

# Κβαντικοί Υπολογιστές και Αλγόριθμοι

## Διάλεξη 4η

Θωμάς Καμαλάκης

Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο Αθηνών

2025

# Περιεχόμενα

1 Πύλες πολλαπλών qubits

2 Οικουμενικές πύλες

# Υλοποίηση μοναδιαίων τελεστών

- Όπως είδαμε στα προηγούμενα κάθε επεξεργασία που μπορούμε να κάνουμε σε ένα qubit εκτός από την μέτρηση περιγράφεται από έναν μοναδιαίο τελεστή  $U$ .
- Επομένως μπορεί να περιγραφεί από έναν μοναδιαίο πίνακα με στοιχεία  $u_{\nu\mu} = \langle \nu | U | \mu \rangle$  τον οποίο πάλι συμβολίζουμε με  $U$ .
- Θα δείξουμε τώρα πως μπορούμε να γράψουμε τον πίνακα  $U$  πάντα ως γινόμενο επιμέρους πινάκων  $U_i$  δρα μόνο πάνω σε δύο ιδιοκαταστάσεις.
- Δηλαδή υπάρχουν δύο διακριτές ιδιοκαταστάσεις  $|i_1\rangle$  και  $|i_2\rangle$  τέτοια ώστε

$$U_i |p\rangle = |p\rangle \text{ όταν } p \neq i_1, i_2 \quad (1)$$

- Για να ισχύει η παραπάνω σχέση θα πρέπει να ισχύει:

$$u_{pq}^{(i)} = \langle p | U_i | q \rangle = \begin{cases} 1 & p = q \neq i_1, i_2 \\ 0 & p \neq q \text{ και } p, q \neq i_1, i_2 \end{cases}$$

## Υλοποίηση μοναδιαίων τελεστών

- Δηλαδή οι πίνακες  $U_i$  μπορεί να διαφέρουν από τον ταυτοτικό πίνακα  $I$  το πολύ σε τέσσερα στοιχεία.
  - Από τα στοιχεία αυτά τα 2 είναι πάνω στην διαγώνιο στις θέσεις  $(i_1, i_1)$  και  $(i_2, i_2)$
  - Τα υπόλοιπα δύο βρίσκονται στις θέσεις  $(i_1, i_2)$  και  $(i_2, i_1)$ .
  - Για παράδειγμα στην περίπτωση πινάκων  $4 \times 4$ , μία πιθανή μορφή του πίνακα  $U_i$  είναι:

$$U_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix}$$

- Έχουμε  $i_1 = 0$  και  $i_2 = 2$  και παρατηρούμε ότι αυτός ο πίνακας δρα ως εξής:

$$U_i |0\rangle = |0\rangle$$

$$U_i |2\rangle = |2\rangle$$

Οι πίνακες  $U_i$

- Οι συντελεστές  $a, b, c, d$  δεν έχουν οποιαδήποτε μορφή
  - Θα έχουμε:

$$U_i |i_1\rangle = a|i_1\rangle + b|i_2\rangle$$

$$U_i |i_2\rangle = c|i_1\rangle + d|i_2\rangle$$

- Επομένως τα  $a, b, c, d$  πρέπει να αντιστοιχούν σε στοιχεία ενός  $2 \times 2$  μοναδιαίου πίνακα:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- Είχαμε δει ότι ο πίνακας αυτός γενικά έχει την μορφή

$$e^{j\alpha} \begin{bmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} e^{-j\beta/2} e^{-j\delta/2} & -\sin \frac{\gamma}{2} e^{-j\beta/2} e^{j\delta/2} \\ \sin \frac{\gamma}{2} e^{j\beta/2} e^{-j\delta/2} & \cos \frac{\gamma}{2} e^{j\beta/2} e^{j\delta/2} \end{bmatrix}$$

Οι πίνακες  $U_i$

- Αν επιλέξουμε  $\alpha = 0$  τότε βλέπουμε ότι τα στοιχεία του πίνακα έχουν την ιδιότητα  $d = a^*, b = -c^*$
  - Επομένως μπορούμε να γράψουμε τον  $2 \times 2$  πίνακα στην εξής μορφή:

$$\frac{1}{\sqrt{|x|^2+|y|^2}} \begin{bmatrix} x & y \\ -y^* & x^* \end{bmatrix}$$

- Αν θέσουμε  $c_{xy} = (|x|^2 + |y|^2)^{-1/2}$ , ο πίνακας  $U_i$  έχει την μορφή

$$U_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{xy}x & \cdots & c_{xy}y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -c_{xy}y^* & \cdots & c_{xy}x^* & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

# Οι πίνακες $U_i$

- Ο συζυγής ανάστροφος  $A_i = U_i^T$  του  $U_i$  θα έχει την ίδια μορφή με τον  $U_i$  αφού οι στήλες γίνονται γραμμές και οι γραμμές γίνονται στήλες:

$$A_i = U_i^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{xy}x^* & \cdots & c_{xy}y^* & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -c_{xy}y & \cdots & c_{xy}x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

# Υλοποίηση μοναδιαίων τελεστών

- Προσπαθούμε να βρούμε πίνακες  $A_i$  που να είναι της ίδιας μορφής με τους  $U_i$  έτσι ώστε να έχουμε

$$A_1 \cdots A_d U = I$$

- Αν τα καταφέρουμε τότε

$$U = A_d^T \cdots A_1^T = U_d \cdots U_1$$

- Δηλαδή θα έχουμε γράψει τον πίνακα  $U$  ως γινόμενο πινάκων  $U_i$  που αντιστοιχούν σε τελεστές που δρουν μόνο σε δύο ιδιοδιανύσματα βάσης ο κάθε ένας.
- Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο πίνακας  $U$  έχει στοιχεία  $u_{pq}$ :

$$U = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{N-1,0} & u_{N-1,1} & \cdots & u_{N-1,N-1} \end{bmatrix}$$

# Mία χρήσιμη ιδιότητα των μοναδιαίων πινάκων

- Όπως έχουμε πει ένας πίνακας  $U$  με στοιχεία  $u_{pq}$  είναι μοναδιαίος εάν  $UU^T = I$ .
- Αυτό σημαίνει ότι

$$\sum_{m=0}^{N-1} u_{pm} u_{qm}^* = \delta_{pq}$$

- όπου όπως και πριν,  $\delta_{pq} = 1$ , εάν  $p = q$  και  $\delta_{pq} = 0$  εάν  $p \neq q$ .
- Εάν  $p = q$  θα έχουμε:

$$\sum_{m=0}^{N-1} |u_{pm}|^2 = 1$$

- Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των τετραγώνων των μέτρων των στοιχείων κάθε γραμμής του πίνακα ισούται με 1.
- Επειδή ο συζυγής ανάστροφος  $U^T$  του  $U$  είναι πάλι μοναδιαίος το ίδιο θα ισχύει και για τις στήλες του  $U$ .

# Υλοποίηση μοναδιαίων τελεστών

- Θα ακολουθήσουμε την εξής στρατηγική για την επιλογή των πινάκων  $A_i$ .
- Ξεκινάμε με έναν  $N \times N$  πίνακα  $A_1$  όπου επιλέγουμε  $i_1 = 0$  και  $i_2 = 1$ .
- Επιλέγουμε τα  $x$  και  $y$  έτσι ώστε όταν υπολογίσουμε τον πίνακα  $\Gamma_1 = A_1 U$  να μηδενίσουμε το στοιχείο  $(1, 0)$ : Είναι το στοιχείο της δεύτερης γραμμής και της πρώτης στήλης του  $\Gamma_1$ .
- Συνεχίζουμε για να υπολογίσουμε τον πίνακα  $A_2$  με τον ίδιο τρόπο θέτοντας πάλι  $i_1 = 0$  αλλά αυτή τη φορά  $i_2 = 2$ .
- Τώρα θέλουμε να μηδενίσουμε το στοιχείο της τρίτης γραμμής και της πρώτης στήλης του  $\Gamma_2 = A_2 \Gamma_1$ .
- Συνεχίζουμε αυτή την διαδικασία μέχρι και την τελευταία γραμμή του πίνακα.

## Υλοποίηση μοναδιαίων τελεστών

- Τελικά θα έχουμε έναν πίνακα  $\Gamma_{N-1}$  που θα έχει την μορφή:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{00} & \gamma_{01} & \cdots & \gamma_{0,N-1} \\ 0 & \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1,N-1} \\ 0 & \gamma_{21} & \cdots & \gamma_{2,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \gamma_{N-1,1} & \cdots & \gamma_{N-1,N-1} \end{bmatrix}$$

- Ο πίνακας αυτός πρέπει να είναι μοναδιαίος οπότε το άθροισμα των τετραγώνων των μέτρων της πρώτης στήλης θα είναι 1. Άρα  $|\gamma_{00}|^2 = 1$ .
- Επίσης και το άθροισμα των τετραγώνων των μέτρων της πρώτης γραμμής να είναι επίσης 1.
- Ο μόνος τρόπος για να γίνεται αυτό είναι:

$$\gamma_{01} = \gamma_{02} = \cdots \gamma_{0,N-1} = 0$$

‘

# Υλοποίηση μοναδιαίων τελεστών

- Επομένως ο πίνακας  $\Gamma_{N-1}$  είναι της μορφής

$$\Gamma_{N-1} = \begin{bmatrix} \gamma_{00} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & V & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

- όπου ο πίνακας  $V$  είναι  $(N - 1) \times (N - 1)$  και μοναδιαίος.
- Αν επαναλάβουμε την διαδικασία για τον πίνακα  $V$  τότε θα μπορέσουμε να βρούμε πίνακες  $B_i$  που πάλι θα δρουν το πολύ σε δύο ιδιοδιανύσματα βάσεις για τους ο πινακας  $B_1 \dots B_{N-2}V$  να έχει πάλι όλα τα στοιχεία της πρώτης γραμμής και στήλης ίσα με μηδέν εκτός από το πάνω δεξιά.
- Από τους πίνακες  $B_m$  μπορούμε να φτιάξουμε επιπλέον πίνακες  $A_i$  με διάσταση  $N \times N$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B_i & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

# Υλοποίηση μοναδιαίων τελεστών

- Επομένως συνεχίζουμε ε αυτόν τον τρόπο όπου τελικά βρίσκουμε πίνακες  $A_i$  που να είναι της ίδιας μορφής με τους  $U_i$  έτσι ώστε να έχουμε

$$A_1 \cdots A_d U = I$$

- Οπότε θα έχουμε:

$$U = A_d^T \cdots A_1^T = U_d \cdots U_1$$

- Ας δούμε για παράδειγμα αυτήν την διαδικασία στην περίπτωση όπου του πίνακα:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}$$

# Παράδειγμα

- Ο πρώτος πίνακας  $A_1$  θα έχει την μορφή:

$$A_1 = \begin{bmatrix} x^* & y^* & 0 & 0 \\ -y & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- όπου πρέπει να επιλέξουμε τα  $x, y$  ώστε  $|x|^2 + |y|^2 = 1$  και το στοιχείο  $(1, 0)$  του πίνακα  $\Gamma_1 = A_1 \mathcal{M}$  να είναι ίσο με 0.
- Θα πρέπει  $x - y = 0$ , οπότε μπορούμε να επιλέξουμε  $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .
- Ο πίνακας  $\Gamma_1$  θα είναι:

$$\Gamma_1 = A_1 \mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0.71 & 0.35 + 0.35j & 0 & 0.35 - 0.35j \\ 0 & 0.35 - 0.35j & 0.71 & 0.35 + 0.35j \\ 0.50 & -0.50 & 0.50 & -0.50 \\ 0.50 & -0.50j & -0.50 & 0.50j \end{bmatrix}$$

# Παράδειγμα

- Ο δεύτερος πίνακας  $A_2$  θα έχει την μορφή:

$$A_2 = \begin{bmatrix} x^* & 0 & y^* & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -y & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Για να μηδενίζεται το στοιχείο  $(2, 0)$  του  $\Gamma_2 = A_2\Gamma_1$  θα πρέπει  $-0.71y + 0.5x = 0$ , οπότε  $x = 0.82$  και  $y = 0.58$  ενώ:

$$\Gamma_2 = A_2\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0.87 & 0.29j & 0.29 & -0.29j \\ 0 & 0.35 - 0.35j & 0.71 & 0.35 + 0.35j \\ 0 & -0.61 - 0.20j & 0.41 & -0.61 + 0.20j \\ 0.50 & -0.50j & -0.50 & 0.50j \end{bmatrix}$$

# Παράδειγμα

- Ο τρίτος πίνακας  $A_2$  θα έχει την μορφή:

$$A_3 = \begin{bmatrix} x^* & 0 & 0 & y^* \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

- Για να μηδενίζεται το στοιχείο  $(3, 0)$  του  $\Gamma_3 = A_3\Gamma_2$  θα πρέπει  $x = 0.87$  και  $y = 0.5$  και θα έχουμε:

$$\Gamma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.35 - 0.35j & 0.71 & 0.35 + 0.35j \\ 0 & -0.61 - 0.20j & 0.41 & -0.61 + 0.20j \\ 0 & -0.58j & -0.58 & 0.58j \end{bmatrix}$$

- Παρατηρείστε ότι μηδενίστηκαν και όλα τα στοιχεία της πρώτης γραμμής εκτός του πρώτου.

# Παράδειγμα

- Συνεχίζουμε τώρα με τον  $3 \times 3$  υπόπινακα:

$$\Gamma'_3 = \begin{bmatrix} 0.35 - 0.35j & 0.71 & 0.35 + 0.35j \\ -0.61 - 0.20j & 0.41 & -0.61 + 0.20j \\ -0.58j & -0.58 & 0.58j \end{bmatrix}$$

- Ξεκινάμε να μηδενίσουμε το στοιχείο  $(1, 0)$ , δηλαδή το 2o στοιχείο της πρώτης στήλης. Ο πίνακας που θεωρούμε είναι τώρα:

$$B_4 = \begin{bmatrix} x^* & y^* & 0 \\ -y & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Βρίσκουμε ότι  $y = -0.35 - 0.71j$  και  $x = 0.61$  οπότε υπολογίζοντας το  $\Gamma'_4 = B_4 \Gamma'_3$  θα έχουμε

$$\Gamma'_4 = \begin{bmatrix} 0.58 - 0.58j & 0.29 + 0.29j & 0.29 - 0.29j \\ 0 & 0.50 + 0.50j & -0.50 + 0.50j \\ -0.58j & -0.58 & 0.58j \end{bmatrix}$$

# Παράδειγμα

- Στη συνέχεια θεωρούμε τον πίνακα  $B_5$

$$B_5 = \begin{bmatrix} x^* & 0 & y^* \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & x \end{bmatrix}$$

- οπότε επιλέγουμε  $y = 0.41 - 0.41j$  και  $y = 0.82$ . Το γινόμενο  $\Gamma'_5 = B_5 \Gamma'_4$  θα είναι:

$$\Gamma'_5 = \begin{bmatrix} 0.71 - 0.71j & 0 & 0 \\ 0 & 0.50 + 0.50j & -0.50 + 0.50j \\ 0 & -0.71 & 0.71j \end{bmatrix}$$

- Παρατηρούμε ότι η φάση του στοιχείου  $(0, 0)$  είναι  $-\frac{\pi}{4}$  οπότε αν απλά πολλαπλασιάσουμε τα  $x, y$  με  $e^{j\pi/4}$  το στοιχείο θα γίνει ίσο με 1.

$$\Gamma'_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 + 0.5j & -0.5 + 0.5j \\ 0 & -0.5 + 0.5j & 0.5 + 0.5j \end{bmatrix}$$

# Παράδειγμα

- Ο πίνακας  $\Gamma'_5$  βλέπουμε ότι έχει την επιθυμητή μορφή και δεν έχει νόημα να συνεχίσουμε περαιτέρω γιατί τώρα ο υποπίνακας θα είναι  $2 \times 2$  οπότε ήδη δρα μόνο σε ένα qubit.
- Οι πίνακες  $B_4$  και  $B_5$  μετατρέπονται στους κατάλληλους  $4 \times 4$  προσθέτοντας γραμμές όπως εξηγήσαμε:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.61 & -0.35 + 0.71j & 0 \\ 0 & 0.35 + 0.71j & 0.61 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.58 + 0.58j & 0 & 0.58j \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.58j & 0 & 0.58 - 0.58j \end{bmatrix}$$

# Παράδειγμα

- Έχοντας τους πίνακες  $A_i$  μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι

$$A_5 A_4 A_3 A_2 A_1 \mathcal{M} = \Gamma_5$$

- όπου ο πίνακας  $\Gamma_5$  προκύπτει από τον  $\Gamma'_5$  κατά τα γνωστά:

$$\Gamma_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 + 0.5j & -0.5 + 0.5j \\ 0 & 0 & -0.5 + 0.5j & 0.5 + 0.5j \end{bmatrix}$$

- Επομένως έχουμε γράψει τον πίνακα  $\mathcal{M}$  ως γινόμενο μοναδιαίων πινάκων που ο κάθε ένας δρα το πολύ σε δύο ιδιοδιανύσματα βάσης:

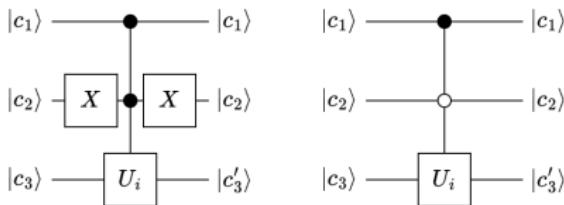
$$\mathcal{M} = A_1^T A_2^T A_3^T A_4^T A_5^T \Gamma_5 = U_1 U_2 U_3 U_4 U_5 U_6$$

# Υλοποίηση κυκλωμάτων για τους πίνακες $U_i$

- Τώρα που έχουμε δει πως μπορούμε να εκφράσουμε έναν μοναδιαίο πίνακα  $U$  σε επιμέρους γινόμενο πίνακες  $U_i$  που δρουν μόνο πάνω σε δύο ιδιοδιανύσματα βάσης, το επόμενο βήμα είναι να δούμε πως υλοποιούνται αυτοί οι πίνακες με κβαντικές πύλες.
- Ας υποθέσουμε ότι ένας πίνακας  $U_i$  δρα πάνω στις καταστάσεις  $|s\rangle$  και  $|t\rangle$  της υπολογιστικής μας βάσης.
- Εάν το  $s$  και το  $t$  διαφέρουν σε ακριβώς ένα bit, π.χ. το bit  $p$  τότε τα πράγματα είναι σχετικά εύκολα.
- Απλά θα πρέπει να εφαρμόσουμε τον πίνακα  $U_i$  σε αυτό το qubit.
- Για παράδειγμα εάν  $|s\rangle = |100\rangle$  και  $|t\rangle = |101\rangle$  τότε η πύλη δρα πάνω στο τελευταίο qubit ( $p = 3$ ).

# Υλοποίηση κυκλωμάτων για τους πίνακες $U_i$

- Ας εξετάσουμε το παρακάτω κύκλωμα:



- Στο δεξιό κύκλωμα έχουμε απλοποιήσει λίγο τον συμβολισμό ώστε να περιγράφουμε την ακολουθία της πύλης NOT - στοιχείο ελέγχου που ενεργοποιείται όταν έχουμε  $|1\rangle$  και στη συνέχεια της δεύτερης πύλης NOT με ένα άσπρο κύκλο.
- Στην ουσία ο άσπρος κύκλος είναι ένα στοιχείο ελέγχου που ενεργοποιείται όταν το qubit είναι  $|0\rangle$ .
- Άρα ο τελεστής  $U_i$  εφαρμόζεται στο τρίτο qubit μόνο στις ιδιοκαταστάσεις που έχουν  $|c_1 c_2\rangle = |10\rangle$ .

# Υλοποίηση κυκλωμάτων για τους πίνακες $U_i$

- Η ελεγχόμενη πύλη  $U_i$  στην ουσία περιγράφεται από τον πίνακα:

$$U_i = \frac{1}{\sqrt{|x|^2+|y|^2}} \begin{bmatrix} x^* & y^* \\ -y & x \end{bmatrix}$$

- όπου στα προηγούμενα είχαμε συζητήσει πως υπολογίζονται τα  $x, y$ .
- Τι γίνεται όμως όταν τα  $|s\rangle$  και  $|t\rangle$  δεν διαφέρουν κατά μόνο qubit;
- Υπάρχει μία έξυπνη τεχνική που βασίζεται στην μέτρηση σύμφωνα με τον κώδικα του Gray.
- Θυμηθείτε ότι ο κώδικας του Gray κάνει αρίθμηση των δυαδικών ακολουθιών έτσι ώστε κάθε φορά να αλλάζει ένα bit.
- Για παράδειγμα ο κώδικας Gray των τριών bit είναι: 000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100.

## Υλοποίηση κυκλωμάτων για τους πίνακες $U_i$

- Ας υποθέσουμε επομένως ότι  $|s\rangle = |000\rangle = |0\rangle$  και  $|t\rangle = |111\rangle = |7\rangle$ .
- Ο πίνακας  $U_i$  έχει την μορφή:

$$U_i = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

- Ορίζουμε και τον  $2 \times 2$  πίνακα που περιγράφει την δράση στις  $|s\rangle$  και  $|t\rangle$ :

$$\tilde{U}_i = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

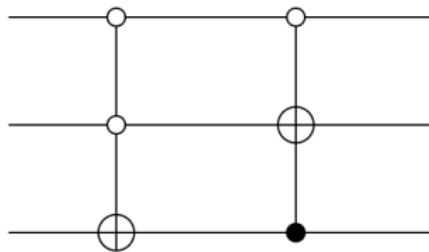
# Υλοποίηση κυκλωμάτων για τους πίνακες $U_i$

- Σκεφτόμαστε έναν τρόπο να πάμε από το 000 στο 111 αλλάζοντας ένα bit την φορά.
- Προφανώς ένας τρόπος είναι  $000 \rightarrow 001 \rightarrow 011 \rightarrow |111\rangle$ .
- Οπότε θα μπορούσαμε να μετασχηματίσουμε την  $|s\rangle = |000\rangle$  στην  $|001\rangle$  και μετά στην  $|011\rangle$ .
- Τότε θα διέφερε από την  $|t\rangle = |111\rangle$  σε ένα ακριβώς qubit.
- Επομένως θέλουμε έναν τρόπο να κάνουμε τους μετασχηματισμούς  $|000\rangle \leftrightarrow |001\rangle$ , μετά  $|001\rangle \leftrightarrow |011\rangle$  και θα έχουμε φτάσει σε ένα σημείο όπου τα ιδιοδιανύσματα στα οποία δρα ο  $U_i$  διαφέρουν μόνο κατά ένα qubit.

# Υλοποίηση κυκλωμάτων για τους πίνακες $U_i$

- Ας δούμε το κύκλωμα:

$$|000\rangle \leftrightarrow |001\rangle \quad |001\rangle \leftrightarrow |011\rangle$$

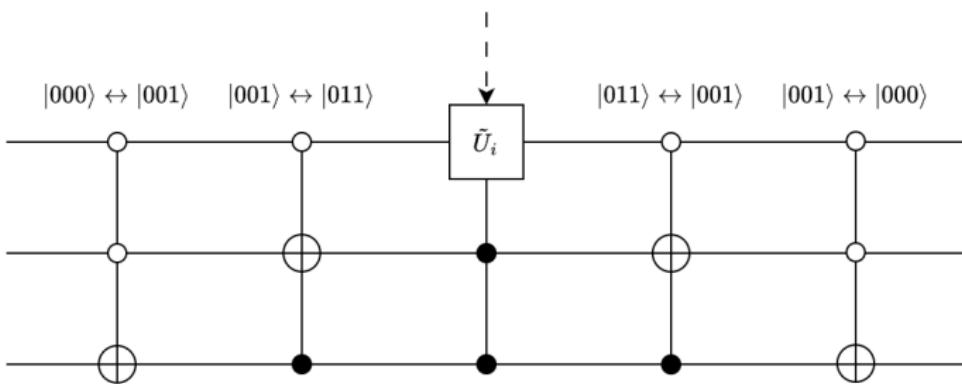


- Στο πρώτο στάδιο βλέπουμε ότι το κύκλωμα υλοποιεί το  $|000\rangle \leftrightarrow |001\rangle$
- Στο δεύτερο στάδιο το  $|001\rangle \leftrightarrow |011\rangle$
- Αν τρέξουμε το κύκλωμα ανάποδα θα αντιστραφούν οι μετασχηματισμοί.
- Κάθε φορά το qubit που αλλάζει γίνεται XOR.
- Όταν ένα qubit παραμένει  $|0\rangle$  περνάει από άσπρο κύκλωμα ενώ όταν παραμένει  $|1\rangle$  περνάει από μαύρο κύκλωμα.

Υλοποίηση κυκλωμάτων για τους πίνακες  $U_i$

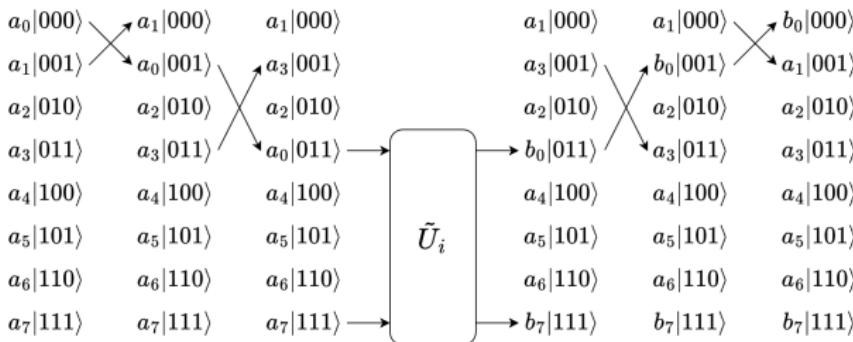
- Το κύκλωμα που υλοποιεί το  $U_i$  είναι το εξής:

$\Delta\rho$ ά μόνο στα  $|011\rangle$  και  $|111\rangle$



# Υλοποίηση κυκλωμάτων για τους πίνακες $U_i$

- Στο παρακάτω διάγραμμα δείχνουμε τη δράση του κυκλώματος που συζητήσαμε:



$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_7 \end{bmatrix}$$

## Οικουμενικές πύλες

- Είδαμε ότι κάθε κβαντικό κύκλωμα με  $N$  εισόδους και  $N$  εξόδους, χωρίς μετρήσεις περιγράφεται από έναν μοναδιαίο τελεστή  $U$  ο οποίος περιγράφεται από έναν πίνακα μοναδιαίο  $N \times N$  πίνακα  $U$ .
  - Επίσης είδαμε ότι το  $U$  γράφεται ως γινόμενο επιμέρους πινάκων  $U = U_1 \cdots U_d$  όπου κάθε ένα από τα  $U_i$  υλοποιείται με μία ελεγχόμενη πύλη 1 qubit στο οποίο ελέγχεται η δράση του  $\tilde{U}_i$  από  $N - 1$  εισόδους ελέγχου.
  - Η ελεγχόμενη πύλη  $C^{N-1}(\tilde{U}_i)$  μπορεί να υλοποιηθεί  $C^1$  με μερικά βοηθητικά qubits. Αυτό το είχαμε δει στην προηγούμενη διάλεξη.
  - Μία πύλη  $C^1$  υλοποιείται με πύλες CNOT (με μία είσοδο ελέγχου) και τέσσερις πύλες απλού qubit (θυμηθείτε πάλι την τελευταία διάλεξη).
  - Άρα: κάθε κύκλωμα μπορεί να υλοποιηθεί με πύλες ενός qubit και πύλες CNOT μαζί με μερικά βοηθητικά qubits.
  - Θα δούμε παρακάτω πως μπορούμε να υλοποιήσουμε τις πύλες ενός qubit με δύο πύλες: την  $T$  και την  $H$ .

## Γενικευμένες περιστροφές

- Οι πύλες  $T$  και  $H$  δίνονται από τις σχέσεις

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{j\pi/4} \end{bmatrix} \quad H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Για να εξηγήσουμε γιατί οι πύλες  $T$  και  $H$  μπορούν να υλοποιήσουν οποιαδήποτε πύλη ενός qubit θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τους τελεστές περιστροφών.
  - Στα προηγούμενα είχαμε δει ότι οι τελεστές που περιγράφουν τις περιστροφές στη σφαίρα Bloch γράφονται ως εξής:

$$\mathcal{R}_x(\omega) = I \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) - jX \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\mathcal{R}_y(\omega) = I \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) - jY \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\mathcal{R}_z(\omega) = I \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) - jZ \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

- Για την υλοποίηση των πυλών χρειάζεται να θεωρήσουμε πιο γενικές περιστροφές.
  - Ας ορίσουμε τον πίνακα  $A$  ως  $A = n_x X + n_y Y + n_z Z$ .

## Γενικευμένες περιστροφές

- Ο πίνακας  $A$  είναι μοναδιαίος αφού:

$$\begin{aligned}
AA^T &= (n_x X + n_y Y + n_z Z)(n_x X + n_y Y + n_z Z)^T = \\
&= (n_x X + n_y Y + n_z Z)(n_x X^T + n_y Y^T + n_z Z^T) = \\
&= (n_x X + n_y Y + n_z Z)(n_x X + n_y Y + n_z Z) = \\
n_x^2 X^2 + n_x n_y XY + n_x n_z XZ + n_y n_x YX + n_y^2 Y^2 + n_z n_x ZX &= \\
&\quad n_z n_x ZX + n_z n_y ZY + n_z^2 Z^2
\end{aligned}$$

- Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι

$$XY + YX = XZ + ZX = YZ + ZY = 0$$

$$X^2 = Y^2 = Z^2 = \mathbb{I}$$

## Γενικευμένες περιστροφές

- Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$AA^T = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)I = I$$

- και επομένως ο  $A$  είναι μοναδιαίος και διαγωνιοποιείται. Ας υπολογίσουμε τα ιδιοδιανύσματα και τις ιδιοτιμές του  $A$ :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} n_z - \lambda & n_x - jn_y \\ n_x + jn_y & -\lambda - n_z \end{vmatrix} = \lambda^2 - n_z^2 - n_x^2 - n_y^2 = \lambda^2 - 1$$

- Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι ιδιοτιμές του  $A$  είναι  $\lambda_1 = 1$  και  $\lambda_2 = -1$ .
  - Τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν ως εξής:

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

## Γενικευμένες περιστροφές

- Θα ισχύει:

$$A = |v_1\rangle\langle v_1| - |v_2\rangle\langle v_2|$$

$$I = |v_1\rangle\langle v_1| + |v_2\rangle\langle v_2|$$

- οπότε βρίσκουμε:

$$|v_1\rangle\langle v_1| = \frac{1}{2}(I + A)$$

$$|v_2\rangle\langle v_2| = \frac{1}{2}(I - A)$$

- Ας υπολογίσουμε τώρα την συνάρτηση:

$$f(A) = \exp(-j\frac{\omega}{2}A)$$

- Όπως γνωρίζουμε από τα προηγούμενα απλά εφαρμόζουμε την συνάρτηση στις ιδιοτιμές:

$$f(A) = f(\lambda_1) |v_1\rangle \langle v_1| + f(\lambda_2) |v_2\rangle \langle v_2| =$$

$$\frac{1}{2}e^{-j\frac{\omega}{2}}(I+A) + \frac{1}{2}e^{j\frac{\omega}{2}}(I-A) = I\cos\frac{\omega}{2} - jA\sin\frac{\omega}{2}$$

# Γενικευμένες περιστροφές

- Ο πίνακας  $f(A)$  θα δείξουμε ότι αντιστοιχεί σε μία περιστροφή γύρω από το μοναδιαίο διάνυσμα  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ .
- Γράφουμε:

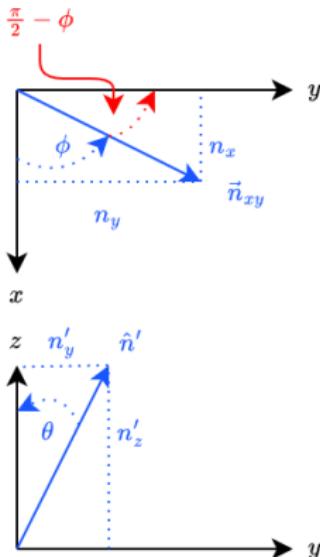
$$\mathcal{R}_{\hat{n}}(\omega) = \exp(-j\frac{\omega}{2}A) = \exp\left(-j\frac{\omega}{2}(n_xX + n_yY + n_zZ)\right)$$

- Καταρχήν θα πρέπει να βρούμε τον πίνακα  $R_{\hat{n}}$  που περιγράφει μία στροφή γύρω από το  $\vec{n}$  στην σφαίρα Bloch και στη συνέχεια να δείξουμε πως αυτός ο πίνακας γράφεται για τα qubits.
- Λογικά θα πρέπει να καταλήξουμε στον πίνακα  $\mathcal{R}_{\hat{n}}$ .

# Γενικευμένες περιστροφές

- Αν γράψουμε το  $\hat{n}$  σε σφαιρικές συντεταγμένες θα έχουμε  $n_x = \sin \theta \cos \phi$ ,  $n_y = \sin \theta \sin \phi$  και  $n_z = \cos \theta$ .
- Έχουμε διάφορες επιλογές για να υπολογίσουμε τον πίνακα  $R_{\hat{n}}(\omega)$  που στις τρεις διαστάσεις αντιστοιχεί σε μία δεξιόστροφη περιστροφή γύρω από το  $\hat{n}$ .
- Η βασική ιδέα είναι να προσπαθήσουμε με περιστροφές ως προς τους τρεις άξονες  $x, y, z$  να ευθυγραμμίσουμε έναν από τους άξονες με το διάνυσμα  $\hat{n}$

# Ο πίνακας $R_{\hat{n}}$



- Ένας τρόπος να το κάνουμε αυτό είναι να κάνουμε μία στροφή γύρω από τον άξονα των  $z$  για να φέρουμε το  $\hat{n}$  στο επίπεδο  $xz$ .
- Δίπλα δείχνουμε την προβολή  $\vec{n}_{xy}$  του  $\hat{n}$  στο επίπεδο  $xy$ .
- Εάν κάνουμε δεξιά στροφή γύρω από το  $z$  κατά γωνία  $\frac{\pi}{2} - \phi$  τότε το  $\vec{n}_{xy}$  θα πέσει πάνω στον άξονα  $y$  οπότε στις τρεις διαστάσεις το διάνυσμα που προκύπτει  $\hat{n}'$  θα έχει συνιστώσα  $y$  ίση με μηδέν.
- Αν στη συνέχεια κάνουμε μία δεξιά στροφή γύρω από τον  $x$  κατά  $\theta$  τότε το  $\hat{n}$  θα έχει ταυτιστεί με τον άξονα  $z$ .

# Ο πίνακας $R_{\hat{n}}$

- Στη συνέχεια θα κάνουμε την στροφή γύρω από τον άξονα των  $z$  χρησιμοποιώντας τον πίνακα  $R_z(\omega)$ .
- Τέλος πρέπει να αντιστρέψουμε τις δύο αρχικές στροφές οπότε εφαρμόζουμε το  $R_x(-\theta)$  και  $R_z(\phi - \frac{\pi}{2})$
- Ο πίνακας που περιγράφει την περιστροφή θα είναι:

$$R_{\hat{n}}(\omega) = R_z(\phi - \frac{\pi}{2})R_x(\theta)R_z(\omega)R_x(-\theta)R_z(\frac{\pi}{2} - \phi)$$

- Οι αντίστοιχοι πίνακες σε επίπεδο qubit θα είναι:

$$\mathcal{R}_{\hat{n}}(\omega) = \mathcal{R}_z(\phi - \frac{\pi}{2})\mathcal{R}_x(\theta)\mathcal{R}_z(\omega)\mathcal{R}_x(-\theta)\mathcal{R}_z(\frac{\pi}{2} - \phi)$$

# Γενικευμένες περιστροφές

- Στο γερό του μαθήματος έχουμε δύο αρχεία σε Python που μας βοηθούν να καταλάβουμε καλύτερα το πρόβλημα.
- Το αρχείο `test_rotations.py` χρησιμοποιεί την βιβλιοθήκη `numpy` για να δείξει ότι το  $R_{\hat{n}}$  όντως προκύπτει από τον προηγούμενο τύπο συγκρίνοντας το αποτέλεσμα με τον γενικό τύπο του Rodrigues από την βιβλιογραφία.
- Το δεύτερο αρχείο `rotations_symbolic.py` χρησιμοποιεί την `sympy` για να καταλήξουμε στις εξισώσεις που καθορίζουν το  $\mathcal{R}_{\bar{n}}$  και το  $R_{\bar{n}}$

# Γενικευμένες περιστροφές

- Όπως προκύπτει από το `rotations_symbolic.py` ο πίνακας  $\mathcal{R}_{\hat{n}}$  έχει μορφή:

$$\mathcal{R}_{\hat{n}}(\omega) = \begin{bmatrix} e^{j\frac{\omega}{2}} \cos^2 \frac{\theta}{2} + e^{-j\frac{\omega}{2}} \sin^2 \frac{\theta}{2} & -j \sin \omega e^{j\phi} \sin \theta \\ -j \sin \omega e^{-j\phi} \sin \theta & e^{j\frac{\omega}{2}} \sin^2 \frac{\theta}{2} + e^{-j\frac{\omega}{2}} \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

- Με τη βοήθεια των συμβολικών υπολογισμών στο script δείχνουμε ότι το  $\mathcal{R}_{\hat{n}}(\omega)$  ταυτίζεται με την έκφραση:

$$\mathcal{R}_{\hat{n}}(\omega) = \exp\left(-j\frac{\omega}{2}(n_x X + n_y Y + n_z Z)\right)$$

# Γενικευμένες περιστροφές

- Επίσης μπορούμε να δείξουμε ότι ο τύπος  $R_{\hat{n}}(\omega)$  ταυτίζεται με τον τύπο του Rodrigues από την βιβλιογραφία:

$$R_{\hat{n}}(\omega) = I + \sin \theta K + (1 - \cos \theta) K^2$$

- όπου ο πίνακας  $K$  δίνεται από την σχέση:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix}$$

- Χρησιμοποιώντας το script `rotations_symbolic_3D.py` δείχνουμε ότι η σχέση αυτή και ταυτίζεται με την προηγούμενη σχέση:

$$R_{\hat{n}}(\omega) = R_z(\phi - \frac{\pi}{2}) R_x(\theta) R_z(\omega) R_x(-\theta) R_z(\frac{\pi}{2} - \phi)$$

# Γενικευμένες περιστροφές

- Τον πίνακα  $A$  πολύ συχνά τον συμβολίζουμε ως εξής:

$$A = n_x X + n_y Y + n_z Z = \vec{\sigma} \cdot \hat{n}$$

- όπου με  $\vec{\sigma}$  έχουμε συμβολίσει ένα διάνυσμα που έχει ως συντεταγμένες τους πίνακες  $X, Y, Z$ ,

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

# Στροφές και μοναδιαίοι πίνακες

- Στην προηγούμενη διάλεξη είχαμε δει ότι για κάθε μοναδιαίο πίνακα  $U$ , υπάρχουν  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  τέτοια ώστε:

$$U = e^{j\alpha} \mathcal{R}_z(\beta) \mathcal{R}_y(\gamma) \mathcal{R}_z(\delta)$$

- Θα δείξουμε αρχικά ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μία στροφή  $\mathcal{R}_{\hat{m}}$  ως ένα διάνυσμα  $\hat{m}$  αντί της μεσαίας περιστροφής  $\mathcal{R}_y(\gamma)$ .
- Στο μαθηματικό συμπλήρωμα δείχνουμε ότι αντί για το  $z$  και τον  $y$  μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε μοναδιαία κάθετα διανύσματα  $\hat{m}$  και  $\hat{n}$ :

$$U = e^{j\alpha'} \mathcal{R}_{\hat{m}}(\beta') \mathcal{R}_{\hat{n}}(\gamma') \mathcal{R}_{\hat{m}}(\delta')$$

# H πύλη T

- Ας θυμηθούμε ότι η πύλη T δίνεται από την σχέση:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{j\pi/4} \end{bmatrix} = e^{j\pi/8} \begin{bmatrix} e^{-j\pi/8} & 0 \\ 0 & e^{j\pi/8} \end{bmatrix} = e^{j\pi/8} \mathcal{R}_z\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

- Παρατηρούμε ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε 7 φορές τον T και να πάρουμε  $T^7 = e^{j7\pi/8} \mathcal{R}_z\left(\frac{7\pi}{4}\right) = e^{j7\pi/8} \mathcal{R}_z\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ .
- Μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\begin{aligned} HTH &= \frac{e^{j\pi/8}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\pi/8} & 0 \\ 0 & e^{j\pi/8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= e^{j\pi/8} \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{8} & -j \sin \frac{\pi}{8} \\ -j \sin \frac{\pi}{8} & \cos \frac{\pi}{8} \end{bmatrix} = e^{j\pi/8} \mathcal{R}_x\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

# Δύο πύλες για όλες τις άλλες

- Θα δείξουμε τώρα ότι ο συνδυασμός της  $T$  και της  $H$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υλοποιήσει μία πύλη που είναι οικουμενική με την έννοια ότι με την τοποθέτηση ενός αριθμού τέτοιων πυλών σε σειρά μπορουμε να προσεγγίσουμε οποιοδήποτε μοναδιαίο τελεστή  $U$ .
- Ας θεωρήσουμε τον τελεστή  $V$ :

$$V = \mathcal{R}_z(-\frac{\pi}{4})\mathcal{R}_x(\frac{\pi}{4})$$

- Κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} V &= (I \cos \frac{\pi}{8} + jZ \sin \frac{\pi}{8})(I \cos \frac{\pi}{8} - jX \sin \frac{\pi}{8}) = \\ &= I \cos^2 \frac{\pi}{8} - j(X - Z) \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} - ZX \sin^2(\frac{\pi}{8}) = \\ &= I \cos^2 \frac{\pi}{8} - j(X - Z) \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} - jY \sin^2(\frac{\pi}{8}) = \\ &= I \cos^2 \frac{\pi}{8} - j(X \cos \frac{\pi}{8} - Z \cos \frac{\pi}{8} + Y \sin \frac{\pi}{8}) \sin \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

# Δύο πύλες για όλες τις άλλες

- Αν τώρα θέσουμε

$$\cos \frac{\phi}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{8}$$

- Θα έχουμε:

$$V = I \cos \frac{\phi}{2} - j \mathcal{M} \sin \frac{\phi}{2}$$

- όπου ο πίνακας  $\mathcal{M}$  δίνεται από την σχέση:

$$\mathcal{M} \sin \frac{\phi}{2} = (X \cos \frac{\pi}{8} + Y \sin \frac{\pi}{8} - Z \cos \frac{\pi}{8}) \sin \frac{\pi}{8}$$

- Ας ορίσουμε τώρα ένα μη μοναδιαίο διάνυσμα τέτοιο ώστε:

$$\vec{N} = (\cos \frac{\pi}{8}, \sin \frac{\pi}{8}, -\cos \frac{\pi}{8})$$

- Βλέπουμε ότι ο τελεστής  $V$  είναι μία στροφή γύρω από το μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{n} = \vec{N}/|\vec{N}|$ .

# Δύο πύλες για όλες τις άλλες

- Ας εξετάσουμε τώρα τον τελεστή:

$$W = H^{-1/2} V H^{1/2}$$

- Αρχικά μπορούμε να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα  $H$ :

$$\det(H - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

- Τελικά βλέπουμε ότι οι ιδιοτιμές του  $H$  είναι η  $\lambda_1 = 1$  και  $\lambda_2 = -1$  οπότε εάν  $|v_1\rangle$  και  $|v_2\rangle$  είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$$H = |v_1\rangle\langle v_1| - |v_2\rangle\langle v_2|$$

$$I = |v_1\rangle\langle v_1| + |v_2\rangle\langle v_2|$$

# Δύο πύλες για όλες τις άλλες

- Οπότε θα έχουμε

$$H^{\pm 1/2} = \frac{1 \pm j}{2} H + \frac{1 \mp j}{2} I$$

- Μπορούμε να δείξουμε ότι (δείτε το αρχείο universal\_rots.py):

$$H^{1/2} X H^{-1/2} = \frac{1}{2}(X + \sqrt{2}Y + Z)$$

$$H^{1/2} Y H^{-1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(Z - X)$$

$$H^{1/2} Z H^{-1/2} = \frac{1}{2}(X - \sqrt{2}Y + Z)$$

- Αν έχουμε ένα πίνακα  $\mathcal{M}$  με την μορφή  $\mathcal{M} = n_x X + n_y Y + n_z Z$ , προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} H^{1/2} \mathcal{M} H^{-1/2} &= \frac{1}{2}(n_x - \sqrt{2}n_y + n_z)X + \\ &\quad \frac{\sqrt{2}}{2}(n_x - n_z)Y + \frac{1}{2}(n_x + \sqrt{2}n_y + n_z)Z \end{aligned}$$

# Δύο πύλες για όλες τις άλλες

- Εφόσον ο πίνακας  $V$  είναι μία στροφή γύρω από το  $\hat{n}$  δηλαδή

$$V = I \cos \frac{\phi}{2} - j \mathcal{M} \sin \frac{\phi}{2} \quad \text{θα έχουμε:}$$

$$H^{1/2} V H^{-1/2} = I \cos \frac{\phi}{2} - j(m_x X + m_y Y + m_Z) \sin \frac{\phi}{2}$$

- όπου τα  $m_x$ ,  $m_y$  και  $m_z$  είναι οι συντεταγμένες ένός μοναδιαίου διανύσματος  $\hat{m}$ :

$$m_x = \frac{1}{2}(n_x - \sqrt{2}n_y + n_z)$$

$$m_y = \frac{\sqrt{2}}{2}(n_x - n_z)$$

$$m_z = \frac{1}{2}(n_x + \sqrt{2}n_y + n_z)$$

- Στο αρχείο universal\_rots.py δείχνουμε ότι:

$$\hat{m} \cdot \hat{n} = \frac{n_x^2}{2} + \frac{n_z^2}{2} + n_x n_z$$

# Δύο πύλες για όλες τις άλλες

- Στην περίπτωση μας το  $\hat{n}$  είναι παράλληλο με το  $\vec{N}$  και επομένως  $n_x = -n_z$ .
- Οπότε προκύπτει ότι:

$$\hat{m} \cdot \hat{n} = 0$$

- Δηλαδή το  $V$  και το  $H^{1/2}VH^{-1/2}$  είναι δύο περιστροφές  $\mathcal{R}_{\hat{n}}(\phi)$  και  $\mathcal{R}_{\hat{m}}(\phi)$  όπου τα διανύσματα  $\hat{n}$  και  $\hat{m}$  είναι κάθετα.
- Μπορούμε να δείξουμε ότι η γωνία  $\phi$  είναι άρρητο πολλαπλάσιο του  $2\pi$ .
- Αυτό έχει την πολύ ενδιαφέρουσα ιδιότητα ότι εφαρμόζοντας πολλές φορές την περιστροφή μπορούμε να προσεγγίσουμε περιστροφές με οποιαδήποτε γωνία  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

# Μία γωνία για όλες τις άλλες

- Ας θεωρήσουμε ακέραια πολλαπλάσια  $k\phi$  της γωνίας  $\phi$
- Είναι φανερό ότι:

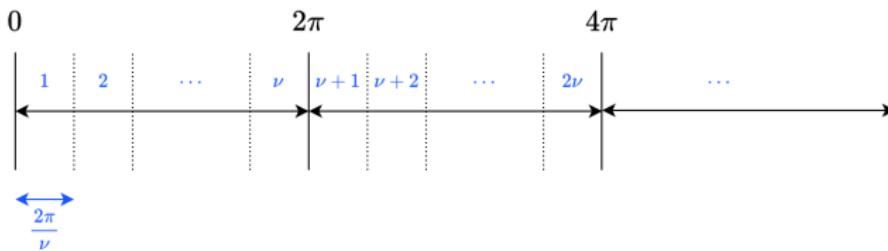
$$(\mathcal{R}_{\hat{n}}(\phi))^k = \mathcal{R}_{\hat{n}}(k\phi) = \mathcal{R}_{\hat{n}}(\theta_k) \quad (2)$$

- όπου με  $0 \leq \theta_k < 2\pi$  συμβολίζουμε τη γωνία  $k\phi$  η οποία όμως έχει μεταφερθεί στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .
- Στην ουσία η  $\theta_k$  είναι η μικρότερη θετική γωνία που προκύπτει αφαιρώντας από το  $k\phi$  ακέραια πολλαπλάσια  $2\lambda\pi$  του  $2\pi$ .

$$\theta_k = \min_{\lambda} \{ k\theta - 2\lambda\pi, \theta_k \geq 0 \}$$

# Mία γωνία για όλες τις άλλες

- Ας δούμε για παράδειγμα τι συμβαίνει όταν η  $\phi$  είναι ρητό πολλαπλάσιο του  $2\pi$ .



- Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν  $\mu$  και  $\nu$  ακέραιο τέτοια ώστε

$$\phi = \frac{2\pi\mu}{\nu}$$

- Πόσο κοντά μπορούμε να φτάσουμε σε μία συγκεκριμένη γωνία, π.χ.  $\theta = \pi/\nu$ , υπολογίζοντας τα  $\theta_k$ ;

# Mία γωνία για όλες τις άλλες

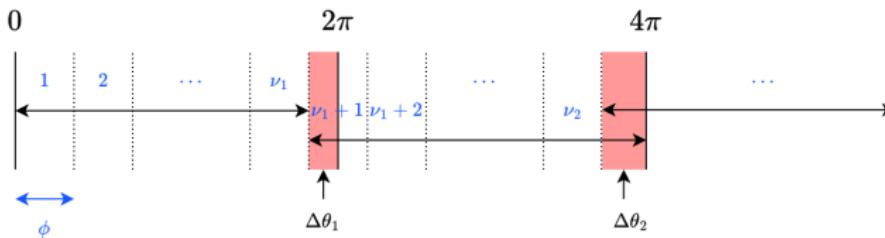
- Μπορούμε να δούμε ότι:

$$\theta_k - \theta = k\phi - \lambda 2\pi - \frac{\pi}{\nu} = (k\mu - \lambda) \frac{2\pi}{\nu} - \frac{\pi}{\nu}$$

- Παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του  $2\pi/\nu$  και επομένως είναι αδύνατο να πλησιάσουμε το  $\pi/\nu$  ακριβώς. Δηλαδή πάντα θα έχουμε  $\theta_k - \theta \neq 0$ .
- Επίσης μπορούμε να δείξουμε ότι το σφάλμα στην προσέγγιση είναι μεγαλύτερο από  $\pi/\nu$ .
- Εάν  $k\mu - \lambda < 0$  τότε βλέπουμε ότι  $\theta_k - \theta \leq 0$  οπότε πάντα θα έχουμε  $k\mu - \lambda > 0$ .
- Η μικρότερη τιμή του  $k\mu - \lambda$  είναι να έχουμε  $k\mu - \lambda = 1$  οπότε  $\theta_k - \theta = \pi/\nu$ . Για κάθε άλλη τιμή θα έχουμε  $\theta_k - \theta > \pi/\nu$ .
- **Οπότε το ελάχιστο σφάλμα είναι  $\pi/\nu$ !!!!**

# Μία γωνία για όλες τις άλλες

- Ας σκεφτούμε τώρα τι γίνεται οταν το  $\phi$  είναι άρρητο πολλαπλάσιο του  $2\pi$ . Τότε δεν μπορούμε να βρούμε ακέραιους  $\mu$  και  $\nu$  ώστε  $\phi = 2\pi\mu/\nu$ .



- Ας σκεφτούμε τώρα τι συμβαίνει όσο υπολογίζουμε το  $k\phi$  για όλο και μεγαλύτερα ακέραια  $k$ .
- Μπορούμε να καλύψουμε το πρώτο διάστημα  $[0, 2\pi)$  αλλά πάντα θα παραμένει ένα διάστημα με μήκος  $\Delta\theta_1$  μέχρι το  $2\pi$ .
- Εάν  $\nu_1$  είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο  $\nu_1\phi < 2\pi$ , τότε  $\Delta\theta_1 = 2\pi - \nu_1\phi$ .

# Mία γωνία για όλες τις άλλες

- Συνεχίζουμε τώρα να υπολογίζουμε το  $k\phi$  και έστω  $\nu_2$  ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο  $\nu_2\phi < 4\pi$  και  $\Delta\theta_2 = 4\pi - \nu_2\phi$ . Προφανώς θα πρέπει  $\nu_2 \neq \nu_1$  εάν η γωνία  $\phi$  είναι στο διάστημα  $[0, 2\pi)$ .
- Μπορεί να έχουμε  $\Delta\theta_2 = \Delta\theta_1$ ;
- Αν ίσχυε κάτι τέτοιο θα είχαμε  $4\pi - \nu_2\phi = 2\pi - \nu_1\phi$  οπότε θα είχαμε  $(\nu_2 - \nu_1)\phi = 2\pi$ . Δηλαδή το  $\phi$  θα ήταν ρητό πολλαπλάσιο του  $2\pi$ .
- Έστω πως  $\nu_i$  είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο το  $\nu_i\phi$  είναι μικρότερο του  $2i\pi$  και  $\Delta\theta_i = 2i\pi - \nu_i\phi$ .
- Μπορεί να έχουμε  $\Delta\theta_p = \Delta\theta_q$  για  $p \neq q$ ;
- Αν το είχαμε θα είχαμε και  $2(p - q)\pi = (nu_q - nu_p)\phi$  οπότε το  $\phi$  θα ήταν ρητό πολλαπλάσιο του  $2\pi$ .
- Κάθε φορά επομένως παίρνουμε ένα διαφορετικό  $\Delta\theta_i$  στο διάστημα  $[0, 2\pi)$ .

# Mία γωνία για όλες τις άλλες

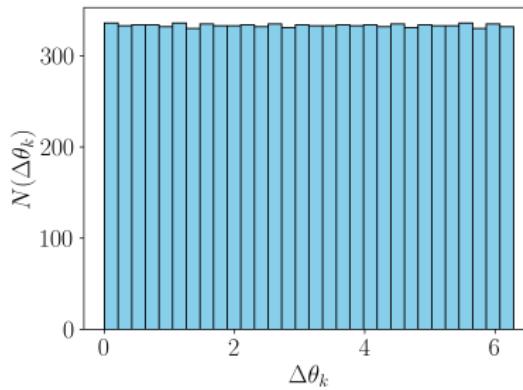
- Είναι εύκολο να δούμε ότι εάν εφαρμόσουμε  $k$  φορές την πύλη  $\mathcal{R}_{\hat{n}}(\phi)$  τότε θα παίρνουμε κάθε φορά μία διαφορετική στροφή  $\mathcal{R}_{\hat{n}}(\Delta\theta_k)$ .

$$(\mathcal{R}_{\hat{n}}(\phi))^k = \mathcal{R}_{\hat{n}}(k\phi) = \mathcal{R}_{\hat{n}}(\Delta\theta_k)$$

- Στην περίπτωση μας, αποδεικνύεται ότι η γωνία  $\phi$  για την οποία έχουμε  $\cos \phi = \cos^2 \frac{\pi}{8}$  είναι όντως άρρητο πολλαπλάσιο του  $2\pi$ .
- Μπορούμε να δούμε αριθμητικά τι γίνεται στην περίπτωση αυτή στο αρχείο `irrationalphi.py` στο repo του μαθήματος.
- Στο script αυτό γεννάμε τα  $\theta_k$  για ένα μεγάλο αριθμό ακεραίων  $k$  και δείχνουμε ότι το ιστόγραμμα των τιμών του  $\Delta\theta_k$ .

# Mία γωνία για όλες τις άλλες

- Προκύπτει ότι το  $\Delta\theta_k$  ακολουθεί μία ομοιμόρφη κατανομή στο  $[0, 2\pi)$
- Επομένως πάντα θα μπορούμε να βρούμε έναν ακέραιο  $k$  έτσι ώστε να πλησιάσουμε κοντά σε μία γωνία στο  $[0, 2\pi)$  που θέλουμε να περιγράψουμε.



# H πύλη $H^{1/2}$

- Είδαμε ότι για να υλοποιήσουμε οποιοδήποτε μοναδιαίου τελεστή  $U$  που δρα πάνω σε ένα qubit χρειαζόμαστε την πύλη που υλοποιεί την  $\mathcal{R}_{\hat{n}}(\phi)$ .
- Χρειάζεται επίσης να μπορούμε να υπολογίζουμε το  $H^{1/2}\mathcal{R}_{\hat{n}}(\phi)H^{-1/2}$  που μας δίνει τον δεύτερο τελεστή περιστροφής  $\mathcal{R}_{\hat{m}}(\phi)$
- Για να υπολογίσουμε την  $H^{1/2}$  χρησιμοποιούμε μερικές ιδιότητες του πίνακα  $H$ .
- Συγκεκριμένα μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$H^a = Y^{1/4} Z^a Y^{-1/4}$$

- H πύλη  $Y$  είναι:

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}$$

- οι ιδιοτιμές του  $Y$  είναι  $\pm 1$  οπότε πάλι μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$Y = |v_1\rangle\langle v_1| - |v_2\rangle\langle v_2|$$

# $H \pi\lambda\eta H^{1/2}$

- Οπότε εφόσον  $I = |v_1\rangle\langle v_1| + |v_2\rangle\langle v_2|$  θα έχουμε:

$$|v_1\rangle\langle v_1| = \frac{1}{2}(I + Y)$$

$$|v_2\rangle\langle v_2| = \frac{1}{2}(I - Y)$$

- Οπότε κατά τα γνωστά:

$$Y^a = |v_1\rangle\langle v_1| + (-1)^a |v_2\rangle\langle v_2| = \frac{1+(-1)^a}{2}I + \frac{1-(-1)^a}{2}Y$$

- Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι:

$$X^a = \frac{1+(-1)^a}{2}I + \frac{1-(-1)^a}{2}X$$

$$Z^a = \frac{1+(-1)^a}{2}I + \frac{1-(-1)^a}{2}Z$$

# $H$ πύλη $H^{1/2}$

- Χρησιμοποιώντας τους συμβολικούς υπολογισμούς στο script `IXYZindentities.py` δείχνουμε ότι:

$$H^a = Y^{1/4} Z^a Y^{-1/4}$$

$$Y^a = Z^{1/2} X^a Z^{-1/2}$$

$$X^a = H Z^a H$$

- Επομένως μπορούμε να υλοποιήσουμε την πύλη  $H^{1/2}$  ως εξής:

$$\begin{aligned} H^{1/2} &= Y^{1/4} Z^{1/2} Y^{-1/4} = Z^{1/2} X^{1/4} Z^{-1/2} Z^{1/2} Z^{1/2} X^{-1/4} Z^{-1/2} = \\ &Z^{1/2} H Z^{1/4} H Z^{1/2} H Z^{-1/4} H Z^{-1/2} \end{aligned}$$

- Αν συγκρίνουμε την πύλη  $T$  και την πύλη  $Z^{1/4}$  βλέπουμε ότι:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{j\pi/4} \end{bmatrix} = e^{j\pi/8} \begin{bmatrix} e^{-j\pi/8} & 0 \\ 0 & e^{j\pi/8} \end{bmatrix} = e^{j\pi/8} Z^{1/4}$$

# $H$ πύλη $H^{1/2}$

- Επομένως αν εξαιρέσουμε έναν παράγοντα φάσης, η πύλη  $Z^{1/4}$  ταυτίζεται με την  $T$ , δηλαδή  $Z^{1/4} \approx T$ .
- Είναι εύκολο να δούμε ότι:

$$Z^{1/2} = Z^{1/4}Z^{1/4} \approx T^2$$

$$Z^{7/4}Z^{1/4} = Z^2 = I \rightarrow Z^{-1/4} = Z^{7/4} \approx T^7$$

$$Z^{3/2}Z^{1/2} = Z^2 = I \rightarrow Z^{-1/2} = Z^{3/2} = Z^{6/4} \approx T^6$$

- Η πύλη  $H^{1/2}$  υλοποιείται ως εξής:

$$H^{1/2} \approx T^2HTHT^2HT^7HT^6$$

# $H \piύλη H^{-1/2}$

- Δεδομένου ότι  $T^8 = I$  προκύπτει ότι  $T^\mu T^{8-\mu} = I$  οπότε όπου ο  $\mu$  είναι ακέραιος.
- Ο αντίστροφος  $T^{-\mu}$  του  $T^\mu$  περιγράφεται από τον  $T^{8-\mu}$ .
- Για υπολογίσουμε το  $H^{-1/2}$  αντιστρέφουμε τον  $H^{1/2}$ .
- Αν θυμάστε ισχύει  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  οπότε διαβάζουμε ανάποδα το γινόμενο των πινάκων και για κάθε πίνακα αντικαθιστούμε τον αντίστροφο του.
- Εφόσον  $HH = I$  ισχύει  $H^{-1} = H$ .

$$H^{-1/2} \approx (T^2 HT HT^2 HT^7 HT^6)^{-1} = T^2 HT HT^6 HT^7 HT^6$$

- Δηλαδή μπορούμε να υλοποιήσουμε τις πύλες  $H^{1/2}$  και  $H^{-1/2}$  με πύλες  $H$  και  $T$ !

# Οικουμενικές πύλες: Ανακεφαλαίωση

- Ας συνοψίσουμε τι έχουμε δείξει:
- Κάθε μοναδιαίος τελεστής  $U$  που δρα σε  $n$  qubits μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο τελεστών  $U_d$  που δρουν μόνο σε δύο καταστάσεις της υπολογιστικής βάσης.
- Με την βοήθεια της κωδικοποίησης Gray υλοποιούμε κάθε έναν από τους τελεστές  $U_d$  με πύλες CNOT  $C^n(X)$  και ελεγχόμενες πύλες  $C^n(U'_d)$  όπου ο  $U'_d$  είναι ένας τελεστής που δρα πάνω σε ένα μόνο qubit.
- Για να υλοποιήσουμε κάθε έναν από τους πίνακες  $U'_d$  χρησιμοποιούμε τις πύλες  $H^{\pm 1/2}$ ,  $H$  και  $T$  για να φτιάξουμε τους τελεστές στροφής  $R_{\hat{n}}(\phi)$  και  $R_{\hat{m}}(\phi)$ .
- Η γωνία  $\phi$  είναι άρρητο πολλαπλάσιο του  $2\pi$  και επομένως οι δύο αυτοί συντελεστές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υλοποιήσουν οποιαδήποτε στροφή  $R_{\hat{n}}(\beta)$  και  $R_{\hat{m}}(\gamma)$  με πολύ καλή ακρίβεια που με τη σειρά τους υλοποιούν οποιοδήποτε  $U'_d$ .
- Τέλος οι τελεστές  $H^{\pm 1/2}$  υλοποιούνται με πύλες  $H$  και  $T$ .
- Προκύπτει ότι κάθε  $U$  μπορεί να υλοποιηθεί με πύλες  $H$ ,  $T$  και CNOT: οι πύλες αυτές είναι οικουμενικές!