. Το ενδεχόμενο AB είναι το ζάρι να έρθει περιττό και να είναι ίσο με 3. Είναι φανερό ότι από την στιγμή που ήρθε 3 είναι και περιττό οπότε $\Pr\{AB\} = 1/6$ και μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι $\Pr\{B\} = 1/2$ οπότε ισχύει η (12).

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο ζάρια και ας συμβολίσουμε με X το ενδεχόμενο το πρώτο ζάρι να έρθει περιττό νούμερο και Y το δεύτερο ζάρι να έρθει άρτιο νούμερο. Η διαίσθηση μας λέει ότι το πρώτο ζάρι είναι ανεξάρτητο από το δεύτερο και επομένως η πιθανότητα $\Pr\{X|Y\}$ το πρώτο ζάρι να έρθει περιττό δεδομένου ότι το δεύτερο ζάρι έχει έρθει άρτιο θα είναι απλά η πιθανότητα $\Pr\{X\}$ το πρώτο ζάρι να έρθει περιττό αφού τα αποτελέσματα των δύο ζαριών δεν σχετίζονται. Μπορούμε επομένως να γράψουμε:

$$\Pr\{A|B\} = \Pr\{A\} \tag{13}$$

Στην περίπτωση όπου ισχύει η (13), λέμε ότι τα A και B είναι *ανεξάρτητα*. Συνδυάζοντας τις (12) και (13) μπορούμε να γράψουμε και μία εναλλακτική συνθήκη για το πότε δύο ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα:

$$\Pr\{AB\} = \Pr\{A\}\Pr\{B\} \tag{14}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα K αμοιβαίως αποκλειόμενα γεγονότα B_k για τα οποία ισχύει:

$$\Pr\{B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_K\} = \Pr\{B_1\} + \Pr\{B_2\} + \cdots + \Pr\{B_K\} = 1 \tag{15}$$

Στην περίπτωση του ζαριού, είχαμε ορίσει τα B_k για $1 \leq k \leq 6$, ως το ενδεχόμενο να έρθει αποτέλεσμα ίσο με k. Τα ενδεχόμενα B_k είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα και έχουν πιθανότητα $\Pr\{B_k\} = 1/6$. Αν αθροίσουμε τις πιθανότητες θα έχουμε $\Pr\{B_1\} + \Pr\{B_2\} + \cdots + \Pr\{B_6\} = 1$ και επομένως τα ενδεχόμενα είναι πλήρη.

Η σχέση (15) σημαίνει ότι τα B_k περιέχουν *το σύνολο* των πιθανών αποτελεσμάτων ενός πειράματος (αφού η πιθανότητα του $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_K$ είναι 1). Στην περίπτωση αυτή τα ενδεχόμενα B_k ονομάζονται *πλήρη*. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να γράψουμε:

$$\sum_k \Pr\{A|B_k\} P(B_k) = \sum_k \Pr\{AB_k\} = \Pr\left\{\bigcup_k AB_k\right\} = \Pr\left\{A\bigcup_k B_k\right\} = \Pr\{A\} \tag{16}$$

Στην περίπτωση του ζαριού αν ορίσουμε τώρα τα C_1 και C_2 ως τα ενδεχόμενα να έρθει περιττό και άρτιο αποτέλεσμα αντίστοιχα. Τότε είναι φανερό ότι πρόκειται για αμοιβαίως αποκλειόμενα ενδεχόμενα ενώ είναι και πλήρη. Αν E είναι το ενδεχόμενο να έρθει αποτέλεσμα μικρότερο του 4 (δηλαδή 1, 2 ή 3), θα έχουμε $\Pr\{E\} = 1/2$. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τις πιθανότητες $\Pr\{E|C_1\}$ και $\Pr\{E|C_2\}$. Η $\Pr\{E|C_1\}$ είναι η πιθανότητα αν ξέρουμε ότι έχει έρθει περιττό αποτέλεσμα (δηλαδή 1,3 ή 5) αυτό να είναι μικρότερο του 4. Βλέπουμε εύκολα ότι $\Pr\{E|C_1\} = 2/3$ ενώ με παρόμοιο σκεπτικό μπορούμε να δείξουμε ότι $\Pr\{E|C_2\} = 1/3$. Η πιθανότητες να συμβούν τα ενδεχόμενα C_1 και C_2 είναι $1/2$ οπότε θα έχουμε:

$$\Pr\{E|C_1\}\Pr\{C_1\} + \Pr\{E|C_2\}\Pr\{C_2\} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \Pr\{E\} \tag{17}$$

κάτι που άλλωστε είναι συνεπακόλουθο και της (15).

Συνοψίζουμε τι είδαμε στην παρούσα ενότητα:

- Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A ενός πειράματος ορίζεται ως ο αριθμός των φορών $N(A)$ που συμβαίνει το A προς τον συνολικό αριθμό των πειραμάτων N που διεξάγουμε όταν το N είναι πολύ μεγάλο:

$$\Pr\{A\} = \lim_{N\to\infty} \frac{N(A)}{N} \tag{18}$$

- Με AB συμβολίζουμε το ενδεχόμενο να συμβεί και το και το B ενώ με $A \cup B$ συμβολίζουμε το ενδεχόμενο να συμβεί το A ή το B. Ισχύει γενικότερα:

$$Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{AB\} \tag{19}$$

- Συμβολίζουμε με $\Pr\{A|B\}$ την πιθανότητα να συμβεί το A δεδομένου ότι έχει συμβεί το B. Η πιθανότητα αυτή δίνεται από την σχέση:

$$\Pr\{A|B\} = \frac{\Pr\{AB\}}{P\{B\}} \tag{20}$$

- Δύο γεγονότα ονομάζονται *αμοιβαίως αποκλειόμενα* εάν $AB = \varnothing$ οπότε θα έχουμε και:

$$\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} \tag{21}$$

- Δύο γεγονότα ονομάζονται *ανεξάρτητα* εάν:

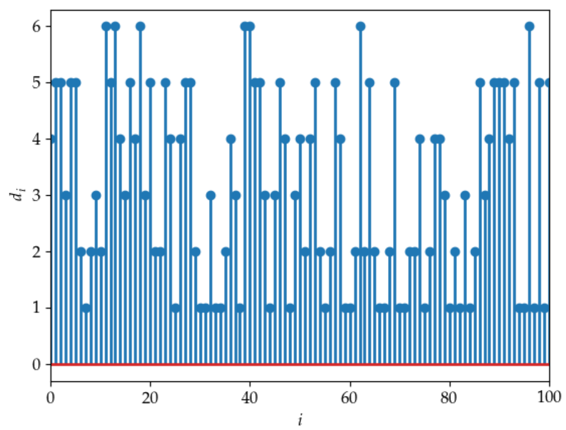
$$\Pr\{AB\} = \Pr\{A\}\Pr\{B\} \tag{22}$$

- Μία σειρά από ενδεχόμενα B_k που είναι αμοιβαία αποκλειόμενα ονομάζονται *πλήρη* όταν:

$$\sum_k \Pr\{B_k\} = 1 \tag{23}$$

  Στην περίπτωση αυτή για οποιοδήποτε ενδεχόμενο A μπορούμε να γράψουμε:

$$\Pr\{A\} = \sum_k \Pr\{A|B_k\}P\{B_k\} \tag{24}$$



Εικόνα 1: Τα 100 πρώτα δείγματα του d

1.2 Παραδείγματα στην Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


plt.rcParams.update({
    "text.usetex": True,
    "font.family": "serif",
    "font.serif": ["Palatino"],
    "font.size" : 12,
    "lines.linewidth" : 2,
})

def count(d, vals):
    vals = np.array(vals)
    n = np.zeros(vals.size)
    for i, val in enumerate(vals):
        n[i] = np.count_nonzero(d == val)
    return n

def prob(d, vals):
    return np.sum ( count(d, vals) ) / d.size

def intersect(a, b):
    return list( set(a).intersection( set(b) ) )

def union(a, b):
    return list( set(a).union( set(b) ) )

d = np.random.randint(1, 7, 10000)

plt.close('all')

# Plot random events
plt.stem(d)
plt.xlim([0, 100])
plt.xlabel('$i$')
plt.ylabel('$d_i$')

# Plot histogram
plt.figure()
plt.hist(d, np.arange(1,7)-0.5)
plt.xlabel('$B_m$')
plt.ylabel('$N(B_m)$')

# Event A : even results
A = [2, 4, 6]
print('Probability of A', A, ':', prob(d, A) )

# Event B : odd results
B = [1, 3, 5]
```

```
print('Probability of B', B, ':', prob(d, B) )

# Event Bi : equal to i
Bis = []
Ptot = 0
for i in range(1, 7):
    Bi = [i]
    Pi = prob(d, Bi)
    print('Probability of Bi', Bi, ':', Pi )
    Bis.append(Bi)
    Ptot += Pi

print('Sum probabilities of ', Bis, Ptot)

# Event C: smaller than 3
C = [1,2]
# Event D: odd number
D = [1,3,5]
PC = prob(d, C)
PD = prob(d, D)
PCuD = prob(d, union(C, D))
PCD = prob(d, intersect(C,D) )
print('Probability of C union D    :', PCuD)
print('Probability of C            :', PC )
print('Probability of D            :', PD )
print('Probability of C intersect D:', PCD )
print('PC+PD-PCD                   :', PC+PD-PCD)
PC_given_D = prob(d, intersect(C,D) ) / prob(d, D )
print('Probability of C given     D:', PC_given_D)
```

Listing 1: prob.py

Χρησιμοποιούμε το listing 1 για να δούμε τις ιδιότητες των πιθανοτήτων στη πράξη. Χρησιμοποιούμε την **randint** της **numpy** η οποία παράγει τυχαίους ακέραιους αριθμούς για να μιμηθούμε το ζάρι. Επομένως η μεταβλητή **d** είναι ένα **numpy** array το οποίο περιέχει 10.000 τυχαίες ρίψεις του ζαριού. Στην εικόνα 1 δείχνουμε τα 100 πρώτα δείγματα που παράγονται (αν τρέξετε και εσείς το πρόγραμμα τα αποτελέσματα θα είναι διαφορετικά καθώς η γεννήτρια τυχαίων αριθμών στην οποία βασίζεται η **randint** θα παράγει άλλα δείγματα). Στην εικόνα 2 δείχνουμε ένα ιστόγραμμα των 10.000 τιμών του **d**. Στην ουσία μετράμε τον αριθμό των εμφανίσεων κάθε μίας από τις πιθανές τιμές $\{1,2,3,4,5,6\}$ και παριστάνουμε το αποτέλεσμα με μπάρες. Παρατηρούμε ότι με μικρές διακυμάνσεις οι οποίες οφείλονται στην τυχαιότητα ο αριθμός των εμφανίσεων κάθε αποτελέσματος είναι περίπου ίδιος όπως αναμένεται από ένα "δίκαιο" ζάρι. Στη συνέχεια του listing υπολογίζουμε μερικές πιθανότητες όπως αυτές που συζητήσαμε στην προηγούμενη ενότητα:

- Τη πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι άρτιος αριθμός δηλαδή $\{2,4,6\}$ η οποία προκύπτει ότι είναι πολύ κοντά στη θεωρητική της τιμή δηλαδή $1/2 = 0.5$. Το ίδιο προκύπτει για την πιθανότητα να είναι περιττός αριθμός, δηλαδή $\{1,3,5\}$.

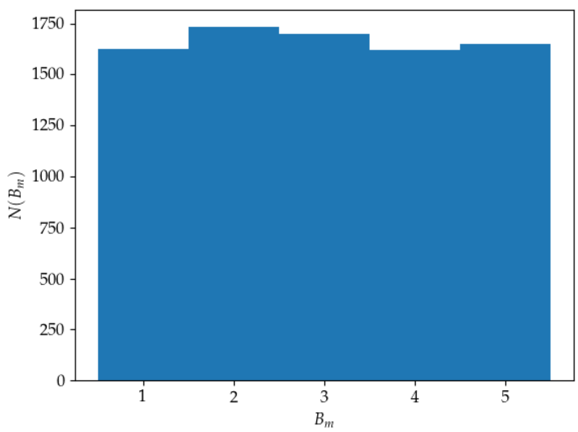
- Τη πιθανότητα τα αποτέλεσμα να είναι αριθμός μικρότερος του 3, δηλαδή $\{1,2\}$ και την πιθανότητα να είναι περιττός $\{1,3,5\}$. Αν με C και D τα δύο αυτά ενδεχόμενα αντίστοιχα υπολογίζουμε επίσης και τις $\Pr\{C \cup D\}$ και $\Pr\{CD\}$ δηλαδή τις πιθανότητες να έχουμε $\{1,2,3,5\}$ και $\{1\}$ αντίστοιχα. Προκύπτει ότι $\Pr\{C \cup D\} \cong \frac{4}{6} \cong 0.667$ και $\Pr\{CD\} \cong \frac{1}{6} \cong 0.166$. Υπολογίζουμε επίσης το $\Pr\{C\} + \Pr\{D\} - \Pr\{CD\}$ το οποίο όπως αναμένεται είναι πολύ κοντά $\Pr\{C \cup D\}$ σύμφωνα με την (11).

- Τη δεσμευμένη πιθανότητα $\Pr\{C|D\}$ το να έχουμε ένα από τα $\{1,2\}$ όταν ξέρουμε ότι έχει έρθει περιττός αριθμός, $\{1,3,5\}$. Δεδομένου ότι δεν μπορεί να έχει έρθει 2 που είναι άρτιος αριθμός η πιθανότητα αυτή είναι να έχει έρθει 1 όταν τα πιθανά αποτελέσματα περιορίζονται στα $\{1,3,5\}$, οπότε $\Pr\{C|D\} = \frac{1}{3} \cong 0.333$ όπως προκύπτει και από το listing.

Ορισμένα ενδιαφέροντα στοιχεία του listing τα αφήνουμε για τις σπαζοκεφαλιές στο τέλος του μαθήματος.

2 Τυχαίες Μεταβλητές

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου. Στην παρούσα ενότητα θα δούμε ότι μπορούμε να αναθέσουμε το αποτέλεσμα ενός πειράματος σε μία μεταβλητή την οποία θα ονομάζουμε *τυχαία μεταβλητή*. Έστω για παράδειγμα ότι ρίχνουμε ένα ζάρι N φορές και συμβολίζουμε με D το αποτέλεσμα έτσι ώστε $D = 1$ όταν έρθει άσος, $D = 2$ όταν έρθουν διπλές κ.ο.κ. Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, εάν το ζάρι είναι τίμιο τότε θα πρέπει αν το N είναι μεγάλο, σχεδόν $N_1 = N/6$ φορές να έρθει $D = 1$,



Εικόνα 2: Ιστόγραμμα του d

$N_2 = N/6$ φορές να έρθει $D = 2$ κτλ. Η πιθανότητα $\Pr\{D = i\}$ να έχουμε $D = i$ για $1 \leq i \leq 6$ ορίζεται ως το πλήθος των φορών N_i που έχουμε το αποτέλεσμα i ως προς τον συνολικό αριθμό N που εκτελούμε το πείραμα, όταν το N είναι πολύ μεγάλο (θεωρητικά άπειρο):

$$\Pr\{D = i\} = \lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N} \tag{25}$$

Στην περίπτωση του ζαριού θα έχουμε:

$$\Pr\{D = i\} = \frac{1}{6} \tag{26}$$

Το D είναι μία μεταβλητή που περιέχει έναν αριθμό που υπολογίζεται βάσει ενός τυχαίου πειράματος και ονομάζεται *τυχαία μεταβλητή*. Αν συμβολίσουμε με $\{D_1, D_2, \cdots, D_N\}$ τις διαδοχικές τιμές που λαμβάνουμε εκτελώντας το πείραμα τότε τα D_k για $1 \leq k \leq N$ μπορούν να παίρνουν τις διακριτές τιμές $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και μόνο αυτές. Ονομάζουμε τις μεταβλητές αυτές *διακριτές* τυχαίες μεταβλητές.

Υπάρχουν και περιπτώσεις όπου μία τυχαία μεταβλητή μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή μέσα σε ένα διάστημα τιμών $[a, b]$, οπότε την ονομάζουμε *συνεχή* τυχαία μεταβλητή. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι παρατηρούμε την έξοδο μίας γεννήτριας εναλλασσόμενης τάσης την οποία κάποιος ανάβει μία τυχαία χρονική στιγμή. Η γεννήτρια σε μία πρώτη προσέγγιση παράγει ένα φέρον οπότε η τάση εξόδου v_{OUT} θα δίνεται από μία σχέση της μορφής:

$$v_{\mathrm{OUT}}(t) = V_0 \sin(2\pi f_0 t + \phi) \tag{27}$$

Προκύπτει ότι το ϕ είναι μία τυχαία αρχική φάση στο διάστημα $0 \leq \phi < 2\pi$ η οποία εξαρτάται από το πότε ανάψαμε την γεννήτρια. Μπορεί να πάρει *όλες* τις τιμές στο διάστημα αυτό και επομένως είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή. Ας θεωρήσουμε ένα δεύτερο παράδειγμα, όπου μετράμε το πλάτος της τάσης V σε μία αντίσταση R την οποία δεν έχουμε συνδέσει σε κάποια πηγή τάσης. Εξαιτίας του θερμικού θορύβου, η τάση θα παρουσιάζει τυχαίες διακυμάνσεις και επομένως το V είναι τυχαία μεταβλητή. Από την θεωρία του θερμικού θορύβου προκύπτει ότι το διάστημα πιθανών τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$ και πως το V είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή.

Για τις συνεχείς τυχαίες μεταβλητές δεν έχει νόημα να υπολογίζουμε την πιθανότητα η μεταβλητή να πάρει μία συγκεκριμένη τιμή. Για παράδειγμα, αν υπολογίζαμε την πιθανότητα $\Pr\{\phi = \pi\}$ για την τυχαία μεταβλητή ϕ στην (27) θα χρησιμοποιούσαμε μία σχέση παρόμοια με την (25),

$$\Pr\left\{\phi = \frac{\pi}{2}\right\} = \lim_{N\to\infty} \frac{N_{\pi/2}}{N} \tag{28}$$

όπου $N_{\pi/2}$ είναι ο αριθμός των φορών όπου πετυχαίνουμε ακριβώς την τιμή $\pi/2$ όταν κάνουμε N φορές το πείραμα. Δεδομένου όμως ότι υπάρχουν άπειρες τιμές μέσα στο διάστημα $[0, 2\pi)$, περιμένουμε ότι το $N_{\pi/2}$ θα είναι πάρα πολύ μικρό σε σχέση με το N οπότε,

$$\Pr\left\{\phi = \frac{\pi}{2}\right\} = 0 \tag{29}$$

Συνεπώς για μία συνεχή τυχαία μεταβλητή δεν έχει νόημα να ασχολούμαστε με την πιθανότητα να λάβει μία συγκεκριμένη τιμή καθώς αυτή θα είναι μηδενική. Για μία συνεχή μεταβλητή μας ενδιαφέρει περισσότερο η πιθανότητα να βρεθεί μέσα σε ένα διάστημα τιμών $[\gamma, \delta]$, π.χ.

$$\Pr\{\gamma \leq \phi \leq \delta\} \tag{30}$$

Συνχά μπορούμε να υπολογίσουμε την *πυκνότητα πιθανότητας* (probability density function - PDF) $f(x)$ μίας τυχαίας μεταβλητής από την οποία υπολογίζονται οι πιθανότητες (30) ολοκληρώνοντας την $f_\phi(x)$ στο εν λόγω διάστημα, δηλαδή:

$$\Pr\{\gamma \leq X \leq \delta\} = \int_{\gamma}^{\delta} f_X(x)\mathrm{d}x \tag{31}$$

Ένας άλλος τρόπος να σκεφτόμαστε την πυκνότητα πιθανότητας προκύπτει από το βασικό θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού το οποίο λέει ότι αν η συνάρτηση $g(x)$ προκύπτει από το ολοκλήρωμα της $f(x)$,

$$g(y) = \int_{\alpha}^{y} f(x)\mathrm{d}x \tag{32}$$

τότε η $f(y)$ είναι η παράγωγος της $g(y)$,

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \tag{33}$$

Οπότε αν θέσουμε $\gamma = -\infty$ και $\delta = y$ στην (30) θα έχουμε

$$\Pr\{-\infty < X \leq y\} = \Pr\{X \leq y\} = \int_{\infty}^{y} f_X(x)\mathrm{d}x \tag{34}$$

Ορίζουμε την αθροιστική πυκνότητα πιθανότητας $F_X(y)$ (cumulative distribution function - CDF) ως την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να λάβει τιμή μικρότερη ή ίση από το y, δηλαδή:

$$F_X(y) = \Pr\{X \leq y\} = \int_{-\infty}^{y} f_X(x)\mathrm{d}x \tag{35}$$

Από την (35) μπορεί να προκύψει ένας ενδιαφέρον ορισμός της PDF. Αν παραγωγίσουμε την (35) ως προς y, θα έχουμε:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_X(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{-\infty}^{y} f_X(x)\mathrm{d}x = f_X(y) \tag{36}$$

Σύμφωνα με την (36) η PDF είναι η παράγωγος της CDF. Η παράγωγος στην ουσία είναι το όριο:

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_X(x+\Delta x/2) - F_X(x-\Delta x/2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Pr\left\{X \leq x + \frac{\Delta x}{2}\right\} - \Pr\left\{X \leq x \leq -\frac{\Delta x}{2}\right\}}{\Delta x} \tag{37}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\Pr\left\{X \leq x + \frac{\Delta x}{2}\right\} - \Pr\left\{X \leq x \leq -\frac{\Delta x}{2}\right\} = \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} f_X(y)\mathrm{d}y = \Pr\left\{x - \frac{\Delta x}{2} \leq X \leq x + \frac{\Delta x}{2}\right\} \tag{38}$$

Επομένως η PDF δίνεται από το όριο

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Pr\left\{x - \frac{\Delta x}{2} \leq X \leq x + \frac{\Delta x}{2}\right\}}{\Delta x} \tag{39}$$

Σύμφωνα με την (39), η PDF είναι η πιθανότητα το X να βρίσκεται σε μία πολύ στενή περιοχή $x - \frac{\Delta x}{2} \leq X \leq x + \frac{\Delta x}{2}$ δια το εύρος της περιοχής αυτής Δx. Όταν το y πλησιάζει στο $+\infty$ θα πρέπει να έχουμε

$$F_X(+\infty) = \Pr\{X < +\infty\} = 1 \tag{40}$$

Η παραπάνω εξίσωση εκφράζει το γεγονός ότι σίγουρα (δηλαδή με πιθανότητα 1), το X θα είναι μικρότερο του $+\infty$. Χρησιμοποιώντας και την (35) προκύπτει εύκολα ότι:

$$F_X(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{41}$$

Επομένως το ολοκλήρωμα της πυκνότητας πιθανότητας κατά μήκος του πραγματικού άξονα θα πρέπει να ισούται με ένα. Σε πολλές περιπτώσεις η PDF μπορεί να υπολογιστεί βάσει της θεωρίας ή μέσω προσομοιώσεων. Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

2.1 Ομοιόμορφη Τυχαία Μεταβλητή

Η τυχαία μεταβλητή X λέμε ότι ακολουθεί *ομοιόμορφη* κατανομή σε ένα διάστημα $[a, b]$ όταν έχει PDF:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{42}$$

Η CDF $F_X(y)$ της ομοιόμορφης κατανομής υπολογίζεται από την (36),

$$F_X(y) = \int_{-\infty}^{y} f_X(x)\mathrm{d}x \tag{43}$$

Αν $y < a$ τότε θα έχουμε $f_X(x) = 0$ για $-\infty < x < y$ οπότε ολοκληρώνουμε μία συνάρτηση η οποία είναι παντού μηδέν στο διάστημα ολοκλήρωσης της (43), οπότε $F_X(y) = 0$. Όταν $a \leq y \leq b$, η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε θα είναι σταθερή και ίση με $1/(b-a)$ στο διάστημα $[a, y]$ και μηδέν εκτός αυτού, οπότε:

$$F_X(y) = \int_{-\infty}^{y} f_X(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{y} \mathrm{d}x = \frac{y-a}{b-a} \tag{44}$$

Όταν $y > b$ θα έχουμε:

$$F_X(y) = \int_{-\infty}^{y} f_X(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} \mathrm{d}x = 1 \tag{45}$$

Συνδυάζοντας τις (43), (44) και (45) μπορούμε να γράψουμε:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y < a \\ \frac{y-a}{b-a} & , a \leq y \leq b \\ 1 & , y > b \end{cases} \tag{46}$$

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


plt.rcParams.update({
    "text.usetex": True,
    "font.family": "serif",
    "font.serif": ["Palatino"],
    "font.size" : 12,
    "lines.linewidth" : 2,
})

def calc_pdfcdf(x, y):
    N = x.size
    Dy = y[1] - y[0]
    pdf = np.zeros( y.size )
    cdf = np.zeros( y.size )

    for i, yy in enumerate(y):
        Ny = np.sum( (x >= yy-Dy/2) & ( x<yy+Dy/2 ) )
        pdf[i] =  Ny / N / Dy
        cdf[i] = np.sum( x <= yy ) / N

    return pdf, cdf

Nsamples = 100000
a = 1
b = 2
Nplot = 1000


x = a + (b-a) * np.random.rand(Nsamples)
plt.close('all')
plt.plot(x[:Nplot],'s')
plt.xlabel('$i$')
plt.ylabel('$x_i$')

y = np.linspace(a-1, b+1, 100)
pdf, cdf = calc_pdfcdf(x, y)

plt.figure()
plt.plot(y, pdf)
```

```python
plt.xlabel('$x$')
plt.ylabel('$f_X(x)$')
plt.title('PDF of Uniform Samples')

plt.figure()
plt.plot(y, cdf)
plt.xlabel('$y$')
plt.ylabel('$F_X(y)$')
plt.title('CDF of Uniform Samples')
```

Listing 2: uniform.py

Μπορούμε να δοκιμάσουμε στην πράξη τις έννοιες που αφορούν την ομοιόμορφη κατανομή χρησιμοποιώντας την `Python`. Η `numpy` έχει μία συνάρτηση την `rand` που παράγει ψευδοτυχαία δείγματα $\bar{x}_i$ βάσει της ομοιόμορφης κατανομής με $a = 0$ και $b = 1$. Στο listing 2 χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση `calc_pdfcdf` που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσει την PDF και την CDF στις τιμές που καθορίζονται από τον πίνακα `y` και που αντιστοιχούν στα δείγματα του πίνακα `x`. Η λογική πίσω από τον υπολογισμό της PDF βασίζεται στην (36), όπου για μικρό Δy θα έχουμε:

$$\frac{F_X(y+\frac{1}{2}\Delta y) - F_X(y-\frac{1}{2}\Delta y)}{\Delta y} \approx f_X(y) \tag{47}$$

Ο αριθμητής μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$\begin{aligned} F_X(y+\tfrac{1}{2}\Delta y) - F_X(y-\tfrac{1}{2}\Delta y) &= \int_{-\infty}^{y+\frac{1}{2}\Delta y} f_X(x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{y-\frac{1}{2}\Delta y} f_X(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{y-\frac{1}{2}\Delta y}^{y+\frac{1}{2}\Delta y} f_X(x)\mathrm{d}x = \Pr\left\{y-\tfrac{1}{2}\Delta y \le X \le y+\tfrac{1}{2}\Delta y\right\} \end{aligned} \tag{48}$$

Συνδυάζοντας τις (47) και (48) καταλήγουμε στο ότι:

$$f_X(y) \approx \frac{\Pr\left\{y-\frac{1}{2}\Delta y \le X \le y+\frac{1}{2}\Delta y\right\}}{\Delta y} \tag{49}$$

Στο όριο όπου το Δy γίνεται πολύ μικρό, γράφουμε:

$$f_X(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Pr\left\{y-\frac{1}{2}\Delta y \le X \le y+\frac{1}{2}\Delta y\right\}}{\Delta y} \tag{50}$$

Η `calc_pdfcdf` στο listing 2 προσεγγίζει την PDF σύμφωνα με την (49). Μετράμε τον αριθμό $N(y)$ των δειγμάτων X τα οποία βρίσκονται μεταξύ $y-\frac{1}{2}\Delta y \le X \le y+\frac{1}{2}\Delta y$ με την εντολή:

```python
Ny = np.sum( (x >= yy-Dy/2) & ( x<yy+Dy/2 ) )
```

Προσέξτε ότι ο πίνακας:

```python
(x >= yy-Dy/2) & ( x<yy+Dy/2 )
```

είναι ίσος με `True` για όσα δείγματα του πίνακα `x` είναι μεγαλύτερα από `yy-Dy/2` και μικρότερα από `yy+Dy/2` και `False` διαφορετικά. Κατά την άθροιση τα `True` μετατρέπονται σε 1 και τα `False` σε 0 και επομένως το αποτέλεσμα του αθροίσματος ισούται με τον αριθμό των στοιχείων για τα οποία ισχύει η συνθήκη. Στη συνέχεια προσεγγίζουμε την πιθανότητα $\Pr\left\{y-\frac{1}{2}\Delta y \le X \le y+\frac{1}{2}\Delta y\right\}$ με το πηλίκο N_y/N. Σύμφωνα με την (49) αν διαιρέσουμε με Δy θα έχουμε μία εκτίμηση της πυκνότητας πιθανότητας η οποία βέβαια θα βελτιώνεται όσο αυξάνει το πλήθος των δειγμάτων N. Οπότε μαθηματικά γράφουμε:

$$f_X(y) \approx \frac{N_y}{N\Delta y} \tag{51}$$

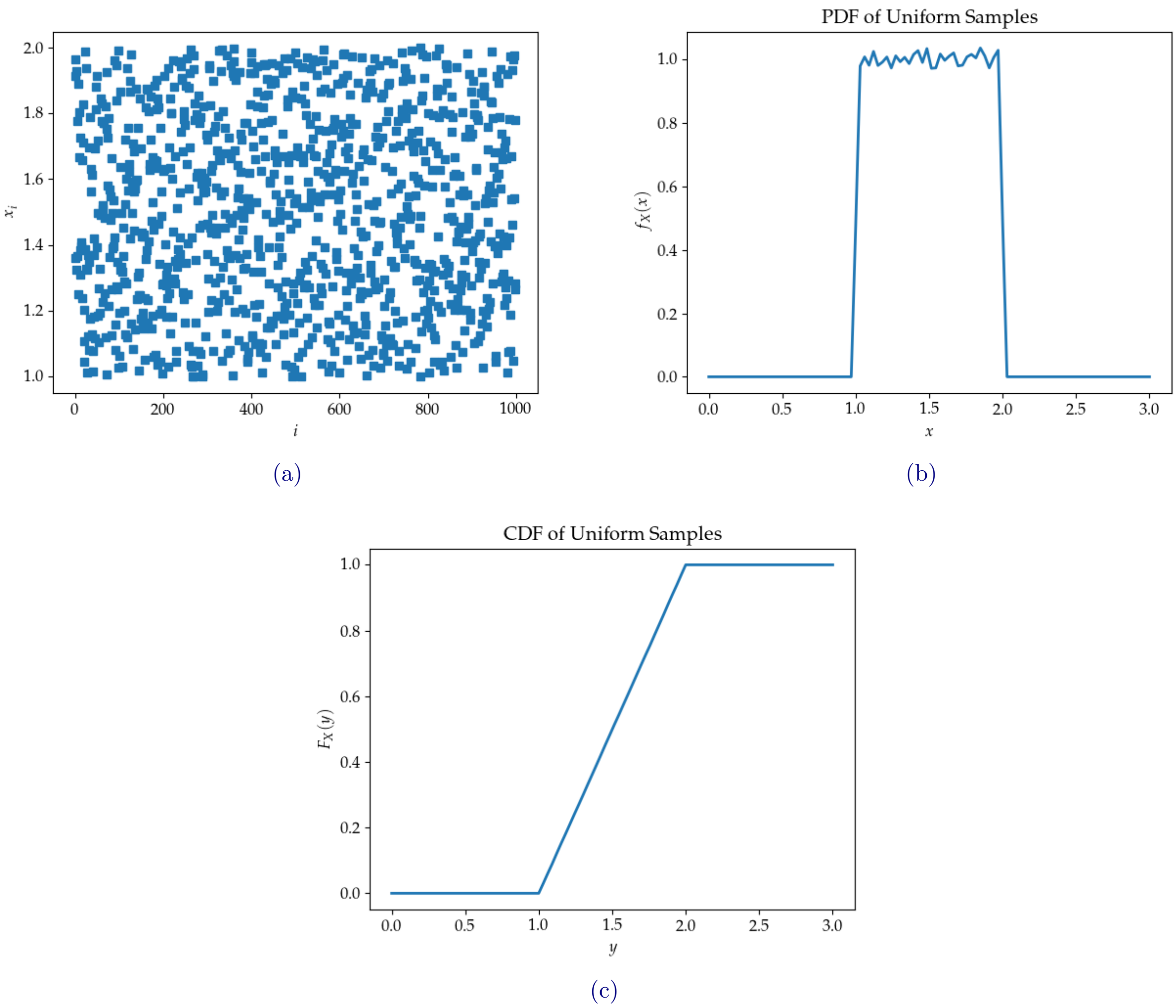
που στον κώδικα αντιστοιχεί σε:

```python
pdf[i] =  Ny / N / Dy
```

Παρόμοιος είναι και ο υπολογισμός της CDF. Υπολογίζουμε το πλήθος των δειγμάτων του `x` που είναι μικρότερο από `yy` και διαιρούμε με το πλήθος των δειγμάτων για να εκτιμήσουμε την πιθανότητα:

$$F_X(y) = \Pr\left\{X \le y\right\} \tag{52}$$

Το αντίστοιχο τμήμα του κώδικα είναι το εξής:



Εικόνα 3: Δείγματα που παράγονται η PDF και η CDF αντίστοιχα που υπολογίζονται αριθμητικά από την `calc_pdfcdf` .

```
cdf[i] = np.sum( x <= yy ) / N
```

Στην εικόνα 3a, δείχνουμε τα πρώτα 1000 δείγματα που παράγονται. Η **rand** παράγει δείγματα στο διάστημα $[0, 1]$ ενώ εμείς στο listing 2, θέλουμε τα δείγματα να είναι στο διάστημα $[a, b]$ με $a = 1$ και $b = 2$. Οπότε κάνουμε αυτήν την μετατροπή:

```
x = a + (b-a) * np.random.rand(Nsamples)
```

για να φέρουμε τα παραγόμενα δείγματα στο σωστό διάστημα. Με τον τρόπο αυτό όπως παρατηρούμε και στην εικόνα, όλα τα δείγματα είναι μεταξύ 1 και 2. Στην εικόνα 3b δείχνουμε την PDF που υπολογίζεται από την **calc_pdfcdf**. Όπως περιμένουμε μοιάζει με την PDF μίας ομοιόμορφης κατανομής όπως αυτή καθορίζεται από την (42). Υπάρχουν βέβαια κάποιες διακυμάνσεις, οι οποίες αναμένουμε να εξομαλυνθούν αν τρέξουμε πάλι το πείραμα για μεγαλύτερο αριθμό δειγμάτων. Επίσης η μορφή της CDF στην εικόνα 3c είναι σύμφωνη με την (46): μέχρι το $y = a$ είναι μηδέν, από το $y = b$ και μετά είναι 1 και ενδιάμεσα είναι γραμμική.

3 Αναμενόμενες τιμές

Η *αναμενόμενη τιμή* είναι μία έννοια που θα μας χρησιμεύσει ιδιαίτερα στα παρακάτω κεφάλαια. Η αναμενόμενη τιμή μίας συνάρτησης $g(X)$ μίας τυχαίας μεταβλητής X συμβολίζεται με $\mathbb{E}\{g(X)\}$. Στην περίπτωση μίας διακριτής τυχαίας μεταβλητής ορίζεται ως εξής:

$$\mathbb{E}\{g(X)\} = \sum_i g(x_i) \Pr\{X = x_i\} \tag{53}$$

Αν κάνουμε ένα μεγάλο αριθμό πειραμάτων N και παράγουμε δείγματα X_k της X και N_i είναι ο αριθμός των φορών που εμφανίζεται το x_i ως τιμή στα δείγματα αυτά, τότε αν το N είναι πολύ μεγάλο θα έχουμε:

$$\mathbb{E}\{g(X)\} = \sum_i \frac{g(x_i)N_i}{N} = \frac{1}{N}\sum_k g(X_k) \tag{54}$$

Επομένως η αναμενόμενη τιμή $\mathbb{E}\{g(X)\}$ είναι η *μέση τιμή* των δειγμάτων $Z_k = g(X_k)$ που παράγονται εφαρμόζοντας την συνάρτηση g στα διαδοχικά δείγματα X_k που παράγονται από την X. Αν $g(X) = X$ τότε το $\mu_X = \mathbb{E}\{g(X)\} = \mathbb{E}\{X\}$ ονομάζεται *μέση τιμή* της X. Στην περίπτωση του ζαριού που είδαμε στην ενότητα **??**, θα έχουμε:

$$\mu_D = \mathbb{E}\{D\} = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3.5 \tag{55}$$

Οπότε αν ρίξουμε πάρα πολλές φορές το ζάρι και σημειώσουμε τις τιμές του αποτελέσματος και πάρουμε την μέση τιμή όλων αυτών θα λάβουμε μία τιμή πολύ κοντά στο $\mu_D = 3.5$ (θεωρητικά με άπειρο αριθμό πραγματοποιήσεων θα λάβουμε ακριβώς το $\mu_D = 3.5$).

Θα δούμε παρακάτω ότι πέρα από την μέση τιμή $\mu_X = \mathbb{E}\{X\}$ μας ενδιαφέρει και η διακύμανση (variance), σ_X^2, η οποία ορίζεται από την:

$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}\left\{(X - \mu_X)^2\right\} \tag{56}$$

Στην περίπτωση του ζαριού, αν εφαρμόσουμε την (53) θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\sigma_D^2 = \mathbb{E}\left\{(D - \mu_D)^2\right\} &= \sum_{i=1}^{6}(i - \mu_D)^2 \Pr\{D = i\} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(i - 3.5)^2 \\ &= \frac{1}{6}\left[(1 - 3.5)^2 + (2 - 3.5)^2 + (3 - 3.5)^2 + (4 - 3.5)^2 + (5 - 3.5)^2 + (6 - 3.5)^2\right] \\ &= 2.1966\end{aligned} \tag{57}$$

Στην περίπτωση των συνεχών τυχαίων μεταβλητών ο υπολογισμός των αναμενόμενων τιμών είναι παρόμοιος με την διαφορά ότι αντί των πιθανοτήτων $\Pr\{X = x_i\}$ χρησιμοποιούμε την πυκνότητα πιθανότητας $f_X(x)$:

$$\mathbb{E}\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\mathrm{d}x \tag{58}$$

Ας υπολογίσουμε την μέση τιμή και την διακύμανση στην περίπτωση μίας ομοιόμορφης τυχαίας μεταβλητής. Για την μέση τιμή έχουμε:

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{b-a} x\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{b+a}{2} \tag{59}$$

ενώ για την διακύμανση,

$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}\left\{(X-\mu_X)^2\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_X)^2 f_X(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{b-a}\left(x-\mu_X\right)^2\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b (x-\mu_X)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\frac{(b-\mu_X)^3-(a-\mu_X)^3}{3} \tag{60}$$

Δεδομένου ότι:

$$b-\mu_X = b - \frac{b+a}{2} = \frac{b-a}{2} \tag{61a}$$

$$a-\mu_X = a - \frac{b+a}{2} = -\frac{b-a}{2} \tag{61b}$$

θα έχουμε:

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{b-a}\frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{62}$$

Είναι ενδιαφέρον να υπολογίσουμε την μέση τιμή και την διακύμανση και αριθμητικά. Όπως είδαμε, η αναμενόμενη τιμή $\mathbb{E}\{g(X)\}$ είναι η μέση τιμή που υπολογίζεται από τα $g(X_k)$ όπου X_k είναι δείγματα της X. Όσο περισσότερα είναι τα δείγματα, τόσο καλύτερη θα είναι η προσέγγιση για τις αναμενόμενες τιμές. Η `numpy` παρέχει δύο συναρτήσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογίσουν απευθείας την μέση τιμή και την διακύμανση από τα δείγματα μίας τυχαίας μεταβλητής, την `mean` και `numpy` αντίστοιχα.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

Nsamples = 100000
a = 1
b = 2
Nstep = 100

x = a + (b-a) * np.random.rand(Nsamples)

nsteps = np.arange(Nstep, Nsamples, Nstep, dtype = int)
varss = np.zeros( nsteps.size )
means = np.zeros( nsteps.size )

for i, n in enumerate(nsteps):
    varss[i] = np.var( x[:n] )
    means[i] = np.mean( x[:n] )

plt.close('all')
plt.figure()
plt.plot(nsteps, means ,'-')
plt.xlabel('Number of Samples')
plt.ylabel('Mean Value')
1
plt.figure()
plt.plot(nsteps, varss ,'-')
plt.xlabel('Number of Samples')
plt.ylabel('Variance')
```

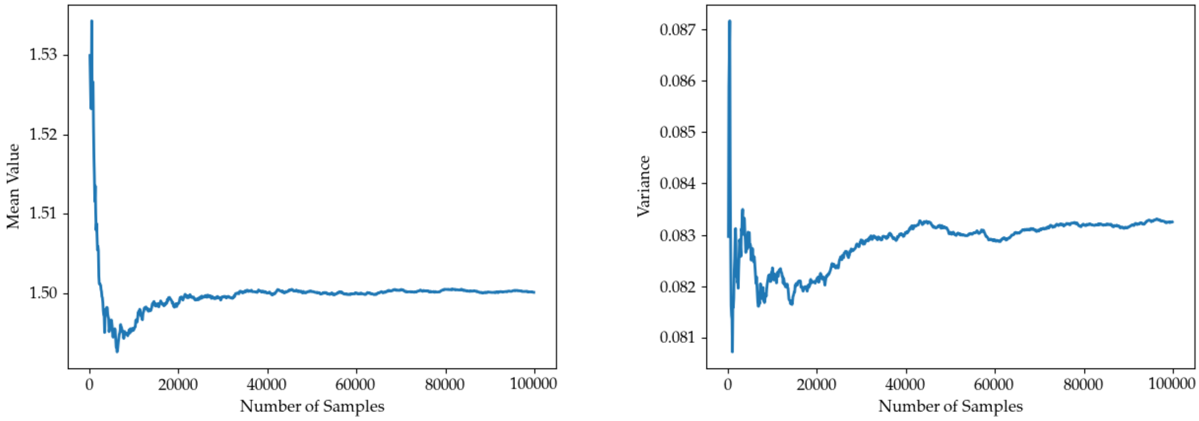
Listing 3: meanstd.py

Στο listing 3 δείχνουμε πως χρησιμοποιούμε τις δύο συναρτήσεις για να υπολογίσουμε την μέση τιμή και την διακύμανση θεωρώντας διαφορετικό αριθμό `n` δειγμάτων κάθε φορά, ξεκινώντας από 100 δείγματα και φτάνοντας στα 100.000 δείγματα με βήμα 100 δείγματα κάθε φορά.

Στην εικόνα 4 δείχνουμε τα αποτελέσματα που παίρνουμε από το listing 4 θεωρώντας όπως και στο listing 2 ότι $a = 1$ και $b = 2$ οπότε σύμφωνα με την (59) και (62) περιμένουμε η μέση τιμή να είναι $\mu_X = 1.5$ και $\sigma_X^2 = 1/12$. Από την εικόνα, παρατηρούμε πως ενώ για μικρό αριθμό δειγμάτων υπάρχει σχετικά μεγάλο σφάλμα στον υπολογισμό των αναμενόμενων τιμών, εντούτοις όσο ο αριθμός των δειγμάτων αυξάνει οι τιμές που παίρνουμε από τις `mean` και `numpy`, πλησιάζουν πολύ καλά τις θεωρητικές τους τιμές.

4 Κανονική Τυχαία Μεταβλητή

Αν και η ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή είναι αρκετά απλή, ωστόσο ο θόρυβος στα συστήματα επικοινωνιών ακολουθεί συνήθως μία διαφορετική κατανομή την οποία ονομάζουμε *κανονική κατανομή* και οι αντίστοιχες μεταβλητές



(a)

(b)

Εικόνα 4: Τα αποτελέσματα της (a) `mean` και (b) `var` για διαφορετικό αριθμό δειγμάτων

ονομάζονται *κανονικές τυχαίες μεταβλητές*. Η πυκνότητα πιθανότητας μίας κανονικής τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από την σχέση:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{63}$$

Οι παράμετροι μ και σ σχετίζονται με αναμενόμενες τιμές της X. Αποδεικνύεται ότι η μέση τιμή και η διακύμανση της κανονικής κατανομής είναι ίσες με μ και σ^2 αντίστοιχα, δηλαδή:

$$\mu_X = \mu \tag{64a}$$

$$\sigma_X^2 = \sigma^2 \tag{64b}$$

Ωστόσο τα πράγματα είναι λίγο πιο σύνθετα αν προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε την CDF της κανονικής κατανομής η οποία δίνεται από την σχέση:

$$F_X(y) = \int_{-\infty}^{y} f_X(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}x \tag{65}$$

Αν κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $z = (x-\mu)/\sigma$ οπότε και $\mathrm{d}x = \sigma\mathrm{d}z$, τότε το ολοκλήρωμα μπορεί να γραφτεί:

$$F_X(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_1} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \mathrm{d}z \tag{66}$$

όπου το άνω όριο ολοκλήρωσης έχει μετασχηματιστεί σε $z_1 = (y-\mu)/\sigma$. Μπορούμε να γράψουμε λίγο διαφορετικά την παραπάνω συνάρτηση. Αν χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \mathrm{d}z = 1 \tag{67}$$

θα εχουμε:

$$F_X(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \mathrm{d}z + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{z_1} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \mathrm{d}z = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \mathrm{d}z \tag{68}$$

Στην βιβλιογραφία η συνάρτηση:

$$Q(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u}^{+\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \mathrm{d}z \tag{69}$$

αναφέρεται ως συνάρτηση Q και θα δούμε ότι παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην ανάλυση συστημάτων επικοινωνιών. Η CDF δίνεται από την σχέση:

$$F_X(y) = 1 - Q(z_1) = 1 - Q\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \tag{70}$$

Έχει ένα ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι με την βοήθεια της συνάρτησης Q μπορούμε να υπολογίσουμε και την πιθανότητα η μεταβλητή X να είναι μεγαλύτερη από y. Έχουμε:

$$\Pr\left\{X > y\right\} = 1 - \Pr\left\{X \leq y\right\} = Q\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \tag{71}$$

Εφόσον η πιθανότητα να έχουμε $X > -\infty$ είναι 1, θα έχουμε:

$$Q\left(-\infty\right) = \Pr\left\{X > -\infty\right\} = 1 \tag{72}$$

Μία ενδιαφέρουσα ιδιότητα της συνάρτησης $Q(u)$ είναι ότι

$$Q(-u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u}^{+\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \mathrm{d}s = \tag{73}$$

όπου θεωρήσαμε τον μετασχηματισμό $s = -z$. Οπότε θα έχουμε:

$$Q(u) + Q(-u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \mathrm{d}s = Q(-\infty) = 1 \tag{74}$$

Το ολοκλήρωμα στην (69) δεν μπορεί να υπολογιστεί βάσει κάποιας μαθηματικής σχέσης αλλά υπάρχουν αριθμητικές μέθοδοι για αυτό τον σκοπό. Η `Python` έχει μία βιβλιοθήκη, την `scipy` η οποία παρέχει την `erfc` που υπολογίζει την συνάρτηση $\mathrm{erfc}(y)$ η οποία δίνεται από μία παρόμοια σχέση:

$$\mathrm{erfc}(v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{v}^{+\infty} \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}t \tag{75}$$

Αν στην (69) θέσουμε $u = t\sqrt{2}$ τότε έχουμε:

$$Q(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u/\sqrt{2}}^{+\infty} \exp\left(-t^2\right) \sqrt{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u/\sqrt{2}}^{+\infty} \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) \tag{76}$$

Η παραπάνω σχέση συνδέει την συνάρτηση $Q(u)$ με την συνάρτηση $\mathrm{erfc}(v)$ και θα την χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε την CDF της κανονικής κατανομής. Χρησιμοποιούμε το listing 4 για να δούμε στην πράξη τις ιδιότητες της κανονικής κατανομής. Στο listing υπολογίζουμε την συνάρτηση Q βάσει της (76) και την CDF βάσει της (70).

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.special import erfc


plt.rcParams.update({
    "text.usetex": True,
    "font.family": "serif",
    "font.serif": ["Palatino"],
    "font.size" : 12,
    "lines.linewidth" : 2,
})

def normpdf(x, mu, sigma):
    return  1 / np.sqrt(2 * np.pi) * np.exp( - (x-mu) ** 2.0 / 2 / sigma ** 2.0)

def normcdf(x, mu, sigma):
    z = (x - mu) / sigma
    return 1 - Q(z)

def Q(x):
    return 0.5 * erfc( x / np.sqrt(2) )

def calc_pdfcdf(x, y):
    N = x.size
    Dy = y[1] - y[0]
    pdf = np.zeros( y.size )
    cdf = np.zeros( y.size )

    for i, yy in enumerate(y):
        Ny = np.sum( (x >= yy-Dy/2) & ( x<yy+Dy/2 ) )
        pdf[i] =  Ny / N / Dy
        cdf[i] = np.sum( x <= yy ) / N
```

```

    return pdf, cdf

Nsamples = 100000
mu = 2
sigma = 1
Nplot = 1000

x = np.random.randn(Nsamples) * sigma + mu
y = np.linspace(mu-3*sigma, mu+3*sigma, 100)
pdf, cdf = calc_pdfcdf(x, y)
pdf2 = normpdf(y, mu, sigma)

plt.close('all')
plt.plot(x[:Nplot],'s')
plt.xlabel('$i$')
plt.ylabel('$x_i$')


plt.figure()
plt.plot(y, pdf, 's', label = 'numerical', markerfacecolor="None")
plt.plot(y, pdf2, '--', label = 'analytical')
plt.xlabel('$y$')
plt.ylabel('$f_X(y)$')
plt.title('PDF of Normal Samples')
plt.legend()

cdf2 = normcdf(y, mu, sigma)
plt.figure()
plt.plot(y, cdf, 's', label = 'numerical', markerfacecolor="None", markevery = 3)
plt.plot(y, cdf2, '--', label = 'analytical')
plt.xlabel('$y$')
plt.ylabel('$F_X(y)$')
plt.title('CDF of Normal Samples')
plt.legend()
```

Listing 4: normal.py

Η βιβλιοθήκη **numpy** παρέχει την συνάρτηση **randn** που παράγει τυχαία δείγματα μίας κανονικής κατανομής. Στο listing 4 χρησιμοποιούμε την **randn** για να παράγουμε δείγματα μίας κανονικής τυχαίας μεταβλητής Z. Τα δείγματα που παράγονται από την **randn** έχουν μέση τιμή μηδέν και διακύμανση ίση με 1, δηλαδή

$$\mu_Z = \mathbb{E}\left\{Z\right\} = 0 \tag{77a}$$

$$\sigma_Z^2 = \mathbb{E}\left\{(Z-\mu_Z)^2\right\} = 1 \tag{77b}$$

και επομένως η PDF της Z είναι

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \tag{78}$$

Στο listing 4, υπάρχει μία γραμμή που μετασχηματίζει τα δείγματα της **randn** ως εξής:

```
x = np.random.randn(Nsamples) * sigma + mu
```

που είναι μαθηματικά ισοδύναμο με:

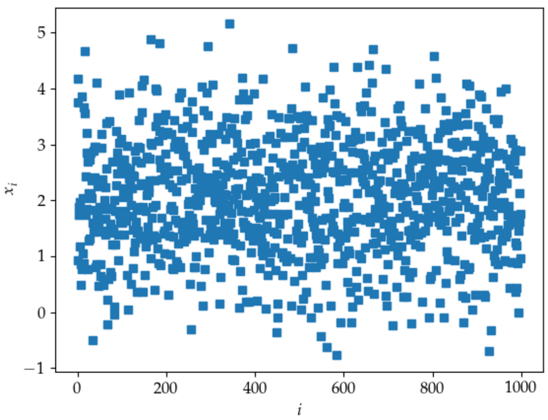
$$X = \sigma Z + \mu \tag{79}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την πυκνότητα πιθανότητας της X που προσεγγίζεται με την (47). Έχουμε:

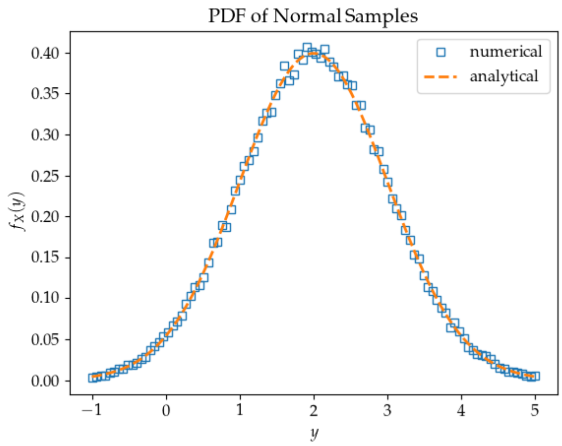
$$\begin{aligned} f_X(x) &\approx \frac{1}{\Delta x}\Pr\left\{x-\tfrac{1}{2}\Delta x \le X \le x+\tfrac{1}{2}\Delta x\right\} = \\ &\frac{1}{\Delta x}\Pr\left\{x-\tfrac{1}{2}\Delta x-\mu \le X-\mu \le x+\tfrac{1}{2}\Delta x-\mu\right\} = \\ &\frac{1}{\sigma}\frac{1}{\Delta x/\sigma}\Pr\left\{\frac{x-\mu}{\sigma}-\frac{\Delta x}{2\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}+\frac{\Delta x}{2\sigma}\right\} \end{aligned} \tag{80}$$

Η πυκνότητα πιθανότητας της Z προσεγγίζεται από μία παρόμοια σχέση:

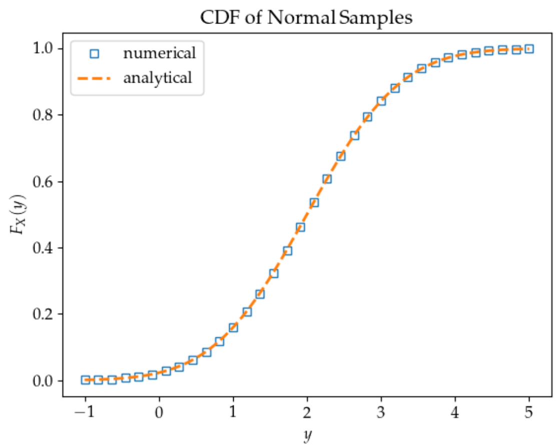
$$f_Z(z) \approx \frac{1}{\Delta z}\Pr\left\{z-\tfrac{1}{2}\Delta z \le Z \le z+\tfrac{1}{2}\Delta z\right\} \tag{81}$$



(a)



(b)



(c)

Εικόνα 5: (a) Δείγματα που παράγονται από την `randn`, (b) και (c) η PDF και η CDF αντίστοιχα που υπολογίζονται αριθμητικά μαζί με την αναλυτική τους τιμή.

Συγκρίνοντας την (80) και της (81) μας υποδεικνύει ότι εφόσον $Z = (X - \mu)/\sigma$, αν θέσουμε $\Delta z = \Delta x/\sigma$ θα έχουμε:

$$f_X(x) \approx \frac{1}{\sigma} f_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{82}$$

Επομένως με αυτόν τον τρόπο δείχνουμε ότι μετασχηματισμένη μεταβλητή ακολουθεί την επιθυμητή κατανομή. Στην εικόνα 5 δείχνουμε τα 1000 πρώτα δείγματα που παράγονται από τον μετασχηματισμό της `randn`. Βλέπουμε ότι τα δείγματα παρουσιάζουν την τάση να συγκεντρώνονται πιο κοντά στην μέση τιμή της κατανομής $\mu_X = 2$ παρά μακριά από αυτήν. Για το λόγο αυτό υπάρχουν σχετικά λίγα δείγματα που είναι μεγαλύτερα από 4 ή μικρότερα από 0. Στην εικόνα 5b δείχνουμε την PDF που υπολογίζεται αριθμητικά από την και θεωρητικά. Παρατηρούμε ότι η θεωρητική και η αριθμητική PDF συμφωνούν πολύ καλά. Στην εικόνα 5c δείχνουμε την CDF που υπολογίζεται αριθμητικά από τα δείγματα και την θεωρητική της μορφή που καθορίζεται από την (70). Παρατηρούμε ότι η συμφωνία είναι εξαιρετική.

5 Ώρα για σπαζοκεφαλιές

1. Φτιάξτε ένα `Python` script το οποίο να επαναλαμβάνει ότι και το listing 2 για την εκθετική τυχαία μεταβλητή:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}\exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) & , x \leq 0 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{83}$$

   Η `numpy` έχει την συνάρτηση `exponential` που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστούν τα δείγματα της εκθετικής κατανομής αριθμητικά.

2. Για την εκθετική κατανομή (83) χρησιμοποιήστε χαρτί και μολύβι για να υπολογίσετε την μέση τιμή μ_X και την τυπική απόκλιση σ_X^2.

3. Στο παιχνίδι “21” αφαιρούμε από μία τράπουλα με 52 φύλλα τις φιγούρες, τα πεντάρια και τα εξάρια. Η μάνα μοιράζει χαρτιά στους παίκτες και οι πόντοι κάθε παίκτη προκύπτουν από το άθροισμα των φύλλων του. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ένας παίκτης να φέρει “21” έχοντας τραβήξει μέχρι τρία χαρτιά λαμβάνοντας υπόψη ότι σύμφωνα με τους κανόνες του παιχνιδιού εάν στην αρχή σηκώσει δύο άσσους αυτό θεωρείται “21”. Υπόδειξη: μπορείτε να φτιάξετε ένα `Python` script για να μετρήσετε τους συνδυασμούς που οδηγούν στο 21.