

Μάθημα 11: Διαμόρφωση κατά πλάτος (συνέχεια)

Θωμάς Καμαλάκης

9 Οκτωβρίου 2023

1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο μάθημα είδαμε ορισμένες πτυχές του συστήματος **PAM** που βασίζεται στην διαμόρφωση κατά πλάτος. Η βασική παραδοχή που κάναμε είναι ότι οι παλμοί του **PAM** είναι τετραγωνικοί, της μορφής δηλαδή:

$$p(t) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq t \leq T_S \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (1)$$

Το σήμα που εκπέμπεται στον πομπό περιγράφεται από την γνωστή σχέση:

$$x(t) = \sum_k x_k p(t - kT_S) \quad (2)$$

Στο μάθημα θα δούμε αφενός τι συμβαίνει όταν οι παλμοί δεν είναι τετραγωνικοί και αφετέρου τα φασματικά χαρακτηριστικά του σήματος.

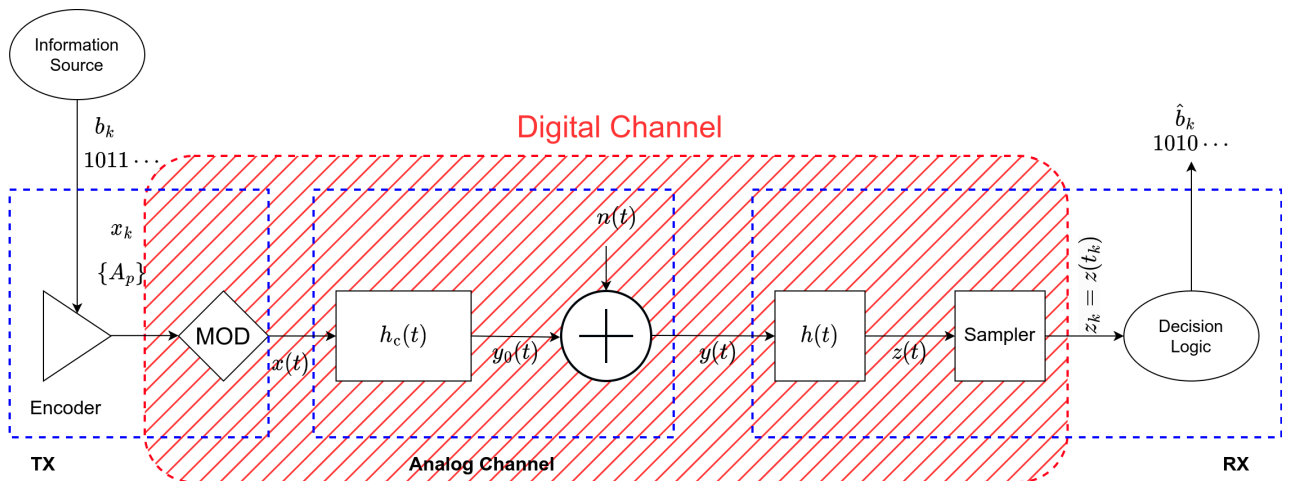
2 Η γενική περίπτωση των παλμών $p(t)$

Στην εικόνα 1 δείχνουμε το γενικότερο μοντέλο του συστήματος **PAM** όπως το αναλύσαμε στο προηγούμενο μάθημα. Στην περίπτωση όπου το κανάλι είναι επίπεδο, τότε υποθέτουμε όπως είδαμε ότι:

$$h_c(t) = \sqrt{L}\delta(t) \quad (3)$$

οι παλμοί $p(t)$ δεν είναι απαραίτητα τετραγωνικοί τότε το σήμα στην έξοδο του δέκτη θα γραφτεί ως εξής:

$$z(t) = y(t) \otimes h(t) = \sqrt{L}x(t) \otimes h(t) + n(t) \otimes h(t) = \sqrt{L} \sum_k x_k [p_k(t) \otimes h(t)] + n(t) \otimes h(t) \quad (4)$$



Εικόνα 1: Μοντέλο συστήματος **PAM**

Ας εξετάσουμε τους παλμούς:

$$q_k(t) = p_k(t) \otimes h(t) \quad (5)$$

Αναπτύσσοντας τον συγκερασμό θα έχουμε:

$$q_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_k(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (6)$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$q_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t - kT_S - \tau) h(t - \tau) d\tau = q(t - kT_S) \quad (7)$$

όπου ο παλμός $q(t)$ προκύπτει από τον συγκερασμό του $p(t)$ και του $h(t)$,

$$q(t) = p(t) \otimes h(t) \quad (8)$$

Επομένως το σήμα $z(t)$ γράφεται:

$$z(t) = \sqrt{L} \sum_k x_k q(t - kT_S) + n(t) \otimes h(t) \quad (9)$$

Αν ο δέκτης δειγματοληπτεί το σήμα την χρονική στιγμή $t = t_0$ για να αποφασίσει για το σύμβολο $k = 0$ τότε θα έχουμε:

$$z_0 = z(t_0) = y(t_0) \otimes h(t_0) = \sqrt{L} \sum_k x_k q(t_0 - kT_S) + n_0 \quad (10)$$

όπου η συνιστώσα του θορύβου δίνεται από την σχέση:

$$n_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} n(t) h(t_0 - t) dt \quad (11)$$

3 Το ελάχιστο εύρος ζώνης του PAM

Παρατηρείστε ότι στην εκτίμηση z_m του συμβόλου 0 μπορεί να υπεισέρχονται και τα άλλα σύμβολα $k \neq 0$. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται αλληλοπαρεμβολή συμβόλων ([intersymbol interference - ISI](#)). Ας θεωρήσουμε ότι $t_0 = 0$. Για να μην έχουμε [ISI](#) θα πρέπει να διασφαλίσουμε ότι:

$$q(kT_S) = 0 \text{ για } k \neq 0 \quad (12)$$

Στο παράρτημα έχουμε δείξει ότι οι παλμοί που πληρούν την παραπάνω συνθήκη έχουν κατ' ελάχιστο εύρος ζώνης ίσο με:

$$B = \frac{1}{2T_S} = \frac{R_S}{2} \quad (13)$$

όπου R_S είναι ο ρυθμός μετάδοσης των συμβόλων. Οι παλμοί $q(t)$ για τους οποίους επιτυγχάνεται αυτό το εύρος ζώνης καθορίζονται όπως βλέπουμε και στο παράρτημα από μία συνάρτηση [sinc](#),

$$q(t) = \sqrt{L} \text{sinc} \left(\frac{t}{T_S} \right) \quad (14)$$

που αντιστοιχεί σε ένα φάσμα:

$$Q(f) = \begin{cases} 1 & , |f| \leq B \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (15)$$

Η βέλτιστη απόκριση $h(t)$ του δέκτη προκύπτει όπως είδαμε από τη σχέση

$$h(t) = p(t_0 - t) \quad (16)$$

όπου t_0 είναι η στιγμή δειγματοληψίας του συμβόλου $m = 0$. Εφόσον $t_0 = 0$, θα έχουμε

$$h(t) = p(-t) \quad (17)$$

Ο παλμός $q(t)$ θα δίνεται από την σχέση:

$$q(t) = p(t) \otimes p(-t) \quad (18)$$

και εφόσον το $p(-t)$ έχει φάσμα το $P^*(f)$, έπεται το φάσμα των παλμών $q(t)$ θα είναι:

$$Q(f) = P(f)P^*(f) = |P(f)|^2 \quad (19)$$

Εφόσον το $Q(f)$ δίνεται από την σχέση (15), έπεται ότι το φάσμα $P(f)$ έχει ακριβώς το ίδιο εύρος ζώνης με το $Q(f)$. Επομένως το ελάχιστο εύρος ζώνης του σήματος PAM $x(t)$ στον πομπό δίνεται και αυτό από την σχέση (13).

Ορίζουμε ως φασματική απόδοση s_{eff} ενός συστήματος επικοινωνιών το πηλίκο του ρυθμού μετάδοσης bit προς το απαιτούμενο εύρος ζώνης,

$$s_{\text{eff}} = \frac{R_b}{B} \quad (20)$$

Στην περίπτωση του M-PAM η διάρκεια του bit T_b είναι $T_b = T_s / \log_2 M$ οπότε ο ρυθμός μετάδοσης των συμβόλων $R_s = 1/T_s$ και των bit $R_b = 1/T_b$ συνδέεται με την σχέση:

$$R_b = R_s \log_2 M \quad (21)$$

Η φασματική απόδοση του M-PAM είναι επομένως:

$$s_{\text{eff}} = \frac{R_s \log_2 M}{R_s/2} = 2 \log_2 M \quad (22)$$

4 Το μοντέλο του βέλτιστου δέκτη

Αν δειγματοληπτούμε την χρονική στιγμή $t = t_0$ τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$z(t_0) = y(t_0) \oplus h(t_0) = z_0 = x_0 \sqrt{\Gamma_c} + n_0 \quad (23)$$

όπου το κέρδος του καναλιού δίνεται από την σχέση:

$$\Gamma_c = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(t_0 - t)h(t)dt \right)^2 \quad (24)$$

ενώ η συνιστώσα του θορύβου καθορίζεται από την:

$$n_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_0 - t)n(t)dt \quad (25)$$

Όπως είδαμε στο προηγούμενο μάθημα το n_0 ακολουθεί κανονική κατανομή, με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση:

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt \quad (26)$$

Το πηλίκο Γ_c/σ_n^2 ακολουθούμε την ίδια ακριβώς μεθοδολογία με αυτή που ακολουθήσαμε στο Προκύπτει ότι η βέλτιστη επιλογή για το $h(t)$ είναι

$$h(t_0 - t) = p(t) \quad (27)$$

Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι το σήμα $z(t)$ υπολογίζεται ως εξής:

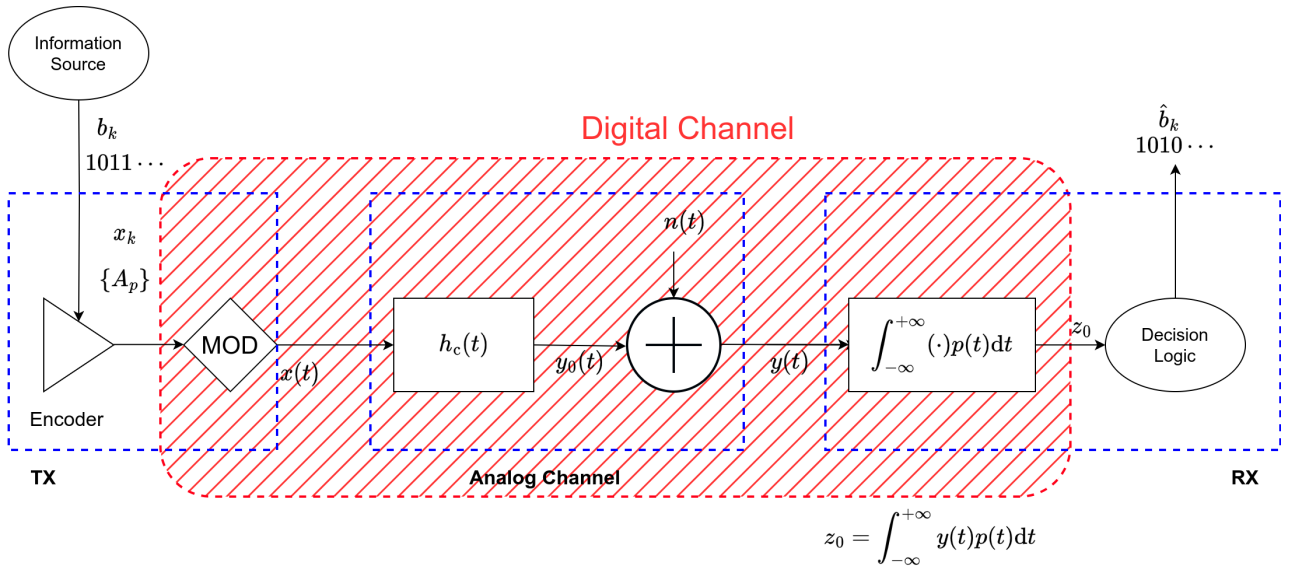
$$z_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)h(t_0 - t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)p(t)dt \quad (28)$$

$$z_0 = \sqrt{L}x_0 \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t)dt + \sqrt{L} \sum_{k \neq 0} x_k \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)p(t - kT_s)dt + n_0 \quad (29)$$

Στην (29), ο πρώτος όρος είναι η συνεισφορά του αρχικού συμβόλου x_0 , ο δεύτερος όρος είναι η επίδραση του ISI και το n_0 η επίδραση του θορύβου του καναλιού.

Ας δούμε πως γράφεται η (29) στην γενική περίπτωση όταν κάνουμε την αποκωδικοποίηση του $m^{\text{οστό}}$ συμβόλου οπότε δειγματοληπτούμε την χρονική στιγμή $t_m = t_0 + mT_s$. Θα έχουμε

$$z_m = z(t_m)\sqrt{L}x_m \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t - t_m)dt + \sqrt{L} \sum_{k \neq 0} x_k \int_{-\infty}^{+\infty} p(t - t_k)p(t - t_m)dt + n_m \quad (30)$$



Εικόνα 2: Το μοντέλο του συστήματος PAM για την περίπτωση του βέλτιστου δέκτη.

όπου η συνιστώσα θορύβου n_m δίνεται από την σχέση:

$$n_m = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_m - t)n(t)dt \quad (31)$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t - t_k)p(t - t_m)dt \quad (32)$$

Αν ορίσουμε τους συντελεστές C_l να δίνονται από την σχέση:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t - t_k)p(t - t_m)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)p(t + t_k - t_m)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)p(t + (k - m)T_s)dt \quad (33)$$

Επομένως τα ολοκληρώματα αυτά εξαρτώνται από το $k - m$. Ορίζουμε επομένως τους συντελεστές

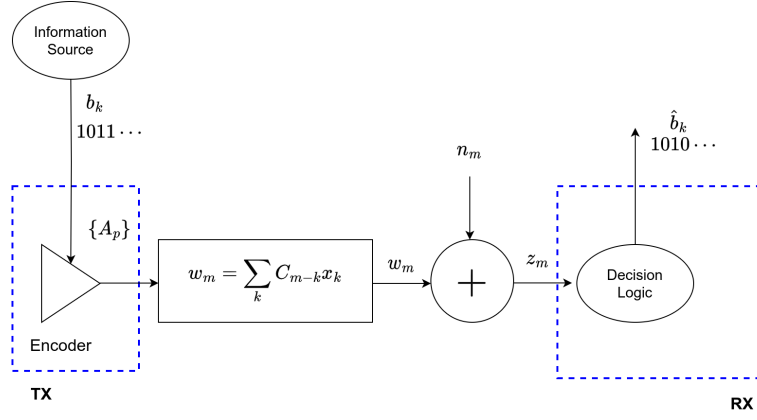
$$C_l = \sqrt{L} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)p(t - lT_s)dt \quad (34)$$

και καταλήγουμε στην έκφραση:

$$z_m = C_m x_m + \sum_{k \neq m} C_{m-k} x_k + n_m = \sum_k C_{m-k} x_k + n_m \quad (35)$$

Παρατηρούμε και πάλι τη συνεισφορά του αρχικού συμβόλου x_m , του ISI που αντιστοιχεί στους όρους $k \neq m$ του αθροίσματος και του θορύβου n_m . Ας δούμε τώρα δύο εναλλακτικά μοντέλα που περιγράφουν το σύστημα PAM βασικής ζώνης στην περίπτωση όπου έχουμε τον βέλτιστο δέκτη. Στην εικόνα 2 δείχνουμε ένα μοντέλο που προκύπτει από την (28). Στην ουσία ο βέλτιστος δέκτης ολοκληρώνει το λαμβανόμενο σήμα $y(t)$ στην είσοδο του με την συνάρτηση $p(t)$ για να υπολογίσει την εκτίμηση του συμβόλου z_0 . Ο ολοκληρωτής αυτός προκύπτει στην ουσία από το LTI σύστημα του μοντέλου στην εικόνα 1, στην περίπτωση του βέλτιστου δέκτη εφόσον ισχύει η (27). Όπως και στην περίπτωση της εικόνας 1, το μοντέλο μας περιγράφει σε αρκετή λεπτομέρεια το σύστημα μας καθώς περιλαμβάνει την κωδικοποίηση των συμβόλων, την αποτύπωση τους στο αναλογικό σήμα $x(t)$ την μετάδοση του σήματος μέσω του καναλιού την πρόσθεση του αναλογικού θορύβου, την λειτουργία του δέκτη πάνω στο λαμβανόμενο σήμα $y(t)$ και την αποκωδικοποίηση των συμβόλων. Θυμηθείτε ότι η κλάση `pam_link` που υλοποιήσαμε στο προηγούμενο μάθημα βασίζεται σε μία παρόμοια προσέγγιση.

Στην εικόνα 3, δείχνουμε ένα εναλλακτικό ψηφιακό μοντέλο για το σύστημα PAM που βασίζεται στην (35). Εδώ έχουμε θεωρήσει ότι το σύστημα περιγράφεται από το ψηφιακό κανάλι, δηλαδή από την σχέση μεταξύ των συμβόλων εισόδου x_m και των δειγμάτων z_m . Για να υπολογίσουμε τα z_m , αρχικά υπολογίζουμε τα αθροίσματα $\sum_k C_{m-k} x_k$ και προσθέτουμε τα n_m . Το κανάλι μας επομένως στην ουσία περιγράφεται από τους συντελεστές C_m και τον θόρυβο n_m ενώ δεν υπάρχει ανάγκη υπολογισμού των αναλογικών κυματομορφών $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$.



Εικόνα 3: Το ψηφιακό μοντέλο του συστήματος PAM.

4.1 Υπολογισμός της επίδρασης του ISI

Ας δούμε τώρα έναν τρόπο να υπολογίζουμε αποδοτικά την επίδραση του ISI στην (35) που βασίζεται στον ψηφιακό συγκερασμό που υλοποιεί η βιβλιοθήκη numpy με την συνάρτηση convolve. Η συγκεκριμένη συνάρτηση υπολογίζει αθροίσματα της μορφής:

$$v_m = g_m \otimes h_m = \sum_{k=0}^N g_{m-k} h_k \quad (36)$$

όπου N είναι το πλήθος των δειγμάτων h_k . Ας θεωρήσουμε ότι το πλήθος των δειγμάτων g_m είναι ίσο με M και ας πάρουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα για να καταλάβουμε λίγο καλύτερα τον ψηφιακό συγκερασμό.

5 Επιδόσεις του PAM βασικής ζώνης

Όταν μελετούμε τις επιδόσεις ενός συστήματος επικοινωνιών μας ενδιαφέρουν μεταξύ άλλων δύο στοιχεία: η απόδοση ισχύος και το απαιτούμενο εύρος ζώνης. Ως απόδοση ισχύος ιδανικά θα θέλαμε να μετρήσουμε την απαιτούμενη ισχύ που πρέπει να καταναλωθεί ώστε το σύστημα να έχει τις απαιτούμενες επιδόσεις. Επειδή ωστόσο η κατανάλωση ισχύος εξαρτάται και από την υλοποίηση του συστήματος (π.χ. επιλογή τεχνολογίας ηλεκτρονικών κτλ) εμείς θα ασχοληθούμε με την απαραίτητη ενέργεια ανά bit του σήματος $\mathcal{E}_b$ στο δέκτη. Εδώ θα πρέπει βέβαια να σημειωθεί ότι η ισχύς που χρειαζόμαστε θα εξαρτάται και από το επίπεδο του θορύβου, δηλαδή την φασματική πυκνότητα του N_0 . Προκύπτει επομένως ότι το ιδανικό μέτρο είναι και πάλι το ηλίκο σήμα-προς-θόρυβο:

$$\text{SNR}_b = \frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \quad (37)$$

Σε ότι αφορά το απαιτούμενο εύρος ζώνης, το ιδανικό μέτρο είναι η φασματική απόδοση s_{eff} που σύμφωνα με την (22) είναι το ηλίκο του ρυθμού μετάδοσης των bit προς το απαιτούμενο εύρος ζώνης.

Ιδανικά θα θέλαμε να έχουμε όσο το δυνατόν μεγαλύτερο s_{eff} και μικρότερο απαιτούμενο SNR_b για να πετύχουμε μία δεδομένη τιμή στόχο την πιθανότητα σφάλματος bit P_b . Ας θυμηθούμε ότι η πιθανότητα σφάλματος bit στην περίπτωση του M-PAM δίνεται από την σχέση:

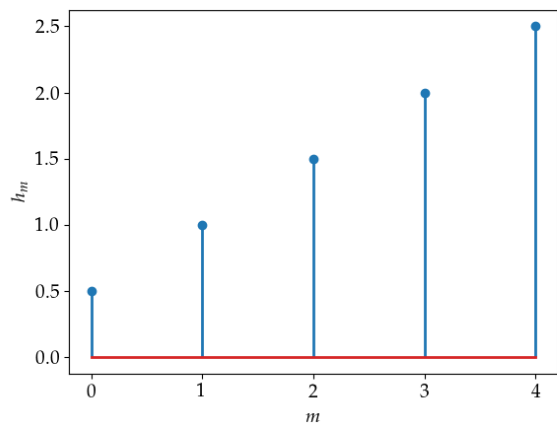
$$P_b = 2 \frac{M-1}{M \log_2 M} Q(\sqrt{\gamma}) \quad (38)$$

όπου:

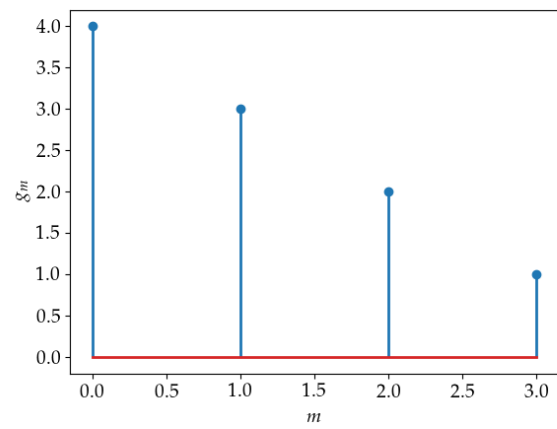
$$\gamma = \frac{6 \log_2 M}{M^2 - 1} \text{SNR}_b \quad (39)$$

Για να βρούμε το απαιτούμενο SNR για μία δεδομένη τιμή του P_b θεωρούμε την αντίστροφη συνάρτηση $Q^{-1}(y)$ της συνάρτησης $Q(x)$. Σύμφωνα με αυτά που γνωρίζουμε για τις αντίστροφες συναρτήσεις, εάν $y = Q(x)$ θα έχουμε $x = Q^{-1}(y)$ οπότε και από την (38) θα έχουμε:

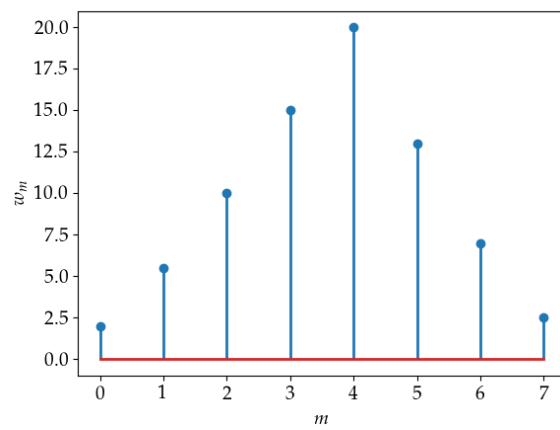
$$\sqrt{\gamma} = Q^{-1} \left(P_b \frac{M \log_2 M}{2(M-1)} \right) \quad (40)$$



(a)



(b)



(c)

Εικόνα 4: Παράδειγμα ψηφιακού συγκερασμού.

και χρησιμοποιώντας την (38) μπορούμε να βρούμε το απαιτούμενο SNR_b ως εξής:

$$\text{SNR}_b = \frac{M^2 - 1}{6 \log_2 M} \gamma \quad (41)$$

Οι σχέσεις (40) και (41) μας δίνουν έναν τρόπο για τον υπολογισμό του απαιτούμενου SNR_b εφόσον γνωρίζουμε ένα τρόπο να υπολογίζουμε την Q^{-1} . Ο τρόπος αυτός παρέχεται σχεδόν απευθείας από την βιβλιοθήκη `scipy` η οποία μας παρέχει την συνάρτηση `erfcinv` για να υπολογίσουμε την αντίστροφη συνάρτηση erfc^{-1} της erfc . Είχαμε δει ότι η σχέση μεταξύ των συναρτήσεων Q και erfc δίνεται από την

$$Q(u) = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \right) \quad (42)$$

Αν θέσουμε $y = Q(u)$ τότε λαμβάνουμε την εξής σχέση:

$$2Q(u) = 2y = \text{erfc} \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \right) \quad (43)$$

και επομένως:

$$\frac{u}{\sqrt{2}} = \text{erfc}^{-1}(2y) \quad (44)$$

Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι:

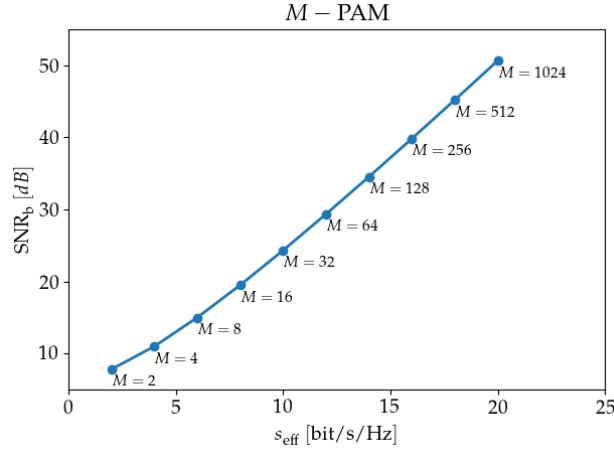
$$u = Q^{-1}(y) = \sqrt{2} \text{erfc}^{-1}(2y) \quad (45)$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει την αντίστροφη συνάρτηση Q^{-1} της Q με την erfc^{-1} . Στο `listing 1` δείχνουμε την υλοποίηση της συνάρτησης `Qinv` που υλοποιεί την αντίστροφη συνάρτηση βάσει της σχέσης αυτής.

```
129 def Qinv(x):
130     return np.sqrt(2) * erfcinv( 2 * x )
```

Listing 1: Η συνάρτηση `Qinv`

```
438 class pam_constellation(constellation):
439     """
440     PAM constellation class
441     """
442
443     def __init__(self, M, beta = 1, title = None, SNRbdB = None,
444                 Rb = 1):
445         super().__init__(title = title)
446
447         self.M = M
448         self.m = np.log2(M).astype(int)
449         self.SNRbdB = SNRbdB
450         self.Rb = Rb
451         self.RS = Rb / np.log2(self.M)
452
453         symbols = np.zeros( M )
454         for i in range( M ):
455             symbols [ i ] = 2 * i - M + 1
456
457         self.set_symbols( symbols )
458         self.set_gray_bits( self.m )
459
460     def ser(self):
461         SNRb = 10 ** ( self.SNRbdB / 10)
462         q = 6 * SNRb * self.m / (self.M ** 2.0 - 1)
463         return 2 * (self.M-1) / self.M * Q ( np.sqrt(q) )
464
465     def ber(self):
466         return self.ser() / self.m
467
468     def B(self):
469         return self.RS / 2
470
471     def sp_eff(self):
472         return 2 * np.log2(self.M)
473
474     def req_SNRb(self, ber):
475         M = self.M
476         qr = Qinv( ber * (M-1) / (2*M) * np.log2(M) )
477         q = qr ** 2
```



Εικόνα 5: Επιδόσεις συστήματος PAM

```
478         return to_db( q * ( M ** 2 - 1 ) / ( 6 * np.log2(M) ) )
```

Listing 2: Η κλάση pam_constellation

Βάσει της `Qinv` μπορούμε να προσθέσουμε μερικές νέες μεθόδους στην `pam_constellation` όπως φαίνεται και στο [listing 2](#):

- Η `B` υπολογίζει το ελάχιστο απαιτούμενο εύρος ζώνης του PAM
- Η `sp_eff` επιστρέφει την φασματική απόδοση του PAM
- Η `req_SNRb` επιστρέφει το απαιτούμενο ηχητικό σήματος-προς-θόρυβο ανά bit για να έχουμε πιθανότητα σφάλματος bit ίσο με το όρισμα `ber`.

Στην εικόνα 5 δείχνουμε το απαιτούμενο ηχητικό σήμα προς θόρυβο ανά bit SNR_b και την αντίστοιχη φασματική απόδοση s_{eff} για διάφορες τιμές του M . Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνουμε το M αυξάνει η φασματική απόδοση αλλά αυξάνει επίσης και το απαιτούμενο SNR_b , δηλαδή όσο προσπαθούμε να κάνουμε αποδοτικότερη αξιοποίηση του διαθέσιμου εύρους ζώνης B μεταδίδοντας μεγαλύτερο ρυθμό, τόσο μεγαλύτερο είναι και το απαιτούμενο ηχητικό σήμα προς θόρυβο οπότε και το σύστημα γίνεται περισσότερο ενεργοβόρο καθώς απαιτεί υψηλότερη ενέργεια στον δέκτη.

6 Ζωνοπερατό PAM

Η φασματική πυκνότητα του σήματος PAM δίνεται όπως είδαμε από την σχέση:

$$S_X(f) = \frac{\mathbb{E}\{x_k^2\}}{T_s} |P(f)|^2 \quad (46)$$

όπου $\mathbb{E}\{x_k^2\}$ η διακύμανση των συμβόλων PAM η οποία καθορίζεται από την:

$$\mathbb{E}\{x_k^2\} = \beta^2 \frac{M^2 - 1}{3} \quad (47)$$

ενώ το $P(f)$ είναι το φάσμα του παλμού $p(t)$. Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με την περίπτωση όπου το φάσμα $P(f)$ ήταν συγκεντρωμένο στις χαμηλές συχνότητες κάτι που ισχύει τόσο όταν έχουμε τετραγωνικούς παλμούς που καθορίζονται από την (1) είτε από τους παλμούς sinc στην (14). Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση όπου το σήμα πρέπει να μεταδοθεί σε υψηλότερες συχνότητες κάτι που συνήθως απαιτείται σε ασύρματα κανάλια. Για παράδειγμα στην περίπτωση του πρότυπου 802.11n έχουμε διαθέσιμο ένα εύρος ζώνης $B \cong 40 \text{ MHz}$ γύρω από μία κεντρική συχνότητα $f_0 \cong 2.4 \text{ GHz}$. Στην περίπτωση παρατηρούμε ότι ο λόγος f_0/B είναι πολύ μεγάλος, δηλαδή η κεντρική συχνότητα είναι πολύ μεγαλύτερη από το διαθέσιμο εύρος ζώνης, μία συνθήκη η οποία συναντιέται πολύ συχνά στην πράξη.

Θα δείξουμε τώρα ότι το σήμα:

$$y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t) = \sum_k x_k p(t - kT_S) \cos(2\pi f_0 t) \quad (48)$$

το οποίο προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του σήματος **PAM** βασικής ζώνης $x(t)$ με το φέρον σήμα $\cos(2\pi f_0 t)$ έχει τις επιθυμητές ιδιότητες αρκεί το εύρος ζώνης των παλμών $p(t)$ να είναι πολύ μικρότερο από την συχνότητα f_0 . Στις επικοινωνίες το f_0 αναφέρεται ως φέρουσα συχνότητα.

Αν υπολογίσουμε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του $y(t)$ θα έχουμε:

$$R_{YY}(t_1, t_2) = \mathbb{E} \{x(t_1)x(t_2) \cos(2\pi f_0 t_1) \cos(2\pi f_0 t_2)\} = \mathbb{E} \{x(t_1)x(t_2)\} \cos(2\pi f_0 t_1) \cos(2\pi f_0 t_2) \quad (49)$$

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες μπορούμε να γράψουμε ισοδύναμα:

$$R_{YY}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} R_{XX}(t_1, t_2) \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2)) + \frac{1}{2} R_{XX}(t_1, t_2) \cos(2\pi f_0(t_1 + t_2)) \quad (50)$$

Όπως είχαμε δει στην διάλεξη 8, για να υπολογίσουμε τη φασματική πυκνότητα ισχύος του $S_Y(f)$ μπορούμε να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό **Fourier** της συνάρτησης $\bar{R}_{YY}(t)$ που καθορίζεται από την σχέση:

$$\bar{R}_{YY}(t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} R_{YY}(t+t', t') dt' \quad (51)$$

Θα έχουμε:

$$R_{YY}(t+t', t') = \frac{1}{2} R_{XX}(t+t', t') \cos(2\pi f_0 t) + \frac{1}{2} R_{XX}(t+t', t') \cos(2\pi f_0(2t' + t)) \quad (52)$$

Ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα των δύο όρων ως προς t' σε ένα διάστημα $[-\tau/2, \tau/2]$. Ο πρώτος όρος γράφεται

$$\frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} R_{XX}(t+t', t') \cos(2\pi f_0 t) dt' = \frac{\cos(2\pi f_0 t)}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} R_{XX}(t+t', t') dt' \quad (53)$$

οπότε λαμβάνοντας το όριο για $\tau \rightarrow \infty$ θα έχουμε

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} R_{XX}(t+t', t') \cos(2\pi f_0 t) dt' = \bar{R}_{XX}(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad (54)$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} R_{XX}(t+t', t') \cos(2\pi f_0(2t' + t)) dt' \quad (55)$$

Έχουμε υποθέσει ότι το εύρος ζώνης B του παλμού $p(t)$ είναι πολύ μικρότερο από τη φέρουσα συχνότητα f_0 . Αυτό σημαίνει ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος του σήματος **PAM** βασικής ζώνης, $S_X(f)$ η οποία καθορίζεται από την (46) περιέχει συχνότητες f οι οποίες είναι πολύ μικρότερες από την f_0 και επομένως το $R_{XX}(t+t', t')$ το οποίο σχετίζεται με τον αντίστροφο μετασχηματισμό **Fourier** του $S_X(f)$ θα είναι πολύ πιο αργό από το $\cos(2\pi f_0(2t' + t))$. Τι συμβαίνει όταν ολοκληρώνουμε μία αργή συνάρτηση $g(t)$ πολλαπλασιασμένη με ένα γρήγορο συνημίτονο $\cos(2\pi f_1 t + \phi)$; Ας το δούμε με την βοήθεια της **Python**, θεωρώντας ένα φέρον σήμα,

$$c(t) = \cos(2\pi f_0 t) \quad (56)$$

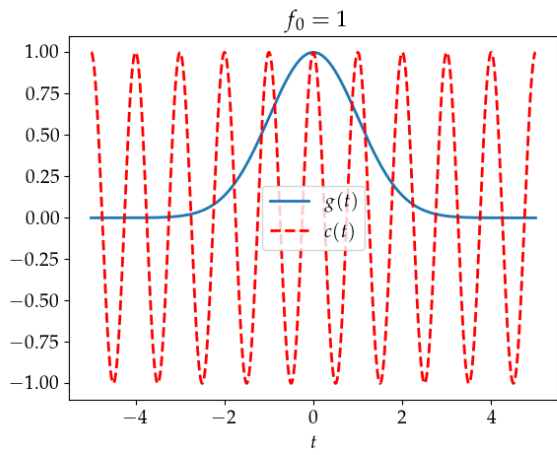
και έναν παλμό $g(t)$ ο οποίος ακολουθεί **Gaussian** κατανομή,

$$g(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2B^2}\right) \quad (57)$$

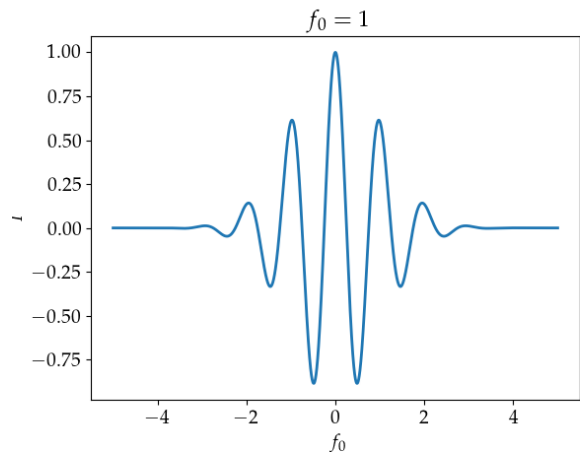
Θα υπολογίσουμε αριθμητικά το ολοκλήρωμα του γινομένου τους $z(t) = c(t)g(t)$ σε ένα διάστημα $[-\tau/2, \tau/2]$ όπου $\tau = 10/B$.

$$I = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} z(t) dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} g(t)c(t) dt \quad (58)$$

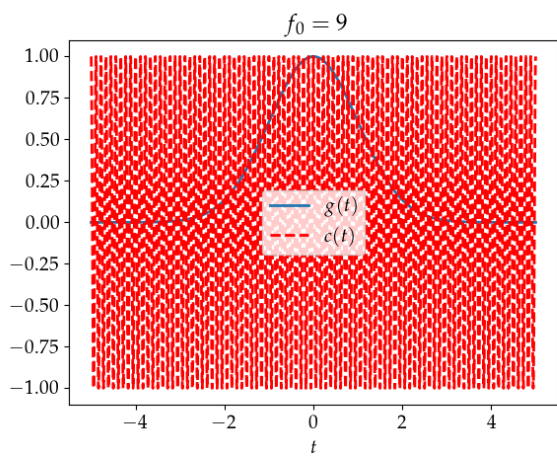
Στην εικόνα 6 δείχνουμε τα $c(t)$, $g(t)$ και $z(t)$ για δύο διαφορετικές τιμές του f_0 . Παρατηρούμε ότι το $z(t)$ είναι στην ουσία ένα συνημίτονο του οποίου το πλάτος αλλάζει αργά σε σχέση με τις μεταβολές του συνημιτόνου. Επομένως



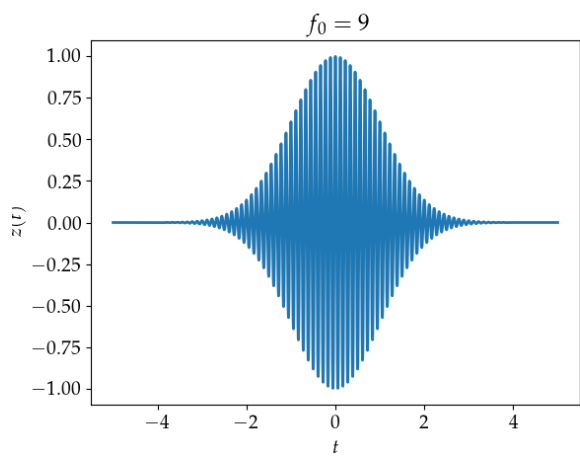
(a)



(b)

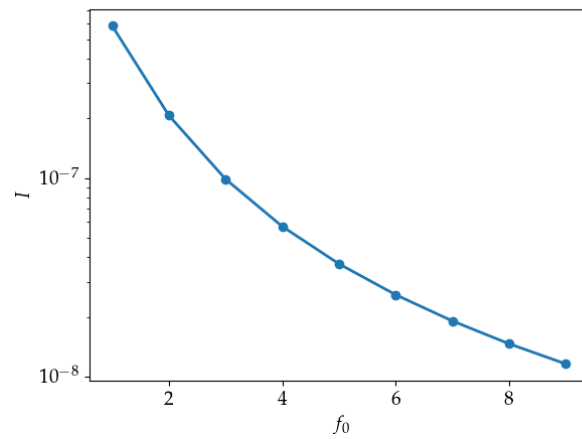


(c)



(d)

Εικόνα 6: Το γινόμενο $z(t)$ για δύο διαφορετικές τιμές του f_0 .



Εικόνα 7: Η τιμή του ολοκληρώματος I .

ειδικά για μεγάλο f_0 , το εμβαδόν των αρνητικών ημιπεριόδων του $z(t)$ θα αντισταθμίζει το εμβαδόν των θετικών και επομένως το I θα είναι σχεδόν ίσο με μηδέν. Αυτό φαίνεται και στην εικόνα 7 όπου έχουμε υπολογίσει αριθμητικά το I με τον κανόνα του τραpezίου. Από την γραφική παράσταση φαίνεται ότι όσο μεγαλύτερη είναι η φέρουσα συχνότητα τόσο μικρότερο είναι το I και επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} R_{XX}(t+t', t') \cos(2\pi f_0(2t'+t)) dt' \cong 0 \quad (59)$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\bar{R}_{YY}(t) = \frac{1}{2} \bar{R}_{XX}(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad (60)$$

Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες του μετασχηματισμού **Fourier** μπορούμε να υπολογίσουμε την φασματική πυκνότητα $S_Y(f)$ του $y(t)$ ως εξής:

$$S_Y(f) = \mathcal{F}\{\bar{R}_{YY}(t)\} = \frac{1}{4} S_X(f-f_0) + \frac{1}{4} S_X(f+f_0) \quad (61)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι το φάσμα του βασικού **PAM** έχει μετατοπιστεί γύρω από τις συχνότητες $f = \pm f_0$. Επομένως το φάσμα του $y(t)$ έχει την επιθυμητή μορφή: καταλαμβάνει μία στενή ζώνη συχνοτήτων γύρω από την φέρουσα συχνότητα f_0 .

6.1 Μέση ενέργεια και ισχύς

Η μέση ισχύς του ζωνοπερατού **PAM** $\mathcal{P}_{PB}$ στον πομπό, μπορεί να υπολογιστεί ολοκληρώνοντας την φασματική πυκνότητα ισχύς $S_Y(f)$:

$$\mathcal{P}_{PB} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f) df = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f-f_0) df + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f+f_0) df = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df \quad (62)$$

Η ισχύς του **PAM** βασικής ζώνης $\mathcal{P}_{BB}$ δίνεται από την σχέση δίνεται από την σχέση:

$$\mathcal{P}_{BB} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df = \beta^2 \frac{M^2 - 1}{3T_S} \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df = \beta^2 \mathcal{E}_p \frac{M^2 - 1}{3T_S} \quad (63)$$

Η ισχύς του ζωνοπερατού **PAM**, δίνεται από την σχέση:

$$\mathcal{P}_{PB} = \frac{\mathcal{P}_{BB}}{2} = \beta^2 \mathcal{E}_p \frac{M^2 - 1}{6T_S} \quad (64)$$

Ο παράγοντας $\frac{1}{2}$ οφείλεται στο ότι το σήμα πολλαπλασιάζεται με τον φέρον σήμα $\cos(2\pi f_0 t)$. Η ενέργεια ανά **bit** $\mathcal{E}_b$ του ζωνοπερατού **PAM**, θα δίνεται από την σχέση:

$$\mathcal{E}_b = \mathcal{P}_{PB} T_b = \beta^2 \mathcal{E}_p \frac{M^2 - 1}{6 \log_2 M} \quad (65)$$

Το ηλίκο σήμα προς θόρυβο του **bit** δίνεται από τη σχέση:

$$\text{SNR}_b = \frac{\mathcal{E}_b}{N_0} = \beta^2 \mathcal{E}_p \frac{M^2 - 1}{6 N_0 \log_2 M} \quad (66)$$

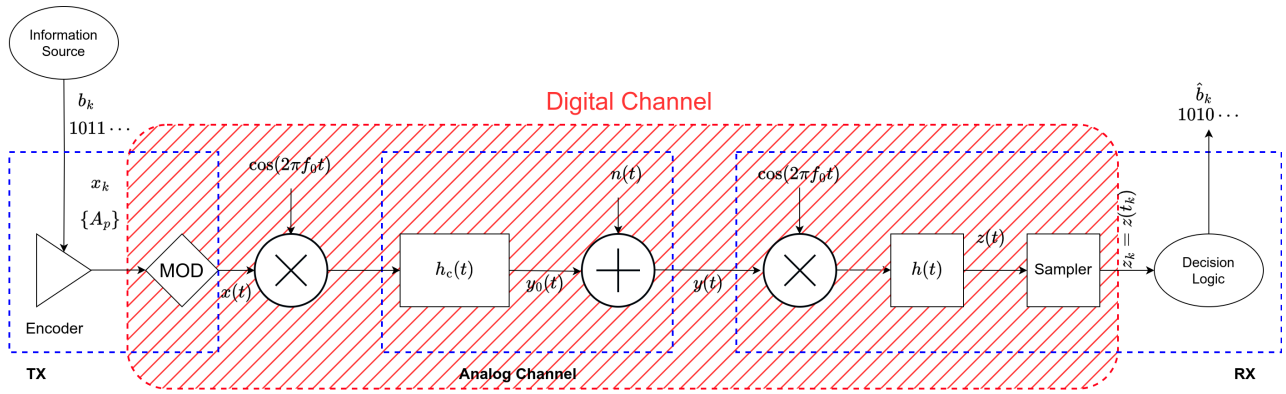
6.2 Το μοντέλο του συστήματος

Στην εικόνα 8, δείχνουμε το μοντέλο του ζωνοπερατού συστήματος **PAM**. Συγκριτικά με την εικόνα 1 η διαφορά είναι ότι το σήμα μετά τον διαμορφωτή (**MOD**) πολλαπλασιάζεται με το φέρον σήμα $\cos(2\pi f_0 t)$ ώστε το φάσμα του σήματος να μετατοπιστεί κατάλληλα. Παρατηρήστε και ένα επιπλέον πολλαπλασιασμό με το φέρον σήμα στην έξοδο του δέκτη. Αν υποθέσουμε ένα ομαλό κανάλι όπως και πριν, δηλαδή $h_c(t) = \sqrt{L}\delta(t)$ τότε το σήμα $y(t)$ στην είσοδο του δέκτη θα δίνεται από την σχέση:

$$y(t) = \sqrt{L} \sum_k x_k p(t - kT_S) \cos(2\pi f_0 t) + n(t) \quad (67)$$

Αν επικεντρωθούμε στο σύμβολο $k = 0$ τότε μπορούμε να γράψουμε

$$y(t) = \sqrt{L} x_0 q(t) + n(t) \quad (68)$$



Εικόνα 8: Μοντέλο ζωνοπερατού PAM.

όπου

$$q(t) = p(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad (69)$$

Αν περάσουμε το $y(t)$ από ένα σύστημα LTI με χρονική απόκριση $h_c(t)$ με σκοπό να ελαχιστοποιήσουμε την επίδραση του θορύβου, το σήμα στην έξοδο του συστήματος αυτού θα γραφτεί ως εξής:

$$z(t) = y(t) \otimes h(t) = \sqrt{L} x_0 q(t) \otimes h(t) + n(t) \otimes h(t) \quad (70)$$